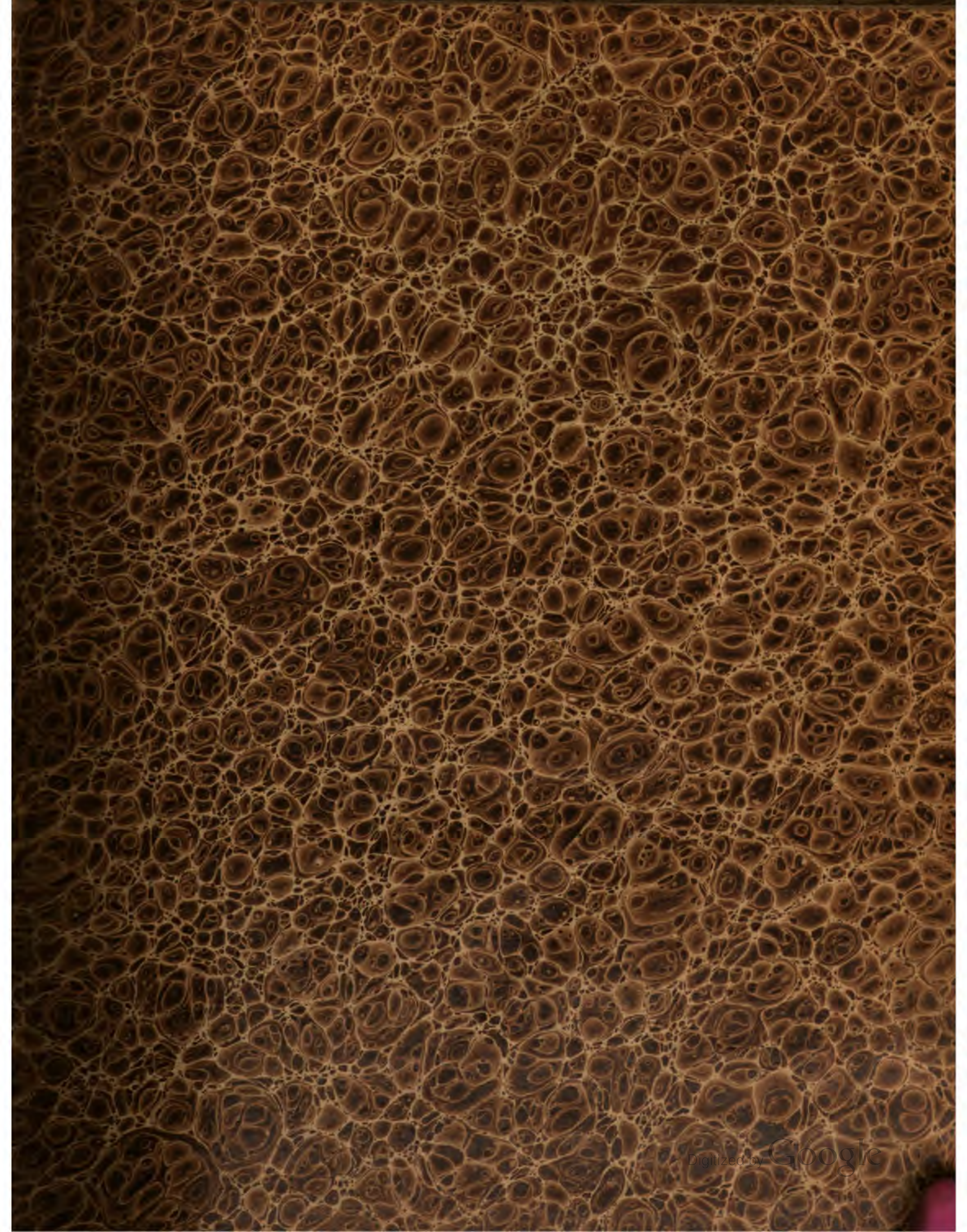



UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



# TRAITÉ
# DE PHYSIQUE
# MATHÉMATIQUE.

## OUVRAGES DU MÊME AUTEUR.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE, *seconde édition*, considérablement augmentée; 2 vol. in-8°, 1833. Prix........................................ 18 fr.

NOUVELLE THÉORIE DE L'ACTION CAPILLAIRE; 1 vol. in-4°, 1831. Prix....... 15 fr.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

# THÉORIE

## MATHÉMATIQUE

# DE LA CHALEUR;

**PAR S. D. POISSON,**

Membre de l'Institut, du Bureau des Longitudes et de l'Université de France; des Sociétés royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, de Boston, de Turin, de Naples, et de plusieurs autres villes d'Italie; de l'Université de Wilna; des Sociétés italienne, astronomique de Londres, philomatiques de Paris et de Varsovie, et de la Société des Sciences d'Orléans.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1835



# TABLE DES MATIÈRES.

# *Errata.*

Page 20, ligne 10 en remontant, *au lieu de* $\rho\varpi\Pi m dt$, *lisez* $\sigma\Pi m dt$, et *au lieu de* $q'\rho'\varkappa$, *lisez* $q'\rho' p\varkappa$

45, 17, *au lieu de* normale, *lisez* concave

82, 1[re], *au lieu de* $\lambda$, *lisez* $\lambda_1$

89 et 91, lignes 7 et 6 en remontant, *au lieu de* $R(u'-u)$, *lisez* $\int R(u'-u)dt$

135, 3, *au lieu de* série (1), *lisez* série (2)

144, 2 en remontant, *au lieu de* $\alpha$, $\zeta$, $\gamma$, etc., des quantités constantes, *lisez* des quantités constantes $\alpha$, $\zeta$, $\gamma$, etc.

233, 17 en remontant, *au lieu de* (fig. 13), *lisez* (fig. 13 *bis*)

328, 4, *au lieu de* $\frac{dU}{dt}$, *lisez* $\frac{dU}{dx}$; ligne 8, *au lieu de* $\frac{du_{\prime}}{dt'}$, *lisez* $\frac{du_{\prime}}{dx'}$, *au lieu de* $\frac{d^2u}{dt'}$, *lisez* $\frac{du_{\prime}}{dt'}$; ligne 16, *multipliez* l'intégrale double par $\frac{2}{\pi}$

377, 3 en remontant, *au lieu de* $f'r_{\prime}'$, *lisez* $f_{\prime}r_{\prime}$

401, 13 et 14, *au lieu de* $f'r'$, *lisez* $f_{\prime}r'$

407, 14, *au lieu de* $\frac{2m}{a^2}$, *lisez* $\frac{m}{a^2}$

422, 8 en remontant, *au lieu de* intérieure, *lisez* extérieure

429, lignes 19 et 20, *au lieu de* trente, *lisez* trois

456, 15 en remontant, et page 467, lignes 3 et 10, *au lieu de* Farenheit, *lisez* Fahrenheit

471, 7 en remontant, *au lieu de* $\frac{1}{4}$, *lisez* $\frac{1}{4\pi}$

487, 1[re], *au lieu de* pemière espèce, *lisez* première et seconde espèce

502, 5, *au lieu de* $\theta_{\prime}$, *lisez* $\theta'$

503, 19, *au lieu de* $\frac{\zeta \sin \delta}{\lambda+\lambda_1}$, *lisez* $\frac{\zeta \sin \delta}{(\lambda+\lambda_1)D}$

513, 4 en remontant, *au lieu de* $u$, *lisez* $u'$.

# THÉORIE

## MATHÉMATIQUE

# DE LA CHALEUR.

La *Pyrométrie* de Lambert contient les premières applications que l'on a faites du calcul à la théorie de la chaleur; elles ont pour objet la distribution de la chaleur dans une barre, et la comparaison des quantités de chaleur rayonnante que le soleil envoie à la terre et aux planètes pendant leurs révolutions entières ou des parties de chaque révolution. L'auteur fait voir que ces quantités sont liées à la première loi de Képler, suivant laquelle les aires décrites autour du soleil, par le rayon vecteur de chaque planète, sont proportionnelles au temps employé à les décrire. Relativement aux températures des points d'une barre soumise à des sources constantes de chaleur, il montre comment elles peuvent être exprimées par des formules qui satisfont aux expériences. Mais Lambert n'a pas cherché à déduire ces formules de l'équation différentielle d'où dépend la température d'un point quelconque, quand la barre est parvenue à un état permanent. La forme de cette équation, et celle de l'équation aux différences partielles qui a lieu pendant que la barre s'échauffe ou se refroidit, ont été indiquées par M. Biot, en 1804, dans l'extrait d'un mémoire sur la propagation de la chaleur (*). M. Biot les a déduites du principe de Newton, sur la communication de la chaleur entre des corps juxtaposés, qu'il a étendu aux tranches contiguës et infiniment minces de la barre. Il intègre l'équation relative à l'état permanent, puis il véri-

(*) *Bibliothèque britannique*, tome XXVII.

fic, sur ses propres expériences et sur celles de Rumford, la loi des températures qui résulte de cette intégrale.

Ces premiers essais, et l'ingénieuse théorie des échanges de chaleur rayonnante qu'on doit à M. Pierre Prévost, de Genève, constituaient toute la théorie mathématique de la chaleur, lorsque Fourier s'en est occupé dans un mémoire envoyé à l'Institut en 1807, et, ensuite, dans la pièce couronnée par ce corps savant au commencement de 1812 (*). Par le nombre et la variété des questions que l'auteur a considérées, cette théorie est devenue alors une branche nouvelle de la Physique mathématique. Fourier a traité de nouveau une partie de ces questions dans sa *Théorie analytique de la Chaleur*. Les volumes de l'Académie des Sciences et ceux des *Annales de Physique et de Chimie*, qui ont paru depuis cet ouvrage, contiennent aussi d'autres recherches de l'auteur sur le même sujet, relatives principalement à la chaleur rayonnante et à la chaleur de la terre.

Laplace s'est occupé de la théorie de la chaleur peu de temps après Fourier. Dans une note imprimée en 1810 (**), il considère la propagation de la chaleur dans l'intérieur des corps comme le résultat d'un rayonnement moléculaire qui s'étend au-delà des molécules les plus voisines, à des distances finies, mais insensibles; et il montre comment cette manière nouvelle d'envisager la question peut conduire à l'équation aux différences partielles d'où dépend la loi des températures dans l'intérieur des corps. Il indique aussi, mais fort incomplétement, un moyen de former l'équation générale relative à leur surface, que Fourier avait précédemment donnée sans démonstration. Dans la *Connaissance des Tems* de 1823, et ensuite dans le livre XI de la *Mécanique céleste*, Laplace s'est occupé de la résolution de ces deux équations, appliquées au cas d'une sphère homogène et dont la superficie est partout la même, qui a été primitivement échauffée d'une manière quelconque. La solution générale qu'il a donnée de ce problème comprend celle de Fourier, qui se rapporte au cas particulier où la température des points de la

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tomes IV et V.

(**) *Mémoires de la première classe de l'Institut*, année 1809, page 332.

sphère ne dépend que de leur distance à son centre ; elle est fondée sur l'analyse que l'auteur avait employée autrefois dans la question du flux et du reflux de la mer, et présente une nouvelle application de cette analyse, dont le caractère spécial est d'exprimer la valeur générale de l'inconnue de chaque problème, par la somme d'un nombre indéfini de valeurs particulières. Je suis parvenu au même résultat, dans mon second mémoire sur la *Distribution de la Chaleur dans les corps solides* (*), par une analyse différente et moins simple, mais qui avait cependant quelque avantage, et que Laplace a regardée comme une confirmation de la sienne. En appliquant cette solution générale au globe terrestre, il a été conduit à partager l'opinion de Fourier, qui attribue à la chaleur primitive de la terre l'accroissement de température que l'on observe à partir de sa superficie, et dont la grandeur n'est pas la même dans toutes les localités. Cette hypothèse d'une température provenant de la chaleur d'origine et qui devrait s'élever à des millions de degrés dans les couches centrales du globe, a été généralement adoptée ; mais les difficultés qu'elle présente m'ont paru la rendre invraisemblable ; et j'ai proposé une autre manière d'expliquer la température croissante que l'on a reconnue, depuis long-temps, à toutes les profondeurs où l'on a pu atteindre.

Dans cette nouvelle explication, le phénomène dépend de l'inégalité de température des régions de l'espace que la terre traverse successivement par suite du mouvement de translation commun au soleil et à toutes les planètes. Il serait, en effet, hors de toute vraisemblance que la température de l'espace fût partout la même ; les variations qu'elle éprouve, d'un point à un autre, séparés par de très grandes distances, peuvent être fort considérables ; et elles doivent produire des variations correspondantes dans la température de la terre, qui s'étendent jusqu'à des profondeurs dépendantes de leurs durées et de leurs amplitudes. Si l'on suppose, par exemple, qu'un bloc de pierre soit transporté de l'équateur à notre latitude, son refroidissement aura commencé à la surface, et se sera propagé dans son intérieur ; et s'il ne s'est pas étendu à la masse entière, parce que le

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 19e cahier.

temps du transport aura été trop court, ce corps, parvenu dans nos climats, présentera le phénomène d'une température croissante à partir de sa superficie. La terre est dans le cas de ce bloc de pierre; c'est un corps qui vient d'une région dont la température était plus élevée que celle du lieu où il se trouve actuellement; ou, si l'on veut, c'est un thermomètre mobile dans l'espace, qui n'a pas le temps, à cause de ses grandes dimensions et d'après son degré de conductibilité, de prendre, dans toute sa masse, les températures des diverses régions qu'il traverse. Aujourd'hui la température du globe est croissante au-dessous de sa superficie; le contraire a eu et aura lieu dans d'autres temps; en outre, à des époques séparées par de longues suites de siècles, cette température a dû être, et sera par la suite, beaucoup plus haute ou beaucoup plus basse qu'elle ne l'est maintenant; ce qui empêche que la terre soit toujours habitable par l'espèce humaine, et a peut-être contribué aux révolutions successives dont sa couche extérieure conserve les traces. Il faut remarquer que ces alternatives de la température de l'espace, sont des causes certaines, qui influent sans cesse sur la chaleur du globe, du moins près de sa surface; tandis que la chaleur d'origine de la terre, quelque lente qu'elle soit à se dissiper, n'est cependant qu'une circonstance transitoire dont on ne pourrait démontrer l'existence à l'époque actuelle, et à laquelle on ne serait forcé de recourir, comme une hypothèse, que si les causes permanentes et nécessaires ne suffisaient pas à l'explication des phénomènes.

Dans cette indication succincte des principales recherches des géomètres sur la théorie de la chaleur, je ne dois pas oublier de faire mention d'un mémoire présenté récemment à l'Institut par M. Lamé, professeur de physique à l'École Polytechnique. L'auteur a déterminé, dans ce mémoire (*), la loi des températures de tous les points d'un ellipsoïde homogène parvenu à un état permanent; et il a trouvé que l'expression de cette loi dépend des fonctions elliptiques; ce qui ne s'était présenté jusque là dans aucun problème relatif à la distribution de la chaleur dans un corps de forme donnée.

Je me bornerai, dans ce préambule, à ces citations; elles suffiron

(*) Tome V des *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences.*

pour qu'on puisse connaître la première origine de la partie de la science que je vais traiter, l'extension et l'importance qu'elle a acquises dans ces derniers temps, et son état actuel. Je laisserai au lecteur à comparer les principes d'où l'on était parti jusqu'à présent et les résultats qu'on avait obtenus, aux principes et aux résultats qui seront exposés dans cet ouvrage. En lui donnant le titre de *Théorie mathématique de la chaleur*, j'ai voulu indiquer qu'il s'agira de déduire, par un calcul rigoureux, toutes les conséquences d'une hypothèse générale sur la communication de la chaleur, fondée sur l'expérience et l'analogie. Ces conséquences seront alors une transformation de l'hypothèse même, à laquelle le calcul n'ôte et n'ajoute rien; et leur parfaite conformité avec les phénomènes observés ne pourra laisser aucun doute sur la vérité de la théorie. Toutefois, pour que cette théorie fût complète, il faudrait qu'elle comprît la détermination des mouvemens produits par la chaleur dans les fluides aériformes, dans les liquides, et même dans les corps solides; mais les géomètres n'ont point encore abordé cet ordre de questions, d'une grande difficulté, auquel se rattachent le phénomène des vents alisés, celui de certains courans qu'on observe dans la mer, et les variations diurnes du baromètre. Dans l'état actuel de la science, la théorie mathématique de la chaleur a seulement pour objet la communication de la chaleur, de proche en proche dans l'intérieur des corps solides et des liquides, et à distance entre des corps différens : sous ce double rapport, je n'ai rien négligé pour que cet ouvrage fût aussi complet qu'on pourra le désirer.

Les données nécessaires pour réduire, dans chaque cas, les formules en nombre, sont la chaleur spécifique, la mesure de la conductibilité dans l'intérieur des corps, et celle du pouvoir rayonnant à leur surface. La chaleur spécifique a été déterminée pour un grand nombre de corps solides, liquides ou gazeux, par différens procédés qui sont exposés dans les traités de Physique; les notions qu'on a jusqu'à présent sur la conductibilité et sur le pouvoir rayonnant sont beaucoup moins précises. Indépendamment de ces données physiques, relatives à chaque corps en particulier, la théorie emprunte encore à l'expérience la loi de l'émission de la chaleur à travers les surfaces des

corps. Sur ce point, j'ai adopté la loi générale en fonction des températures, que MM. Dulong et Petit ont donnée dans le mémoire qui a remporté le prix de l'Académie des Sciences en 1818 (*); ouvrage que l'on regarde, à juste titre, comme un des plus remarquables de la Physique expérimentale, soit à raison de l'importance et de l'ensemble des résultats, soit à cause de la précision des observations et des difficultés que les auteurs ont surmontées. En vertu de cette loi, la communication de la chaleur entre deux corps ne dépend pas simplement de leur température relative, comme on l'avait admis pendant long-temps, d'après le principe de Newton, suffisamment exact dans le cas des températures ordinaires, mais qui s'écarte de plus en plus de l'observation à mesure que les températures sont plus élevées. L'analogie porte à croire, et j'ai supposé, en effet, qu'il en est de même dans l'intérieur des corps; et quoique la communication de la chaleur n'ait lieu qu'entre des molécules très voisines, dont les températures sont très peu différentes, la considération des carrés de leurs différences donne naissance, néanmoins, à des termes que j'ai déterminés, et dont l'omission rendait incomplète l'équation des températures intérieures, telle qu'on l'avait donnée jusqu'ici pour les corps homogènes.

Cette *Théorie mathématique de la Chaleur* formera la seconde partie d'un *Traité de Physique mathématique*, où je me propose de considérer successivement, sans m'astreindre à aucun ordre arrêté d'avance, les diverses questions de la Physique auxquelles je pourrai appliquer l'analyse. La première partie de ce Traité est la *Nouvelle théorie de l'Action capillaire*, publiée en 1831.

---

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 18ᵉ cahier.

# CHAPITRE PREMIER.

## *Notions préliminaires.*

(1). L'hypothèse qui fait dépendre les phénomènes de la chaleur, des ondulations d'un fluide stagnant, n'a conduit, jusqu'à présent, à aucun résultat précis et conforme à l'expérience; c'est pourquoi j'adopterai dans cet ouvrage la théorie beaucoup plus féconde, qui attribue ces phénomènes à une matière impondérable, contenue dans les parties de tous les corps aussi petites que l'on voudra, et pouvant s'en détacher et passer d'une partie à une autre, ce qui fait varier avec le temps la quantité de cette substance renfermée dans chaque partie.

Cette matière s'appelle *calorique;* on la nomme aussi *matière de la chaleur,* ou simplement *chaleur.*

On regarde comme inépuisable la chaleur renfermée dans un corps, en sorte qu'il en contient toujours la quantité nécessaire pour balancer l'attraction mutuelle de ses molécules, et les maintenir à distance les unes des autres. Nous ne pouvons donc pas connaître la quantité totale de chaleur contenue dans un corps ou dans une de ses parties; mais il est possible de comparer entre elles, d'après les effets qu'elles produisent, les quantités de chaleur qu'un corps perd ou acquiert pendant un temps donné; et en prenant pour unité la quantité de chaleur correspondante à un effet constant et déterminé, ces quantités variables se mesurent et s'expriment en nombres rapportés à cette unité de leur espèce, comme les quantités de toute autre nature que l'on soumet au calcul.

(2). L'effet le plus général de la chaleur et le plus indépendant de nos sensations, est la dilatation des corps où elle est introduite.

Si deux corps sont en contact, ou seulement assez rapprochés, une partie de la chaleur de l'un passe dans l'autre, et réciproquement.

Celui de ces deux corps qui reçoit plus de chaleur qu'il n'en émet éprouve une dilatation, en même temps l'autre se contracte; au bout d'un certain temps ce double effet cesse, et les deux volumes demeurent constans. L'un de ces deux corps étant un *thermomètre*, c'est-à-dire un instrument formé en général d'un fluide, afin que les dilatations ou condensations soient plus sensibles, les parties de son volume, à l'époque où il est devenu constant, marquent ce qu'on appelle la *température* de l'autre corps au même instant. Ainsi la température est un effet de la chaleur indiqué par les parties du volume ou les *degrés* d'un thermomètre formé d'un fluide déterminé.

Les indications de plusieurs thermomètres formés de fluides différens peuvent être différentes; et cela arrivera, en effet, si ces fluides ne se dilatent pas suivant la même loi, pour des accroissemens égaux de chaleur. Dans les températures ordinaires, depuis zéro jusqu'à cent degrés, par exemple, la marche du thermomètre à mercure est la même que celle du thermomètre à air; mais ces deux instrumens s'écartent notablement l'un de l'autre dans les hautes températures; et l'expérience ayant fait voir que les lois du refroidissement des corps, et généralement celles des phénomènes de la chaleur, sont plus simples quand on les rapporte au thermomètre à air, nous supposerons, pour fixer les idées, que toutes les températures sont exprimées en degrés de ce thermomètre centigrade; en sorte que l'unité de température sera le centième de l'accroissement d'un volume d'air ou d'un gaz quelconque, qui a lieu en passant du terme de la glace fondante à celui de l'ébullition de l'eau sous la pression barométrique ordinaire de $0^m,76$; lequel accroissement est, comme on sait, 0,375 du volume à zéro pour tous les gaz. Au-dessus du zéro de l'échelle thermométrique les températures seront positives, et au-dessous elles seront des quantités négatives.

Au reste, quelle que soit la matière dont un thermomètre est formé, s'il indique des températures égales pour deux ou plusieurs corps, un autre thermomètre marquera encore pour ces mêmes corps des températures égales entre elles; et si ces corps sont mis en contact ou en présence les uns des autres, leurs volumes ne varieront pas; car alors chacun d'eux pourra être considéré comme un thermomètre, par rapport à tous les autres.

(3). Pour faire passer un corps de l'état solide à l'état liquide, ou de l'état liquide à l'état de vapeur, sans que sa température soit changée, il y faut introduire une certaine quantité de chaleur, variable d'un corps à un autre, et que l'on appelle *chaleur latente*. Cette chaleur insensible au thermomètre n'est cependant pas détruite : elle réside dans les molécules du corps qu'elle maintient aux distances mutuelles où elles doivent être dans le nouvel état, liquide ou gazeux; elle reparaît intégralement lorsque le corps revient de l'état de vapeur à l'état liquide, ou de l'état liquide à l'état solide.

Ainsi, lorsqu'un poids donné de glace, amené d'abord à la température zéro, est réduit en eau à la même température, il absorbe, comme on sait, la quantité de chaleur nécessaire pour élever de zéro à 75° la température d'un même poids d'eau; et pour réduire en vapeur à la température de 100° un poids d'eau déjà parvenu à cette température, on sait aussi qu'il y faut introduire la quantité de chaleur qui serait nécessaire pour élever de zéro à 100° la température d'un poids d'eau à peu près sextuple. Des pertes de chaleur égales à ces augmentations ont lieu quand la vapeur d'eau revient à l'état liquide, et quand l'eau revient à l'état de glace, sans changement de température dans l'un et l'autre cas. Les changemens d'état de tous les corps présentent des effets semblables, mais en proportions plus ou moins considérables.

Je prendrai pour unité de chaleur la quantité de cette substance impondérable, nécessaire pour réduire en eau à la température zéro un gramme de glace à la même température.

(4). Depuis long-temps les physiciens ont aussi reconnu que les corps différens acquièrent ou perdent des quantités inégales de chaleur, lorsqu'ils éprouvent, sans changer d'état, des variations égales de température. Cela étant, nous appellerons *chaleur spécifique* d'un corps le nombre d'unités de chaleur qui sera nécessaire pour élever d'un degré la température d'une unité de volume, remplie de la matière de ce corps, dans son état solide, liquide ou gazeux.

Nous rapportons ainsi la chaleur spécifique à l'unité de volume, parce que cela nous sera plus commode dans nos calculs; mais on peut aussi la rapporter à l'unité de poids. Si l'on prend pour ces unités le centimètre cube et le gramme, et que l'on désigne par $c$ et $\gamma$ les quantités de chaleur nécessaires pour élever d'un degré leur température,

$c$ et $\gamma$ seront les chaleurs spécifiques rapportées à l'unité de volume et à l'unité de masse ; et pour un même corps, dont je représenterai par $\rho$ la densité, il est aisé de voir que ces quantités seront liées entre elles par l'équation

$$c = \rho\gamma.$$

Dans les corps solides la quantité $\gamma$ est sensiblement constante, tant que la température est peu élevée ; elle devient croissante à de très hautes températures ; en sorte qu'il faut à très peu près une égale quantité de chaleur pour élever la température d'un même corps solide, soit de zéro à un degré, soit de 100° à 101°, mais une quantité un peu plus grande pour l'élever, par exemple, de 300° à 301°. Si l'on considère que les liquides changent d'état pour des variations de température qui ne sont pas très grandes, il y a lieu de croire que les variations de la quantité $\gamma$ y sont bien plus rapides que dans les solides, et qu'elles existent même dans les basses températures ; on peut aussi présumer que cette quantité $\gamma$ demeure constante à toutes les températures, dans les gaz qui sont loin de la liquéfaction ; mais l'expérience ne nous a encore rien appris de certain à cet égard.

(5). Il est important, pour la suite de cet ouvrage, de se former une idée précise de la température et de la chaleur spécifique dans les corps où ces élémens varient d'un point à un autre et avec le temps.

Dans un corps homogène où la chaleur est distribuée uniformément entre toutes les parties, la température est aussi partout la même. Pour que le thermomètre marque exactement cette température, il faut que pendant toute la durée de son contact avec le corps, la quantité de chaleur qu'il lui communique ou qu'il lui enlève, soit insensible ; ce qui exigerait que cet instrument fût un thermomètre idéal, dont la masse serait infiniment petite, eu égard à celle du corps : hypothèse que l'on pourrait faire, puisqu'il s'agit de définir et non de mesurer la température. Mais on peut aussi imaginer que pendant toute la durée du contact, la chaleur de toutes les parties du corps soit entretenue, par un moyen quelconque, dans un état permanent ; et alors la température sera celle qu'indiquera le thermomètre, quelles que soient la masse de cet instrument et la durée de l'expérience.

Cela posé, soit M un point d'un corps A homogène ou hétérogène ;

concevons autour de M une partie $m$ de A, dont les dimensions soient insensibles, et qui comprenne néanmoins un nombre immense de molécules (*); au bout d'un temps quelconque $t$, imaginons un autre corps B, homogène, dont toutes les parties soient de la même matière que $m$, et qui aient aussi toutes la même chaleur que $m$ à cet instant : cet état calorifique de B étant supposé invariable, si l'on appelle $u$ sa température, $u$ sera aussi la température de A au point M et au bout du temps $t$. Quelle que soit la disposition régulière ou irrégulière des molécules dans chaque partie $m$ de A, à cause de leur nombre immense, on pourra considérer $u$ comme une fonction connue ou inconnue, de $t$ seulement, si la température est la même dans toute l'étendue de A, ou de $t$ et des trois coordonnées de M, si la température varie d'un point à un autre de ce corps.

La chaleur spécifique de A, qui répond au point M, sera aussi celle du corps B, tel qu'on vient de le définir. En la désignant par $c$, cette quantité sera une fonction de la température correspondante $u$ et des coordonnées de M, lorsque A sera un corps hétérogène, et simplement une fonction de $u$, dans le cas de l'homogénéité de A. Si l'on représente par $v$ le volume de $m$, le produit $cvdu$ sera alors l'augmentation de chaleur de cette petite masse, pendant l'instant $dt$ auquel répond l'accroissement $du$ de la température.

C'est de cette manière que nous exprimerons dans la suite la variation instantanée de la chaleur d'une partie matérielle de grandeur insensible; mais elle est aussi égale à $p\gamma du$, en désignant par $p$ le poids de cette partie $m$, et par $\gamma$ la chaleur spécifique rapportée à l'unité de poids. Si A est un corps homogène partout également échauffé, et si l'on appelle P son poids entier, $P\int_{\alpha}^{\beta}\gamma du$ exprimera l'augmentation totale de la quantité de chaleur, pendant que la température $u$, commune à tous ses points, s'élèvera de $\alpha$ à $\beta$. Pour la calculer, il faudrait connaître $\gamma$ en fonction de $u$; mais lorsque les températures $\alpha$ et $\beta$ ne sont ni très hautes, ni très abaissées au-dessous de zéro, on considère $\gamma$ comme une quantité constante, et l'on prend $P\gamma(\beta-\alpha)$ pour la variation de chaleur de A qui répond à la variation $\beta-\alpha$ de sa tempéra-

(*) *Traité de Mécanique*, tome I^er, page 176.

ture, pourvu que son état solide, liquide ou gazeux n'ait pas changé.

L'hypothèse du n° 1, suivant laquelle la quantité inconnue de chaleur renfermée dans un corps est inépuisable, exige que la quantité $\gamma$ décroisse avec la température, du moins quand $u$ a de très grandes valeurs négatives, et que ce décroissement soit tel que $\int_{\alpha}^{\mathcal{C}} \gamma du$ ait une valeur finie à la limite $\mathcal{C} = -\infty$, de telle sorte que le produit de cette intégrale et de P soit moindre, abstraction faite du signe, que la quantité de chaleur qui fait partie de A, quand $u = \alpha$.

(6). Une observation que l'on a souvent l'occasion de répéter, fait voir que les corps incandescens, et même ceux dont la température est très élevée, sans qu'ils soient cependant devenus lumineux, émettent continuellement de la chaleur qui se propage en ligne droite dans l'air environnant. On s'est aussi assuré que quand cette chaleur émise par un corps vient tomber sur un autre, elle est en partie absorbée par celui-ci, et en partie réfléchie à sa surface sous un angle égal à celui de l'incidence, comme dans la réflexion de la lumière.

Cette chaleur en mouvement est proprement ce qu'on appelle la *chaleur rayonnante*. La vitesse de sa propagation nous est inconnue; nous savons seulement qu'elle est extrêmement grande, et peut être comparée à celle des rayons lumineux. Dans le vide, son intensité varierait, comme celle de toutes les émanations, en raison inverse du carré de la distance au point de départ; dans l'air et dans les gaz, elle décroît un peu plus rapidement, à cause de la petite absorption qu'elle éprouve, et qui est d'autant plus faible, pour un même fluide, qu'il a été plus raréfié.

Le corps qui absorbe la chaleur rayonnante s'échauffe de plus en plus; celui qui l'émet se refroidit graduellement; et ces effets subsistent jusqu'à ce que les températures de ces deux corps soient devenues égales. Mais l'émission de la chaleur par un corps ne peut être attribuée qu'à un mode quelconque d'action de ce corps sur lui-même, et nullement à l'action d'un autre corps éloigné, sur lequel cette chaleur peut ensuite aller tomber. Pour un même corps, et pour un même état de sa surface, la production de la chaleur rayonnante ne doit donc dépendre que de sa propre température. Ainsi, il y a lieu de croire que le rayonnement de la chaleur existe, avec une

intensité plus ou moins grande, à toutes les températures; qu'il est réciproque entre les différens corps; et qu'il subsiste encore lorsque les températures sont égales, quoiqu'il n'y ait alors ni échauffement, ni refroidissement.

Si l'on considère, en outre, que les plus petits corps émettent et absorbent de la chaleur rayonnante, on sera conduit à penser que cette double faculté appartient à leurs molécules mêmes, et que le rayonnement a lieu dans l'intérieur des solides et des liquides, où il ne diffère de celui que l'on observe à travers l'air et les gaz, qu'à raison d'une absorption beaucoup plus rapide.

De plus, l'air et les gaz absorbant la chaleur rayonnante, à la vérité en très petite proportion, soit à cause de leur nature, soit à raison de leur petite densité, l'analogie porte à supposer que leurs molécules émettent la chaleur rayonnante, aussi bien que celles des corps solides et des liquides.

C'est ainsi que l'on a été conduit à considérer les molécules de tous les corps comme des foyers de chaleur rayonnante. Cette chaleur émise en tous sens par chaque molécule, se propage à travers les *pores* ou espaces vides de matière pondérable, jusqu'à ce qu'elle ait été absorbée en entier par d'autres molécules qu'elle vient à rencontrer; ce qui a lieu à des distances généralement très petites, dans les corps solides et dans les liquides, et, au contraire, à de très grandes distances dans les différens gaz.

(7). La théorie mathématique de la chaleur est fondée sur cette hypothèse générale d'un *rayonnement moléculaire*, considéré, qu'elle qu'en soit la cause, comme une déduction de l'expérience et de l'analogie.

Nous admettrons donc, dans la suite de cet ouvrage, que toutes les parties matérielles des corps, aussi petites que l'on voudra, émettent et absorbent continuellement de la chaleur. Nous supposerons aussi que l'émission a lieu également et sans interruption, dans tous les sens autour de chaque partie prise dans l'intérieur d'un corps, ou située à sa surface. Il en résultera des échanges continuels de chaleur entre les parties très voisines d'un même corps solide ou liquide, ou bien entre les parties de deux corps différens, très rapprochées de leurs surfaces. Le problème consistera à déterminer les variations de

température produites par ces échanges, et à en conclure les lois de la communication de la chaleur, à distance entre des corps différens, et de proche en proche dans l'intérieur d'un même corps.

Les parties des corps dont il s'agit dans cet énoncé sont des portions de matière, telles que la partie $m$ du corps A, dont toutes les dimensions sont insensibles, et qui contiennent néanmoins des nombres immenses de molécules. C'est toujours là ce que nous entendrons dorénavant par des parties matérielles de grandeur *insensible*. L'échange de chaleur entre $m$ et une autre partie semblable $m'$, résultera de l'émission et de l'absorption par toutes leurs molécules. Mais si l'on considérait isolément une molécule de $m$ et une molécule de $m'$, cet échange ne présenterait rien de régulier que l'on pût soumettre au calcul : à certains intervalles de temps, la molécule de $m$ pourrait ne pas émettre de chaleur vers la molécule de $m'$, ou celle-ci ne rien envoyer à la première ; le contraire aurait lieu à d'autres époques. A un même instant, les échanges de chaleur pourraient être très différens entre la molécule qui répond au point M et les molécules situées, dans diverses directions, à égales distances du point M ; et enfin ces échanges varieraient aussi sans aucune régularité, en passant de ce point M à un autre point situé à une distance insensible de M. Les nombres extrêmement grands de molécules dont sont composées les parties matérielles, telles que $m$ et $m'$, produisent, sous tous ces rapports, la régularité indispensable dans les échanges de chaleur, pour que l'on puisse calculer les variations de température qui en résultent, et exprimer la température correspondante à un point quelconque M, en fonction de ses trois coordonnées et du temps $t$ ; ce qui est l'objet général du problème que nous aurons à résoudre.

(8). D'après cette considération, la nature de $m$ et sa température étant données, nous pourrons regarder la quantité totale de chaleur émise en tous sens par cette partie matérielle, dans un temps aussi donné, comme proportionnelle à sa masse $m$ et à ce temps. En désignant donc par $\Pi$ la quantité de chaleur qui serait émise, pendant l'unité de temps, par une masse prise pour unité, de la même matière que $m$, et ayant une température constante, égale à la température $u$ de $m$ au bout du temps $t$, nous pourrons représenter par

$\Pi m dt$, la quantité de chaleur émise par $m$ pendant l'instant $dt$. La quantité $\Pi$ dépendra de $u$ et de la matière de $m$; elle décroîtra avec la température; et quoique nous ayons supposé inépuisable la chaleur contenue dans chaque partie matérielle, il ne s'ensuit pas que la faculté d'émettre la chaleur soit indéfinie, et qu'il n'y aït point une valeur négative de $u$ assez grande pour rendre la quantité $\Pi$ nulle ou tout-à-faît insensible. A cette température, si elle existe, la chaleur qui restera encore dans l'intérieur d'un corps ne sera plus employée, comme la chaleur latente, qu'à balancer l'attraction mutuelle de ses molécules, et à les maintenir aux distances où elles seront alors les unes des autres. Une compression suffisante, exercée à la surface, pourra encore faire sortir une partie de cette chaleur sous forme rayonnante.

La chaleur émise par $m$ pendant un temps $\tau$ quelconque, aura pour expression $m\int_0^\tau \Pi dt$; mais cette quantité absolue de chaleur restera toujours inconnue; aucun phénomène ne pourrait la faire connaître, soit pour une partie $m$ de A, soit pour ce corps entier : l'expérience et le calcul ne déterminent jamais que des différences entre les quantités de chaleur émises et absorbées par un corps pendant un même temps. Ainsi, lorsque toute la chaleur émise par A, pendant un certain temps, tombe sur une masse de glace, et est employée à en fondre une partie, la quantité de glace fondue est seulement la mesure de l'excès de la chaleur émanée de A sur celle qui est absorbée par ce corps pendant le même temps, et qui lui est envoyée par la glace fondante.

(9). C'est encore à raison du nombre extrêmement grand de molécules dont la partie $m$ est formée, que nous pourrons supposer, comme nous l'avons dit plus haut, l'émission égale en tous sens autour de M, et la même que si cette partie $m$ était isolée. Cela étant, si nous décrivons du point M comme centre et d'un rayon quelconque $r$, une surface sphérique, et si nous n'avons point égard à l'absorption qui aura lieu autour de M, cette surface recevra en entier la chaleur $\Pi m dt$ émise par $m$, qui se partagera entre ses parties, proportionnellement à leur étendue. Dans cet ouvrage, le rapport de la circonférence au diamètre sera toujours représenté par

la lettre $\pi$; la surface sphérique entière sera donc égale à $4\pi r^2$, et la portion de $\Pi m dt$ qui atteindra et traversera une partie $s$ de cette surface, aura pour expression $\frac{s\Pi m dt}{4\pi r^2}$.

Cette partie $s$ pourra être aussi petite que l'on voudra; mais si elle est de grandeur insensible, il faudra toujours que ses dimensions répondent, comme celles de $m$, à des nombres extrêmement grands de molécules. Pour abréger, nous appellerons alors $s$ ou généralement une semblable partie insensible d'une surface quelconque, un *élément* de cette surface. Si $s$ et un élément $\omega$ d'une autre surface ont un point commun O (fig. 1re), que la normale ON à cette seconde surface et le rayon OM de la surface sphérique fassent un angle aigu $\theta$, et que ces deux élémens $s$ et $\omega$ soient compris dans un même cône ayant son sommet au point M, on aura sensiblement

$$\omega \cos \theta = s,$$

comme si ces élémens étaient infiniment petits, pourvu toutefois que les rayons de courbure des deux surfaces au point O ne soient pas de grandeur insensible, comme les dimensions de $\omega$ et de $s$. De plus, ce sera la même portion de chaleur émanée de $m$, qui traversera les deux élémens; par conséquent, la quantité de chaleur émise par $m$ pendant l'instant $dt$, et qui atteindra, à la distance $r$, l'élément $\omega$ d'une surface quelconque, abstraction faite de l'absorption intermédiaire, s'exprimera généralement par

$$\frac{\omega \cos \theta}{4\pi r^2} \Pi m dt.$$

Ayant décrit deux surfaces sphériques et concentriques, qui ont pour rayons $r$ et l'unité, si l'on représente par $s$ et $4\pi\sigma$ les portions de ces surfaces, interceptées par un même cône qui a son sommet à leur centre commun, on aura

$$\sigma = \frac{s}{4\pi r^2}.$$

Ce rapport est une fonction indépendante de l'unité linéaire que l'on appellera l'*ouverture* du cône. S'il s'agit du cône extrêmement aigu, circonscrit à l'élément $\omega$, et qui a son sommet au point M, la fraction

$\sigma$ aura une grandeur finie, mais insensible. On aura alors

$$\sigma = \frac{\omega \cos \theta}{4\pi r^2};$$

et la quantité de chaleur précédente pourra s'exprimer par $\sigma \Pi m dt$, dans toute la longueur du cône.

(10) Maintenant, si nous avons égard à l'absorption de la chaleur dans l'intérieur du corps A, cette portion de chaleur $\sigma \Pi m dt$ émanée de $m$ pendant l'instant $dt$, suivant une direction donnée, sera réduite, à la distance $r$ de $m$, dans un rapport de $p$ à l'unité, et deviendra $p \sigma \Pi m dt$; le coefficient $p$ étant une fonction de $r$ qu'il s'agira de déterminer et qui sera égale à l'unité pour $r = 0$.

Pour cela, du point M de ce corps, je décris deux surfaces sphériques dont les rayons seront $r$ et $r + \eta$. Soient $s$ et $s'$ les élémens de ces surfaces, interceptés par le cône extrêmement aigu qui a son sommet au point M et $\sigma$ pour ouverture; nous aurons

$$\frac{s'}{4\pi(r + \eta)^2} = \frac{s}{4\pi r^2} = \sigma.$$

Supposons que $p$ devienne $p'$ quand on y met $r + \eta$ à la place de $r$; la fraction de la quantité de chaleur $\sigma \Pi m dt$ qui tombe sur l'élément $s$ étant $p \sigma \Pi m dt$, celle qui atteindra l'élément $s'$ sera de même $p' \sigma \Pi m dt$, et conséquemment la chaleur absorbée en allant de $s$ à $s'$ aura pour valeur $(p - p') \sigma \Pi m dt$. Or, si nous supposons que $\eta$ soit d'une grandeur insensible, mais qui réponde néanmoins, comme chacune des dimensions de $s$, à un nombre extrêmement grand de molécules, nous pourrons admettre que cette chaleur absorbée est proportionnelle à la chaleur incidente $p \sigma \Pi m dt$ sur l'élément $s$, à l'épaisseur $\eta$ de la matière absorbante, et à sa densité, que nous représenterons par $\rho'$. Dans ces hypothèses, les plus simples et les plus naturelles que l'on puisse faire sur l'absorption de la chaleur, la portion de chaleur absorbée en allant de $s$ à $s'$, aura donc aussi pour expression le produit $q' \rho' \eta p \sigma \Pi m dt$, dans lequel $q'$ est un coefficient qui pourra varier avec la matière absorbante et avec la température. En égalant cette seconde valeur à la première, et supprimant le facteur commun $\sigma \Pi m dt$, il en résultera

$$p - p' = q' \rho' \eta p;$$

mais on a, par le théorème de Taylor,

$$p' - p = \frac{dp}{dr}\eta + \frac{1}{2}\frac{d^2p}{dr^2}\eta^2 + \text{etc.};$$

et quoique les coefficiens de cette série soient très divergens, puisque $p$ est une fonction qui varie très rapidement avec $r$, on peut cependant prendre l'accroissement $\eta$ de $r$ assez petit pour que la série soit toujours très convergente, et qu'il suffise de conserver son premier terme; ce qui changera l'équation précédente en celle-ci :

$$\frac{dp}{dr} = -q'\rho'p. \qquad (1)$$

Ce sera cette équation différentielle qu'il faudra intégrer pour obtenir la valeur demandée de $p$; on déterminera la constante arbitraire qui sera contenue dans l'intégrale, de manière qu'on ait $p=1$ quand $r=0$.

(11). Afin de rapporter toutes les quantités au point M du corps A que l'on considère, je désignerai par $\rho$ et $q$ ce que deviennent $\rho'$ et $q'$ en ce point, ou quand $r=0$. La quantité $q$ sera alors la mesure du *pouvoir absorbant* de la matière de $m$, à la température $u$; la quantité $\Pi$ est déjà la mesure de son *pouvoir émissif* à la même température, rapportée aussi à l'unité de masse. La densité de A qui répond au point M sera la quantité $\rho$, c'est-à-dire que $\rho$ exprimera, quelle que soit la distribution régulière ou irrégulière des molécules dont $m$ se compose, la somme de ces molécules, ou la masse $m$, divisée par le volume de cette même partie matérielle (*). Pour l'homogénéité des quantités, il faut observer que si l'on fait

$$q\rho = \frac{1}{\epsilon},$$

$\epsilon$ sera une ligne; ce qui résulte de ce qu'à la distance $r$ de $m$, le produit de $q'\rho'$ et de la ligne $\eta$ devait être un nombre abstrait.

Si A est un corps homogène, de nature quelconque, solide, li-

(*) *Traité de Mécanique*, tome Ier, page 176.

quide, aériforme, et que sa température soit partout la même, les quantités $q'$ et $\rho'$ seront constantes et égales à $q$ et $\rho$; on aura $q'\rho' = \frac{1}{\epsilon}$, et l'on tirera de l'équation (1),

$$p = e^{-\frac{r}{\epsilon}};$$

$e$ étant la base des logarithmes népériens.

La portion de chaleur émanée de $m$, qui atteindra à chaque instant l'élément $s$ perpendiculaire au rayon $r$, sera alors

$$\frac{s\Pi m dt}{4\pi r^2} e^{-\frac{r}{\epsilon}}.$$

Si donc la grandeur de cet élément est constante, il recevra la même quantité de chaleur à distance égale de M, dans toutes les directions autour de ce point; et à distances inégales, cette quantité variera en raison inverse du carré de $r$ et en raison directe de l'exponentielle $e^{-\frac{r}{\epsilon}}$. Le produit $\frac{1}{r^2}e^{-\frac{r}{\epsilon}}$ exprimera donc le décroissement d'intensité de la chaleur rayonnante, autour de chaque point M de A. Cette loi comprend le cas du vide, en supposant nulle la densité $\rho$, et faisant $\epsilon = \infty$; ce qui donne, à cette limite, une variation d'intensité en raison inverse du carré de la distance au point d'où la chaleur est partie. Dans l'air ou dans un gaz quelconque, le produit $q\rho$ sera très petit, et la ligne $\epsilon$ très grande, soit à raison de la densité $\rho$, soit à raison du pouvoir absorbant, ou de la quantité $q$, dont la valeur devrait être déterminée par l'expérience pour chaque gaz en particulier et pour chaque degré de température. Le décroissement d'intensité qui en résultera sera un peu plus rapide que dans le vide. L'observation a fait voir que la chaleur solaire traverse l'air avec plus de facilité que celle qui émane d'un corps non lumineux; par conséquent, toutes choses d'ailleurs égales, c'est-à-dire, pour la même densité et la même température de l'air, la valeur de $\epsilon$ sera différente dans le cas de la chaleur solaire et dans celui de la chaleur obscure, et plus grande dans le premier cas que dans le second.

Pour que le décroissement d'intensité, ou seulement l'absorption de la chaleur, soit très rapide dans les solides et dans les liquides, il faudra que $\varepsilon$ y soit une ligne très petite; ce qui rendra aussi très petite la distance à laquelle le rayonnement intérieur sera sensible autour de chaque point. Mais il ne faut pas confondre cette distance avec le rayon d'activité des forces moléculaires, répulsives et attractives, provenant du calorique propre à chaque molécule et de sa matière pondérable; les fonctions inconnues qui expriment les lois de leurs intensités à différentes distances, décroissent sans doute plus rapidement qu'une exponentielle : on suppose leur rayon d'activité tout-à-fait insensible, tandis que l'étendue du rayonnement intérieur est seulement très petite, et a quelquefois une influence sur les phénomènes, qui la rend sensible et mesurable, ainsi qu'on le verra par la suite.

(12). Lorsque la température variera d'un point à un autre de A, et sa matière, si ce corps est hétérogène, le produit $q'\rho'$ sera une fonction de $r$ qui ne nous est pas donnée, de sorte que l'on ne pourra plus tirer de l'équation (1) la valeur de $p$; mais on pourra toujours vérifier que la quantité de chaleur $\sigma\Pi m dt$, émanée de $m$, et qui se propage, suivant chaque direction, dans un cône dont $\sigma$ est l'ouverture, sera entièrement absorbée à la distance de $m$ où s'étend le rayonnement intérieur. En effet, la portion de cette chaleur absorbée par la tranche normale et extrêmement mince du cône, située à la distance $r$ de $m$, et qui a $\eta$ pour épaisseur, est $q'\rho'\eta p\sigma\Pi m dt$; la totalité de la chaleur absorbée dans une longueur quelconque $l$ de ce cône, sera donc égale au produit de $\sigma\Pi m dt$ et de la somme des valeurs de $q'\rho'\eta p$ relatives à toutes les tranches de cette partie du cône; laquelle somme pourra être remplacée par l'intégrale $\int_0^l q'\rho' p dr$, si la longueur $l$ est comptée à partir du sommet. Or, en vertu de l'équation (1), et en observant que l'on a $p = 1$ quand $r = 0$, cette intégrale a pour valeur $1 - \lambda$, en désignant par $\lambda$ la valeur de $p$ qui répond à $r = l$. Si donc $l$ est l'étendue sensible du rayonnement intérieur, et que l'on ait, en conséquence, $\lambda = 0$, la chaleur absorbée dans cette longueur totale $l$ sera égale à toute la chaleur émise $\sigma\Pi m dt$; ce qu'il s'agissait de vérifier.

On peut aussi démontrer que la chaleur absorbée par toutes les tranches d'une partie quelconque du cône que nous considérons, est indépendante de l'ordre dans lequel elles se succèdent; l'absorption étant toujours supposée, pour chaque tranche, proportionnelle à la quantité de chaleur incidente. En effet, soit $n$ le nombre de ces tranches normales; appelons $\varpi$ la quantité de chaleur émanée de $m$, en un temps donné, qui tombe sur la tranche la plus voisine de cette partie de A, et désignons par $\varpi k_1$ la portion de $\varpi$ qui sera absorbée par cette première tranche : la chaleur incidente sur la seconde sera réduite à $\varpi(1-k_1)$. En désignant par $k_2$ ce que $k_1$ devient relativement à celle-ci, la chaleur qu'elle absorbe, et par suite la chaleur incidente sur la troisième tranche, auront pour valeurs $\varpi(1-k_1)k_2$ et $\varpi(1-k_1)(1-k_2)$. En continuant ainsi, et désignant par $k_3$, $k_4$,... $k_n$, ce que devient $k_1$ relativement à la troisième, à la quatrième,... à la $n^{ième}$ tranche, la quantité de chaleur qui sortira de cette dernière aura pour expression

$$\varpi(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3).....(1-k_n);$$

en sorte que la chaleur sera diminuée par l'absorption à travers ces $n$ tranches successives, dans le rapport du produit des $n$ facteurs $1-k_1$, $1-k_2$, $1-k_3$,..... $1-k_n$, à l'unité. Or, dans l'hypothèse que l'on vient de rappeler, chacune des fractions $k_1$, $k_2$, $k_3$,.... $k_n$, est indépendante de toutes les autres, aussi bien que de la quantité $\varpi$ : la diminution totale de chaleur sera donc aussi indépendante de l'ordre des $n$ tranches, dont le changement ne ferait qu'intervertir l'ordre des facteurs précédens, sans en changer les valeurs.

(13). Il suit de là que dans l'échange de chaleur entre deux parties $m$ et $m'$ de A, si la chaleur envoyée par $m$ à $m'$ est diminuée par l'absorption intermédiaire, dans le rapport de $p$ à l'unité, la chaleur envoyée par $m'$ à $m$ sera aussi diminuée dans le même rapport.

Dans le cône dont le sommet est M et l'ouverture $\sigma$, je prends pour la partie $m'$ la tranche normale et extrêmement mince, située à la distance $r$ de ce sommet, et qui a $\eta$ pour épaisseur. La

section du cône étant $s$ à cette distance, le volume de cette tranche sera à très peu près $\eta s$; et si l'on représente toujours par $\rho'$ sa densité, on aura $m' = \rho'\eta s$. La quantité de chaleur émanée de $m$ pendant l'instant $dt$, et absorbée par cette même tranche $m'$, qui a pour expression $\frac{pq'\rho'\eta s}{4\pi r^2}\Pi m dt$, d'après ce qui précède, deviendra donc

$$\frac{pq'mm'}{4\pi r^2}\Pi dt.$$

Réciproquement, la quantité de chaleur émanée de $m'$, et absorbée par $m$, sera

$$\frac{pqm'm}{4\pi r^2}\Pi' dt,$$

en désignant par $\Pi' m' dt$ la quantité de chaleur émise en tous sens par $m'$ pendant l'instant $dt$, et $q$ étant, comme plus haut, la mesure du pouvoir absorbant de $m$. Par conséquent, si l'on représente par $\delta$ la diminution de chaleur de $m$ provenant de l'échange entre $m$ et $m'$, on aura, en retranchant la dernière quantité de la précédente,

$$\delta = \frac{pmm'}{4\pi r^2}(q'\Pi - q\Pi')dt. \qquad (2)$$

Quelles que soient les matières des parties $m$ et $m'$, de grandeur insensible, si leurs températures sont égales, il faudra que $\delta$ soit zéro, afin que cette égalité ne soit point troublée, de même qu'elle ne l'est pas entre des corps de grandeur quelconque (n° 6). Il faudra donc qu'on ait, dans ce cas,

$$q'\Pi = q\Pi',$$

c'est-à-dire qu'à égalité de température les quantités de chaleur $\Pi$ et $\Pi'$, qui mesurent les pouvoirs émissifs de $m$ et $m'$, rapportées à l'unité de masse, doivent être entre elles comme les quantités $q$ et $q'$, qui mesurent leurs pouvoirs absorbans. Il en résulte aussi que, pour chaque partie matérielle, le rapport de l'une de ces mesures à l'autre est indépendant de la matière et de la densité; en

sorte que pour la partie $m$ on aura

$$\Pi = qFu; \qquad (3)$$

$Fu$ étant une fonction de la température $u$, qui sera toujours la même, quel que soit le corps A, solide, liquide ou gazeux, auquel $m$ appartient. Nous donnerons dans le chapitre suivant la forme de cette fonction, déduite de l'observation.

# CHAPITRE II.

## *Lois de la chaleur rayonnante.*

(14). Soit O (fig. 2) un point de la surface d'un corps solide ou liquide que j'appellerai toujours A. Par le point O, menons en dehors de A une normale ON, une première droite OI, puis une seconde droite OI′ comprise dans le plan de ON et OI. Supposons les angles NOI et NOI′ égaux, et désignons-les par $i$, de sorte qu'on ait

$$NOI = NOI' = i.$$

Désignons aussi par $\mu$ une partie d'un autre corps, de grandeur insensible, selon la définition du n° 7. Soit $\omega$ un élément de la surface de A, tel qu'il a aussi été défini dans le n° 9, et comprenant le point O. Représentons par $\varpi$ la quantité de chaleur émanée de $\mu$ et tombée sur $\omega$ pendant un temps quelconque. Cette chaleur se composera d'un nombre immense de séries de molécules calorifiques, partant de toutes les molécules de $\mu$ et aboutissant à $\omega$ ; mais elles seront toutes contenues dans un filet extrêmement mince ; et si IO est la direction de l'une de ces séries incidentes, les directions de toutes les autres ne s'écarteront pas sensiblement de IO, en supposant, toutefois, $\mu$ à une distance sensible de $\omega$, c'est-à-dire, à une distance extrêmement grande par rapport aux dimensions de $\mu$ et de $\omega$. Une portion de la série incidente suivant IO sera réfléchie suivant OI′ ; les directions des autres séries réfléchies s'écarteront très peu de OI′. Deux séries incidentes parallèles seront encore parallèles après la réflexion, si la surface de $\omega$ est plane ; elles convergeront ou divergeront, si cette surface est concave ou convexe ; mais, dans tous les cas, le filet de chaleur réfléchi sera extrêmement mince, du moins à une distance de $\omega$ qui ne sera pas devenue

extrêmement grande. Nous ne nous occuperons pas de la forme de ce filet, mais seulement de la quantité de chaleur dont il sera composé.

Les séries de molécules calorifiques dont $\varpi$ est la somme ne sont sans doute pas toutes égales, et il est possible qu'elles ne se réfléchissent pas toutes exactement dans la même proportion; mais, à cause de leur nombre immense, on peut supposer que la quantité totale de chaleur réfléchie est proportionnelle, toutes choses d'ailleurs égales, à la quantité totale de chaleur incidente. On désignera donc par $f\varpi$ la première de ces deux quantités; $f$ étant une fraction indépendante de $\varpi$, qui pourra varier sur un même élément de surface avec l'angle d'incidence $i$.

(15). La chaleur rayonnante qui émane d'un corps incandescent, ou seulement d'un corps dont la température est très élevée, a des propriétés qui la distinguent de la chaleur émanée d'un autre corps et qui sont peut-être dues à la vitesse dont elle est animée. Nous avons déjà dit (n° 10) que la chaleur solaire et celle qui provient d'un corps obscur traversent l'air en des proportions différentes. En général, deux quantités de chaleur rayonnante qui produisent sur nous la même sensation, qui fondraient la même quantité de glace, ou élèveraient la température d'un corps d'un même nombre de degrés, et que nous appelons *égales*, ne sont cependant pas identiques, lorsque l'une a été émise par un corps très chaud et l'autre par un corps dont la température n'est pas très-élevée. La première traverse le verre dans de grandes épaisseurs, sous la forme rayonnante. De Laroche a trouvé que quand elle a déjà traversé une première lame de verre, elle en traverse plus facilement une seconde. Elle peut aussi traverser d'autres corps, diaphanes ou non diaphanes; et sur ce point de physique, on peut consulter un excellent mémoire de M. Melloni (*).

Cette chaleur rayonnante provenant d'un corps dont la température est très élevée, peut être *polarisée* comme la lumière, par la réflexion sous un angle convenable. Par conséquent, si la partie matérielle $\mu$ qui a émis la quantité $\varpi$ de chaleur, appartient à un corps dont la température soit très élevée, et si cette chaleur, avant de tomber sur l'élé-

(*) *Annales de Physique et de Chimie*, tome LIII, année 1833.

ment $\omega$ de la surface de A, a été polarisée par sa réflexion sur une autre surface, elle se réfléchira sur $\omega$ et sous un même angle d'incidence $i$, en des proportions inégales dans différens plans, passant par la normale ON. Sa réflexion pourra être nulle dans un de ces plans, et totale dans un autre; et, dans ce cas, la fraction $f$ sera une fonction de l'angle $i$, et de celui que fait le plan des droites ON et OI avec un plan fixe mené par la première.

On n'aura point égard, dans cet ouvrage, à ces propriétés exceptionnelles de la chaleur, qui la rapprochent de la lumière à quelques égards, et qui l'en éloignent sous le rapport de la transmission à travers des corps non diaphanes. En considérant la réflexion de la chaleur sur un élément de surface, nous supposerons toujours que tout est semblable autour de la normale, et que la proportion de chaleur réfléchie est simplement une fonction de l'angle d'incidence, dont la forme devra être déterminée par l'expérience.

(16). Lorsqu'un corps est soumis à une température extérieure plus basse que la sienne d'un certain nombre de degrés, et ensuite à une température supérieure à la sienne du même nombre de degrés, l'expérience montre qu'il emploie le même temps, soit à s'abaisser, soit à s'élever à cette température extérieure, et que la loi de son refroidissement dans le premier cas, est la même que celle de son échauffement dans le second. Or, on conclut de là que la surface de ce corps est également perméable, toutes choses d'ailleurs égales, à la chaleur extérieure qui la traverse du dehors en dedans, et à la chaleur intérieure qui la traverse en sens contraire, ou du dedans au dehors. De plus, si l'effet du passage d'un milieu dans un autre est le même en deux sens opposés, quant à la proportion de la chaleur que la surface de séparation laisse passer, il est naturel de croire qu'il est aussi le même quant à sa direction. On peut donc supposer que la chaleur qui traverse la surface d'un corps n'éprouve aucun changement dans sa direction; car, si elle subissait une sorte de réfraction analogue à celle de la lumière, et que, par exemple, elle se rapprochât de la normale ON en passant du dehors en dedans du corps A, elle s'en éloignerait en passant du dedans en dehors; en sorte que la chaleur éprouverait, dans les deux cas, des effets contraires, eu égard à sa direction.

Cela étant, soient M un point de A, situé sur le prolongement de

IO à une très petite distance du point O, et $m$ une partie de A, de grandeur insensible et comprenant le point M. Soit aussi ON' le prolongement de ON, de sorte qu'on ait

$$\text{MON}' = \text{ION} = i.$$

Si $m$ envoie à l'élément $\omega$, dans un temps quelconque, une quantité $p$ de chaleur, la portion de $p$ que $\omega$ réfléchira dans l'intérieur de A, sera $fp$; le coefficient $f$ étant le même que pour la réflexion de la chaleur tombée du dehors sur $\omega$ et sous l'incidence $i$. En outre, l'autre portion $(1 - f)p$ de la chaleur intérieure, qui traversera $\omega$, conservera au dehors la direction indiquée par le prolongement OI de MO; la même chose aura lieu pour la portion $(1 - f)\varpi$ de chaleur émanée de $\mu$, et qui pénétrera dans l'intérieur de A à travers $\omega$: l'échange de chaleur entre ces deux parties matérielles $m$ et $\mu$ se fera en ligne droite à travers cet élément $\omega$.

L'hypothèse de l'égale proportion de la chaleur qui traverse les surfaces en deux sens opposés, établit entre cette substance impondérable et la lumière une différence essentielle. Elle ne serait point admissible à l'égard de la chaleur polarisée, dont nous ne devons pas nous occuper. Ce sera une des données de la question, qui serviront de base à nos calculs. Nous admettrons aussi l'hypothèse de la non réfrangibilité de la chaleur, qui paraît liée à la première, et qui sera propre à simplifier les raisonnemens; mais on pourra toujours s'assurer que les résultats auxquels nous parviendrons seront indépendans de cette seconde supposition.

(17). Plaçons actuellement le corps A dans une enceinte fermée de toutes parts (fig. 3), vide d'air, et dont tous les points ont une même température, rendue invariable par un moyen quelconque. Représentons par $\zeta$ cette température constante. Si A a d'abord, dans toute son étendue, la température $\zeta$, il la conservera aussi constamment; dans le cas contraire, la température variera d'un point à un autre, et avec le temps, jusqu'à ce qu'elle soit devenue partout égale à $\zeta$. Dans le premier cas, chaque élément de la surface de A sera traversé en un temps quelconque par des quantités égales de chaleur, de dehors en dedans et de dedans en dehors; dans le second cas, les quantités de chaleur extérieure et intérieure qui traverseront un même élément

seront inégales et variables d'un instant à l'autre. Nous appellerons *flux de chaleur* l'excès de la chaleur intérieure sur la chaleur extérieure, qui traverse à chaque instant un même élément de surface, et qui pourra être positif ou négatif. Au bout d'un temps $t$ quelconque, le flux de chaleur, pendant l'instant $dt$ et à travers l'élément $\omega$ de la surface de A qui répond au point O, pourra être représenté par $\Gamma\omega dt$; le coefficient $\Gamma$ étant le flux de chaleur qui aurait lieu pendant l'unité de temps, à travers une portion de la surface de A, aussi égale à l'unité, si la température de ce corps demeurait la même qu'au bout du temps $t$, et que la perméabilité calorifique de cette unité de surface fût partout la même que pour l'élément $\omega$.

Pour l'homogénéité des quantités dans les formules où $\Gamma$ entrera, on remarquera qu'abstraction faite du signe, $\Gamma$ est une quantité de chaleur divisée par un temps et par une surface.

(18). Soient toujours M un point de A voisin de la surface, et $m$ une partie matérielle, de grandeur insensible, comprenant le point M; abaissons de ce point une perpendiculaire ME sur la surface de A, et qui la rencontre en E; faisons $\text{ME} = x$, et indiquons, au bout du temps $t$, par $\xi$ la température de $m$. Pour que toute la chaleur émise par cette partie matérielle ne soit pas absorbée par les parties environnantes de A, il faudra que la profondeur $x$ de $m$ au-dessus de la surface, soit très petite. Il en sera de même pour que la partie $m$ puisse être atteinte par une portion de la chaleur venue du dehors, et qui pénétrera dans A. Par conséquent, si l'on prolonge ME, d'une quantité convenable jusqu'en F, on aura l'épaisseur EF d'une couche superficielle extrêmement mince, d'où émanera toute la chaleur qui traversera la surface de A, du dedans en dehors, et où sera absorbée toute celle qui traversera la même surface, du dehors en dedans. Je désignerai par $e$ cette petite épaisseur EF, qui sera toujours incomparablement plus grande que les dimensions des parties matérielles, telles que $m$, et des élémens de surface, tels que $\omega$. Observons aussi que la couche superficielle dont nous parlons est distincte de celle qui termine tous les corps, et dans laquelle la densité varie très rapidement de la face interne à la face externe (*). L'épaisseur de celle-ci est tout-à-fait in-

(*) *Nouvelle théorie de l'Action capillaire*, page 6.

sensible, comme le rayon d'activité des forces moléculaires, et négligeable par rapport à l'épaisseur $e$. C'est vraisemblablement dans cette partie extrême de la couche superficielle que se passe le phénomène de la réflexion d'une partie de la chaleur incidente, extérieure ou intérieure.

Dans l'intérieur de A, à une profondeur plus grande que $e$, la température est indépendante, comme on le verra par la suite, de la loi de l'absorption de la chaleur, et varie très peu entre des points très rapprochés l'un de l'autre. Il n'en est pas de même dans l'épaisseur $e$ de la couche superficielle; la température $\xi$ de $m$ varie très rapidement avec la profondeur $x$, et a généralement des valeurs très différentes aux deux limites de cette couche, c'est-à-dire, pour $x = 0$ et pour $x = e$; son expression dépend de la loi de l'absorption, renfermée dans l'équation (1) du n° 16, et dépendante elle-même de la loi des températures. Ce serait un problème, au moins très difficile à résoudre, que de déterminer ces deux lois de l'absorption et des températures, ainsi liées l'une à l'autre. Sur une même normale EF, nous regarderons $\xi$ comme une fonction de $x$ et $t$, qui restera inconnue, mais qui se changera, à la profondeur $x = e$ et au delà, en une autre quantité que nous désignerons par $u$, dont les variations ne seront plus très rapides, et que l'on déterminera dans la suite.

Le point $M_1$ appartenant à la matière de l'enceinte et étant très voisin de sa surface interne, on mènera une perpendiculaire à cette surface qui la rencontre en $E_1$, puis on prolongera $E_1M_1$ jusqu'en $F_1$, de sorte que $E_1F_1$ soit l'épaisseur de la couche superficielle de l'enceinte, dans laquelle auront aussi lieu l'émission et l'absorption de la chaleur rayonnante; mais dans toute l'épaisseur de cette couche, comme à une plus grande profondeur, la température sera constante, par hypothèse, et égale à $\zeta$. Dans ce qui va suivre, je désignerai par $e_1$ cette petite épaisseur $E_1F_1$, j'appellerai $x_1$ la distance $M_1E_1$ du point $M_1$ à la surface interne de l'enceinte, et $m_1$ représentera une partie de la matière de l'enceinte, de grandeur insensible et comprenant le point $M_1$.

(19). Ayant tiré la droite $MM_1$ qui coupe en $O$ et $O_1$ les surfaces de A et de l'enceinte, j'élèverai, dans l'espace vide compris entre elles, et par les points O et $O_1$, les normales ON et $O_1N_1$ à ces surfaces.

Les angles EMO et $O_1ON$ seront sensiblement égaux, ainsi que les angles $E_1M_1O_1$ et $OO_1N_1$; je les désignerai par $\theta$ et $\theta_1$, de sorte qu'on ait

$$EMO = O_1ON = \theta, \quad E_1M_1O_1 = OO_1N_1 = \theta_1.$$

Je ferai, en outre,

$$MO = r, \quad M_1O_1 = r_1, \quad OO_1 = h;$$

et l'on aura aussi, à très peu près,

$$x = r\cos\theta, \quad x_1 = r_1\cos\theta_1.$$

Les distances $r$ et $r_1$ devront être respectivement moindres que $\varepsilon$ et $\varepsilon_1$, pour qu'un échange de chaleur puisse avoir lieu entre $m$ et $m_1$. Je supposerai que la distance $h$ soit, au contraire, très grande relativement aux épaisseurs $\varepsilon$ et $\varepsilon_1$, et je négligerai, dans les calculs suivans, $r$ et $r_1$ par rapport à $h$; j'exclurai, par conséquent, le cas où l'élément $\omega$ de la surface de A serait en contact avec l'enceinte, ou en serait très peu éloigné.

Cela posé, concevons deux cônes, dont l'un soit circonscrit à $m_1$ et ait son sommet au point M, et dont l'autre ait $M_1$ pour sommet et soit circonscrit à $m$. Appelons $\omega_1$ l'élément de la surface de l'enceinte qui sera intercepté par le premier cône, et qui comprendra le point $O_1$; et supposons que l'élément $\omega$ comprenant le point O soit celui qui sera intercepté par le second cône sur la surface de A. Vu la grandeur de $h$ par rapport à $r$ et $r_1$, on pourra prendre $\omega\cos\theta$ et $\omega_1\cos\theta_1$ pour les projections de $\omega$ et $\omega_1$, sur les plans passant par O et $O_1$, et perpendiculaires à $OO_1$. Si l'on prolonge les deux cônes à partir de $\omega$ et $\omega_1$ jusqu'aux limites des couches superficielles de A et de l'enceinte, et que l'on appelle T et $T_1$ ces prolongemens, on pourra aussi considérer, sans erreur sensible, T et $T_1$ comme des cylindres qui auront pour bases $\omega\cos\theta$ et $\omega_1\cos\theta_1$. Les échanges de chaleur entre chacune des parties de $T_1$, telles que $m_1$, et chacune des parties de T, telles que $m$, auront lieu à travers les élémens $\omega$ et $\omega_1$. Je représenterai par $Ddt$ la diminution de chaleur, positive ou négative, qui en résultera pour T pendant l'instant $dt$, et qui sera

une partie du flux de chaleur $\Gamma\omega dt$, dont nous allons d'abord nous occuper.

(20). Je désignerai par $Xmdt$ la quantité de chaleur émise en tous sens par $m$ pendant l'instant $dt$; le coefficient X étant une fonction de la température $\xi$ de $m$ au bout du temps $t$. Abstraction faite de l'absorption dans la couche superficielle de A, et de la réflexion intérieure qui aura lieu à sa surface, la portion de $Xmdt$ qui atteindrait $\omega_1$ serait $\frac{\omega_1 \cos\theta_1}{4\pi(h+r)^2}Xmdt$, d'après le n° 9, ou simplement $\frac{\omega_1 \cos\theta_1}{4\pi h^2}Xmdt$, en négligeant $r$ par rapport à $h$. En vertu de l'absorption qui aura lieu dans le trajet de $m$ à $\omega_1$, cette portion de chaleur se changera en une autre $\frac{\omega_1 \cos\theta_1}{4\pi h^2}Ymdt$, dans laquelle Y est un coefficient moindre que X. Cette quantité Y sera une fonction de $r$ qui deviendra nulle ou insensible pour toute valeur de $r$ plus grande que l'épaisseur $e$ de la couche superficielle; mais elle dépendra aussi de l'angle $\theta$, parce que X était fonction de $x$ ou de $r\cos\theta$, à cause de la température $\xi$, dont la variation par rapport à $x$ est très rapide et ne peut pas être négligée. En prenant pour $m$ une tranche de T extrêmement mince, perpendiculaire à la longueur de ce cylindre, et ayant, conséquemment, $\omega\cos\theta$ pour base, on pourra représenter par $Q\omega\cos\theta$ la somme des valeurs de $Ym$, étendue au cylindre entier, c'est-à-dire, prise depuis $r=0$ jusqu'à $r=e$, ou si l'on veut jusqu'à $r=\infty$, puisqu'au-delà de $r=e$, Y est zéro. Le coefficient Q dépendra encore de $\theta$; et la chaleur envoyée par T à $\omega_1$ aura pour valeur $\frac{\omega\omega_1 \cos\theta\cos\theta_1}{4\pi h^2}Qdt$, en faisant toujours abstraction de la réflexion intérieure qui a lieu sur l'élément $\omega$. Pour y avoir égard, je suppose que la chaleur qui traverse cet élément sous l'angle d'incidence $\theta$ soit une fraction $\alpha$ de la chaleur incidente. En multipliant la quantité précédente par $\alpha$, on aura la portion de chaleur qui atteindra l'élément $\omega_1$ sous l'angle d'incidence $\theta_1$; et si l'on représente enfin par $\alpha_1$ la fraction de cette chaleur incidente qui traversera $\omega_1$, on aura définitivement

$$\frac{\alpha\alpha_1\,\omega\omega_1\cos\theta\cos\theta_1}{4\pi h^2}\,Qdt,$$

pour la quantité de chaleur émanée de T pendant l'instant $dt$, à travers l'élément $\omega$, qui pénétrera la matière de l'enceinte, à travers l'élément $\omega_1$, et sera absorbée en entier par $T_1$.

On aura de même

$$\frac{\alpha\alpha_1\,\omega\omega_1\cos\theta\cos\theta_1}{4\pi h^2}\,Zdt,$$

pour la chaleur émise par $T_1$ pendant le même instant $dt$, à travers $\omega_1$, qui pénétrera dans A à travers $\omega$, et sera totalement absorbée par T. Mais ici le coefficient Z ne dépendra pas, comme Q, de l'angle d'incidence, parce que, par hypothèse, la température ne varie pas dans l'épaisseur de la couche superficielle de l'enceinte, de laquelle cette quantité de chaleur est émanée.

En retranchant cette dernière quantité de la précédente, on aura la valeur de $Ddt$; et en supprimant le facteur commun $dt$, il en résultera

$$D = \frac{\alpha\alpha_1\,\omega\omega_1\cos\theta\cos\theta_1}{4\pi h^2}(Q - Z). \qquad (1)$$

A cause que l'on a négligé les distances $r$ et $r_1$ par rapport à $h$, cette valeur de D est la même que si les quantités de chaleur qui ont traversé $\omega$ et $\omega_1$ fussent parties des points même de ces élémens; et, pour cette raison, la valeur de D serait encore la même si la chaleur éprouvait des changemens de direction en traversant $\omega$ ou $\omega_1$. En général, deux séries de molécules calorifiques, parties du point M, et qui s'écartent très peu l'une de l'autre à une distance de $\omega$, très grande par rapport à $r$, pourront diverger au-delà de cette distance, comme si elles fussent parties d'un autre point M' de A, ou même d'un autre point extérieur M', mais toujours situé à une distance $r'$ de O, très petite, comme la distance $r$ ou MO; de manière que si l'on néglige $r'$ comme on a négligé $r$, cette divergence sera la même que si O eût été le point de départ.

Nous ferons remarquer, pour l'homogénéité des quantités, que $Xmdt$, et par suite $Ymdt$, exprimant des quantités de chaleur,

$Q\omega \cos \theta dt$ en sera une aussi, et, conséquemment, Q sera une quantité de chaleur divisée par un temps et par une surface. Il en sera de même à l'égard de Z.

(21). Lorsque les élémens $\omega$ et $\omega_1$ sont entièrement perméables à la chaleur, ou dépourvus de toute réflexibilité, sous tous les angles d'incidence, on a $a = 1$ et $a_1 = 1$, quels que soient les angles $\theta$ et $\theta_1$. Dans ce cas, on admet, comme un résultat de l'expérience, que les quantités de chaleur émises à travers un même élément de surface, sous différentes directions, diminuent à mesure que ces directions s'écartent de la normale, et sont entre elles comme les cosinus des angles d'incidence. Cela résulte, en effet, de la formule (1), à l'égard de l'élément $\omega_1$ appartenant à la surface interne de l'enceinte, puisque, dans le cas de $a_1 = 1$, cette formule ne contient plus que le facteur $\cos \theta_1$ qui dépende de l'angle d'incidence $\theta_1$; mais il n'en est pas de même relativement à $\omega$, à cause que, dans le cas de $a = 1$, la formule (1) renferme encore, outre le facteur $\cos \theta$, la quantité Q qui peut dépendre de l'angle d'incidence $\theta$. Cette loi du *cosinus* n'est donc démontrée, *à priori*, que pour un corps dont la température est supposée invariable; pour un corps A qui s'échauffe ou se refroidit, elle ne me paraît pas entièrement hors de doute. Il serait à désirer que les expériences qui ont paru l'indiquer, fussent répétées avec soin, comme aussi il faudrait que la valeur de $a$ en fonction de $\theta$ fût déterminée par l'observation, dans le cas général où la réflexibilité n'est pas nulle.

Relativement à un corps dont la température ne varie pas, et à l'enceinte en particulier, la loi dont il s'agit ne tient pas à ce que la chaleur émise par le cylindre $T_1$ à travers $\omega_1$, a parcouru une distance plus ou moins grande et éprouvé une absorption plus ou moins considérable, avant d'atteindre cet élément. Cette distance et cette absorption sont les mêmes pour toutes les directions; mais le cylindre $T_1$, circonscrit à un élément donné $\omega_1$, s'amincit de plus en plus à mesure qu'il s'éloigne de la normale; sa base $\omega_1 \cos \theta_1$, ou la section perpendiculaire à sa longueur, diminue proportionnellement au *cosinus* de l'angle d'incidence, et conséquemment aussi la quantité de chaleur qu'il émet au dehors, quand elle traverse en entier l'élément $\omega_1$. Mais, outre ce résultat évident, on peut encore prouver,

d'après le rapport entre les pouvoirs absorbans et émissifs, trouvé dans le n° 13, que la quantité de chaleur émanée de $T_1$ est toujours indépendante de la matière dont ce cylindre est formé, et ne peut changer qu'avec sa température.

En effet, désignons par $\Pi_1 m_1 dt$ la quantité de chaleur émise en tous sens par la partie matérielle $m_1$ pendant l'instant $dt$; soient $\rho_1$ la densité de $m_1$, et $q_1$ la mesure de son pouvoir absorbant. En appelant $p_1$ ce que devient la quantité $p$ du n° 10, relativement à la matière de l'enceinte, à sa température $\zeta$ et à la distance $r_1$, on aura, en vertu de l'équation (1) de ce numéro et de l'équation (3) du n° 13,

$$dp_1 = -p_1 q_1 \rho_1 dr_1, \quad \Pi_1 = q_1 F\zeta.$$

De plus, $Z\omega_1 \cos\theta_1 dt$ sera la somme des valeurs de $p_1 \Pi_1 m_1 dt$ relatives à toutes les parties de $T_1$; si donc on prend pour $m_1$ la tranche très mince de ce cylindre, perpendiculaire à sa longueur, qui répond au point $M_1$, et dont l'épaisseur sera représentée par $\nu_1$, on aura $m_1 = \rho_1 \nu_1 \omega_1 \cos\theta_1$, et Z sera la somme des valeurs de $p_1 \Pi_1 \rho_1 \nu_1$ dans toute la longueur de $T_1$, ou prise depuis $r_1 = 0$ jusqu'à $r_1 = e_1$. En remplaçant $\nu_1$ par $dr_1$, et la somme par une intégrale, on aura, par conséquent,

$$Z = \int_0^{e_1} \Pi_1 p_1 \rho_1 dr_1;$$

et en vertu des équations précédentes, cette valeur de Z sera la même chose que

$$Z = -\int_0^{e_1} F\zeta . dp_1.$$

Donc, puisque le facteur $F\zeta$ ne dépend que de la température $\zeta$, qui est constante par hypothèse, et en observant que l'on a $p_1 = 1$ et $p_1 = 0$ aux limites $r_1 = 0$ et $r_1 = e_1$, il s'ensuit que l'on aura $Z = F\zeta$, lors même que la matière et la densité varieraient sensiblement dans l'épaisseur de la couche superficielle de l'enceinte.

Ainsi, la quantité Z ne dépend que de la température de l'enceinte, comme il s'agissait de le prouver; et l'on voit, de plus, qu'elle exprime le rapport du pouvoir émissif au pouvoir absorbant, qui est le même pour tous les corps, et qu'on a représenté (n° 13) par la fonction F de leur température.

Cette conclusion ne convient pas au corps A, dont la température varie dans l'épaisseur $e$ de sa couche superficielle. Si cette température $\xi$ était constante, c'est-à-dire égale à celle qui a lieu à la limite de cette couche, et qu'on a représentée par $u$, on aurait $Q = Fu$; d'un autre côté, on aurait effectivement $\xi = u$, si $u$ ne différait pas de la température $\zeta$ de l'enceinte. D'après cela, nous ferons

$$Q = Fu + \varphi(F\zeta - Fu); \qquad (2)$$

$\varphi$ étant une nouvelle inconnue, qui sera un nombre abstrait dont on ne pourrait calculer la valeur à moins de connaître les lois de l'absorption et de la température près de la surface de A. En supposant que des expériences ultérieures confirment la loi de l'émission proportionnelle au *cosinus* de l'angle d'incidence, relativement à un corps qui s'échauffe ou se refroidit, cette quantité $\varphi$ sera indépendante de l'angle d'incidence; mais il faudra encore recourir à l'observation, pour savoir si elle varie avec la matière de ce corps. On verra dans la suite qu'elle ne dépend pas des températures.

(22). On ne doit pas confondre la quantité $Ddt$ avec le flux de chaleur qui a lieu, pendant l'instant $dt$, de l'élément $\omega$ vers $\omega_1$, et que je représenterai par $\Delta dt$. La diminution $Ddt$ de la chaleur de T est le résultat de l'échange entre T et $T_1$. Le flux $\Delta dt$ est l'excès de toute la chaleur émise par T vers $\omega_1$ et à travers $\omega$, sur celle qui traverse $\omega$ en sens contraire, et qui résulte, soit de l'émission de $T_1$ à travers $\omega_1$, soit de la réflexion qui a lieu sur $\omega_1$ quand $\alpha_1$ n'est pas l'unité; la chaleur réfléchie provenant alors de celle qui tombe sur $\omega_1$ sous l'angle d'incidence $\theta_1$. Les deux quantités D et $\Delta$ ne coïncident que quand la réflexibilité de $\omega_1$ est nulle, ou la perméabilité complète, sous cette incidence, c'est-à-dire, dans le cas de $\alpha_1 = 1$, pour la valeur donnée de $\theta_1$. Mais je vais démontrer qu'en général la valeur complète de $\Delta$ est indépendante de $\alpha_1$, et se déduit, en conséquence de celle de D en y faisant $\alpha_1 = 1$; ce qui donne, d'après la formule (1),

$$\Delta = \frac{\alpha\omega\omega_1 \cos\theta \cos\theta_1}{4\pi h^2}(Q - Z). \qquad (3)$$

La quantité de chaleur émise par T à travers $\omega$, et qui va tom-

ber sur $\omega_1$ pendant l'instant $dt$, est le premier terme de cette formule, multiplié par $dt$, c'est-à-dire,

$$\frac{\alpha\omega\omega_1 \cos\theta \cos\theta_1}{4\pi h^2} Qdt.$$

Si l'on désigne par $\alpha_1 Pdt$ la quantité de chaleur émise de même par $T_1$ à travers $\omega_1$ et qui va tomber sur $\omega$ pendant le même instant $dt$, on aura aussi

$$P = \frac{\omega\omega_1 \cos\theta \cos\theta_1}{4\pi h^2} Z.$$

J'appelle $kPdt$ ce que devient cette quantité de chaleur lorsqu'on y ajoute la chaleur réfléchie par $\omega_1$ vers $\omega$. Une partie $\alpha kPdt$ de cette chaleur totale, émise et réfléchie, pénétrera dans A à travers $\omega$; et d'après les deux quantités précédentes, on en conclura

$$\Delta = \frac{\alpha\omega\omega_1 \cos\theta \cos\theta_1}{4\pi h^2} (Q - kZ), \qquad (4)$$

où il ne reste plus qu'à déterminer la quantité $k$. Pour cela, il est indispensable d'avoir égard, comme je vais le faire, au nombre infini de réflexions successives qu'éprouve chaque série de molécules calorifiques, en se mouvant dans un espace fermé de toutes parts.

(23). La température $\zeta$ étant constante, il s'ensuit que la quantité $\alpha_1 P$ est la chaleur émise par $T_1$ de $\omega_1$ vers $\omega$, pendant l'unité de temps. Elle se composera d'un nombre extrêmement grand de séries de molécules calorifiques, qui vont des points de $\omega_1$ à ceux de $\omega$; je désigne par $\alpha_1 z$ la somme des molécules qui suivent la direction $O_1O$; la quantité $z$ sera, ainsi que Z, indépendante du degré de perméabilité de $\omega_1$, de la matière de $T_1$ et de l'angle $\theta_1$, et ne pourra changer qu'avec la température $\zeta$ de l'enceinte.

Par le point $O_1$ (fig. 4), je mène dans le plan de la droite $O_1O$ et de la normale $O_1N_1$, une droite $O_1O_2$, qui aboutit au point $O_2$ de la surface de l'enceinte, et soit telle que l'on ait

$$OO_1N_1 = O_2O_1N_1.$$

Au point $O_2$, j'élève la normale intérieure $O_2N_2$ à la surface de l'en-

ceinte; puis, dans le plan de l'angle $O_1O_2N_2$, je mène la droite $O_2O_3$, telle que l'on ait

$$O_1O_2N_2 = O_3O_2N_2,$$

et qui aboutit au point $O_3$ de la surface de l'enceinte. Par ce point $O_3$, je mène encore une normale intérieure $O_3N_3$ à cette surface, puis une droite $O_3O_4$ dans le plan de l'angle $O_2O_3N_3$, telle que l'on ait

$$O_2O_3N_3 = O_4O_3N_3,$$

et qui se termine au point $O_4$ de cette même surface. Je continue indéfiniment ces constructions, et je suppose que la ligne brisée $OO_1O_2O_3O_4$ etc., qui en résultera, ne rencontre la surface de A en aucun autre point que O qui est son origine, ni une seconde fois en ce point O.

De même que nous avons fait

$$OO_1N_1 = \theta_1,$$

faisons aussi

$$O_1O_2N_2 = \theta_2,\ O_2O_3N_3 = \theta_3,\ O_3O_4N_4 = \theta_4, \text{ etc.}$$

et désignons par $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, etc., ce que devient relativement aux points $O_2$, $O_3$, $O_4$, etc., et aux angles $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$, etc., la quantité $\alpha_1$ qui se rapporte au point $O_1$ et à l'angle $\theta_1$. Les séries de molécules calorifiques qui traverseront la surface de l'enceinte aux points $O_2$, $O_3$, $O_4$, etc., suivant les directions $O_2O_1$, $O_3O_2$, $O_4O_3$, etc., auront pour sommes, pendant l'unité de temps, les produits $\alpha_2 z$, $\alpha_3 z$, $\alpha_4 z$, etc.; le facteur $z$ étant le même que précédemment, puisqu'il ne dépend que de la température $\zeta$ commune à tous les points de l'enceinte. Une portion $(1-\alpha_1)\alpha_2 z$ de la chaleur $\alpha_2 z$ incidente au point $O_1$, suivant la direction $O_2O_1$, sera réfléchie suivant la direction $O_1O$, et s'ajoutera à la chaleur $\alpha_1 z$; ce qui donnera une quantité de chaleur $[\alpha_1+(1-\alpha_1)\alpha_2]z$ suivant cette dernière direction. Une portion $(1-\alpha_2)\alpha_3 z$ de la chaleur $\alpha_3 z$ incidente au point $O_2$ suivant la direction $O_3O_2$, se réfléchira de même suivant la direction $O_2O_1$; une portion $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\alpha_3 z$ de cette chaleur $(1-\alpha_2)\alpha_3 z$ déjà réfléchie, se réfléchira une seconde fois suivant la direction $O_1O$, et s'ajoutera à la quantité précédente

$[\alpha_1 + (1 - \alpha_1)\alpha_2]z$; ce qui donnera, suivant cette dernière direction, une quantité de chaleur $[\alpha_1 + (1 - \alpha_1)\alpha_2 + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\alpha_3]z$. En continuant ainsi indéfiniment, et faisant

$$\alpha_1 + (1 - \alpha_1)\alpha_2 + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\alpha_3 + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)\alpha_4 + \text{etc.} = \beta,$$

on aura $\beta z$ pour la somme totale, pendant l'unité de temps, de la série de molécules calorifiques qui suivent la droite $O_1O$; en sorte que la partie $\alpha_1 z$ de cette série, qui est émise directement par $T_1$, se trouvera augmentée par la réflexion, dans le rapport de $\beta$ à $\alpha_1$. Il en sera de même à l'égard de toutes les séries de molécules calorifiques dont se compose la quantité de chaleur $\alpha_1 P$; et comme on a représenté par $kP$ ce que cette chaleur devient quand on a égard à la réflexion, il s'ensuit que l'on aura $k = \beta$.

Or, d'après la valeur de $\beta$, on a évidemment

$$1 - \beta = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)(1 - \alpha_4) \text{ etc.},$$

où l'on voit d'abord que cette différence $1 - \beta$ ne peut être négative, puisque aucune des quantités $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, etc., ne peut surpasser l'unité, ce qui rend tous ses facteurs positifs. De plus, si l'on désigne par $\delta$ la plus petite de toutes les fractions $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, etc., qui ne sont pas zéro, et par $n$ leur nombre, on aura

$$1 - \beta < (1 - \delta)^n;$$

d'où l'on conclut généralement $1 - \beta = 0$, puisque $1 - \delta$ est une fraction et que $n$ est infini. Il n'y aurait exception que si toutes les fractions $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, etc., moins un nombre fini d'entre elles, étaient zéro, ou bien si elles décroissaient continuellement, à partir de l'une d'elles, et finissaient par devenir infiniment petites; car alors la limite $\delta$ n'existerait pas; et l'on sait d'ailleurs qu'un produit d'un nombre infini de facteurs convergens vers l'unité peut avoir une valeur finie et déterminée. Mais ce serait un cas mathématique, qui n'a pas lieu dans la nature, et dont nous pouvons faire abstraction. Nous aurons donc $k = \beta = 1$; ce qui fait coïncider avec la formule (3) la valeur de $\Delta$ exprimée par la formule (4).

La valeur de $k$ devra être modifiée, et ne sera plus égale à l'unité,

dans le cas que nous examinerons plus bas, où l'un des points de la ligne brisée $OO_1O_2O_3$ etc., outre le premier, appartiendra à la surface de A.

(24). Il sera facile de déduire, maintenant, de l'expression de $\Delta dt$, celle du flux total de chaleur qui a lieu pendant l'instant $dt$, suivant toutes les directions, à travers l'élément $\omega$, et qui a été représenté par $\Gamma\omega dt$ (n° 17).

Pour que la formule (3) convienne à toutes les directions de la droite $OO_1$, autour du point O, il faut que la surface de A soit convexe en ce point; car si elle était concave, il y aurait des directions dans lesquelles la droite $OO_1$ rencontrerait la surface de A en un second point; et la température correspondante étant variable et différente de $\zeta$, la formule (3) n'aurait plus lieu pour les angles $\theta$ relatifs à ces directions.

Supposons donc le corps A convexe au point O; par ce point, menons un plan tangent à sa surface, qui laisse le corps entier d'un même côté; la valeur de $\Gamma\omega$ sera la somme de celles de $\Delta$, étendue à tous les élémens $\omega_1$ de la partie de l'enceinte située de l'autre côté, et terminée au plan tangent; d'ailleurs, cette somme s'obtiendra par une intégrale, dans laquelle on remplacera $\omega_1$ par l'élément différentiel de la surface de l'enceinte, qui répond au point $O_1$, et $\omega_1 \cos\theta_1$, par la projection de cet élément différentiel sur un plan perpendiculaire à la droite $OO_1$. Donc, si l'on décrit du point O comme centre, et d'un rayon égal à l'unité, une surface hémisphérique terminée au plan tangent en O à la surface de A, et que l'on appelle $ds$ son élément différentiel perpendiculaire à $OO_1$, il faudra, à cause de $OO_1 = h$, mettre $h^2ds$ à la place du facteur $\omega_1 \cos\theta_1$ de la formule (3), puis étendre l'intégrale de cette formule à tous les élémens $ds$ de la surface hémisphérique. Or, $\theta$ étant l'angle compris entre la droite $OO_1$ et la normale ON, si l'on désigne par $\psi$ l'angle que fait le plan de ON et de $OO_1$, avec un plan fixe mené par ON, on aura

$$ds = \sin\theta\, d\theta d\psi;$$

et pour étendre l'intégrale à toute la surface hémisphérique, il faudra la prendre depuis $\psi = 0$ et $\theta = 0$, jusqu'à $\psi = 2\pi$ et $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

De cette manière, en supprimant le facteur $\omega$ commun à $\Delta$ et $\Gamma\omega$,

et observant que la formule (3) ne contient rien qui dépende de l'angle $\psi$, on aura d'abord

$$\Gamma = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \alpha\,(Q - Z)\cos\theta\,\sin\theta d\theta.$$

Donc, en vertu de la formule (2) et de $Z = F\zeta$, et en faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \alpha\,(1 - \varphi)\cos\theta\,\sin\theta\, d\theta = n,$$

il en résultera finalement

$$\Gamma = n\,(Fu - F\zeta). \qquad (5)$$

(25). En vertu de cette formule, lorsque la température $u$ sera devenue la même et égale à $\zeta$ dans toute l'étendue de A, on aura $\Gamma = 0$, quel que soit le coefficient $n$; le flux de chaleur sera donc nul en tous les points de la surface de A; et conséquemment, la température $\zeta$ continuera de subsister. La fonction $F\zeta$ étant indépendante des dimensions et de la matière de l'enceinte, de sa figure et de l'état de sa surface, il s'ensuit que si l'une de ces quatre choses vient à changer sans que $\zeta$ varie, le corps A conservera aussi cette température. Il en sera de même si l'on transporte A d'un endroit dans un autre de l'espace vide que l'enceinte termine, ou si on le place dans un autre espace terminé par une enceinte qui ait la température $\zeta$ de la première. Si donc A est un thermomètre, et qu'il ait atteint la température invariable de l'enceinte, il continuera de l'indiquer, quel que soit l'endroit de l'espace vide où il sera placé; ce qui aura encore lieu lorsque cet espace sera rempli d'air ou d'un gaz quelconque, qui a pris la température de l'enceinte. Cela est conforme à l'observation, et peut être journellement vérifié. L'expérience montre aussi que si l'on augmente ou si l'on diminue subitement l'espace vide, le thermomètre intérieur ne s'élève ni ne s'abaisse; mais quand cet espace renferme un gaz, celui-ci, en se comprimant ou se dilatant par le changement subit de son volume, abandonne ou absorbe de la chaleur, et le thermomètre monte ou descend d'un nombre de degrés différent, selon la nature du fluide, sa densité et sa température primitives, et la variation de son volume. Lors même que

l'enceinte s'éloigne à une distance immense de A, comme la distance des étoiles à la Terre, par exemple, son influence sur la température de A ne diminue pas; ce qui tient à ce que l'étendue à la superficie et l'intensité de la chaleur rayonnante émanée de chacun de ses points varient en raison inverse l'une de l'autre, c'est-à-dire, l'une en raison inverse et l'autre en raison directe du carré de la distance.

La formule (5) montre aussi que la loi du flux de chaleur qui a lieu à la surface de A, avant qu'il ait atteint la température finale, et par suite la loi de l'échauffement ou du refroidissement de A, sont indépendantes en général de l'endroit que ce corps occupe dans l'espace vide, aussi bien que de la matière, des dimensions, de la figure de l'enceinte, et du degré de réflexibilité de sa surface. Je dis *en général*, car cela n'a plus lieu, non plus que la formule (5), lorsque la ligne $OO_1O_2O_3$ etc. des réflexions successives rencontre une seconde fois la surface de A: dans ce cas, un même corps, que l'on place dans une enceinte fermée de toutes parts, s'échauffe ou se refroidit plus ou moins vite, et suivant des lois différentes, selon le lieu qu'il occupe dans cet espace, et quoique la température de l'enceinte soit partout la même.

(26). Cette formule (5), à laquelle nous avons été conduits par la théorie, s'accorde avec l'expression du flux de chaleur qui résulte des lois expérimentales du refroidissement des corps dans le vide, trouvées par MM. Dulong et Petit; et en comparant l'une à l'autre, on en conclura la forme de la fonction $Fu$ ou $F\zeta$ de la température variable ou constante.

D'après les lois que nous citons, on a

$$\Gamma = \lambda\,(\mu^{u} - \mu^{\zeta}). \qquad (6)$$

La température $u$ est celle du corps A qui se refroidit ou s'échauffe, observée aussi près qu'il est possible de la surface, et pour laquelle on peut prendre la température qui a lieu à la limite intérieure de la couche superficielle d'où émane la chaleur rayonnante. On désigne, comme plus haut, par $\zeta$ la température invariable de l'enceinte qui termine l'espace vide où le corps est placé. La quantité $\mu$ est un nombre peu différent de l'unité, qui est le même pour tous les corps

et pour tous les états de leur surface, et dont la valeur est

$$\mu = 1,0077.$$

Enfin, le facteur $\lambda$ dépend de l'état de la surface de A, c'est-à-dire de sa coloration et de son degré de poli, et peut varier, par conséquent, avec le point O de cette surface, auquel l'expression de $\Gamma$ se rapporte.

Ce facteur $\lambda$ ne change pas avec les températures $u$ et $\zeta$; mais son expression numérique dépend du zéro de l'échelle thermométrique, de telle sorte que le produit de $\lambda$ et de la différence $\mu^u - \mu^\zeta$, ou la valeur de $\Gamma$, ne varie pas avec ce zéro qui est tout-à-fait arbitraire. C'est ce facteur qui donne la mesure du *pouvoir rayonnant* de la surface de A, ou plus exactement de l'élément $\omega$ de cette surface. Il atteint sa plus grande valeur relativement à l'état de cette surface, lorsqu'elle est entièrement dépourvue de réflexibilité; on ignore si cette valeur *maxima* du pouvoir rayonnant varie avec la matière du corps A; la valeur de $\lambda$ est zéro, dans l'autre cas extrême où la surface est imperméable et réfléchit toute la chaleur sous tous les angles d'incidence.

Si nous faisons

$$\lambda = ng,$$

il faudra, pour que les formules (5) et (6) coïncident, que l'on ait

$$Fu = g\mu^u + C, \quad F\zeta = g\mu^\zeta + C;$$

C et $g$ étant des quantités inconnues de chaleur, indépendantes de la matière des corps, de leur température et de l'état de leur surface: C serait la mesure du pouvoir émissif, correspondante à $u = -\infty$, si la formule (6), donnée par l'expérience, s'étendait à des températures aussi basses que l'on voudra; et pour que ce pouvoir devînt nul ou insensible à de très basses températures (n° 8), il faudrait alors que l'on eût $C = 0$. Mais toutes les expériences que l'on peut faire étant relatives à des échanges de chaleur dans lesquels cette constante C disparaît, aucune observation n'en pourra jamais déterminer la valeur.

C'est seulement à raison du coefficient $n$ que le pouvoir rayonnant $\lambda$ pourra varier d'une surface à une autre: si des expériences

ultérieures montrent que la valeur *maxima* de $\lambda$ varie avec la matière du corps, il en faudra conclure qu'il en est de même à l'égard de la valeur de $n$, relative au cas de la non réflexibilité ou de $\alpha = 1$; d'où l'on conclura alors que la quantité $\varphi$ devra aussi dépendre de la matière du corps A qui s'échauffe ou se refroidit; mais, dans tous les cas, ces quantités $\alpha$ et $\varphi$ seront indépendantes, aussi bien que $\lambda$ et $g$, des températures $u$ et $\zeta$.

(27). Maintenant, supposons qu'un second corps A′ soit contenu dans l'enceinte vide d'air où est placé le corps A, et dont la température sera toujours regardée comme invariable et représentée par $\zeta$.

Considérons la série de réflexions successives qui aura lieu suivant la ligne brisée, partant du point O de la surface de A, et dont le premier côté $OO_1$ fait l'angle $\theta$ avec la normale ON. Supposons, pour fixer les idées, que cette ligne ne rencontre la surface de A′ qu'en un seul point, et que la rencontre a lieu au point O′ (fig. 5) de cette surface, entre la première et la troisième réflexion, qui se feront, comme précédemment, aux points $O_1$ et $O_3$ de la surface de l'enceinte; en sorte que la deuxième réflexion, qui avait lieu en un point $O_2$ appartenant à cette enceinte, se fera maintenant au point O′ de la surface de A′. Par ce point, j'élève la normale O′N′; les angles $O_1O'N'$ et $O_3O'N'$ seront compris dans un même plan, et égaux : je les représenterai par $\theta'$, de sorte qu'on ait

$$O_1O'N' = O_3O'N' = \theta'.$$

J'appellerai aussi $u'$ la température de A′ au bout du temps $t$, près du point O′ et à la limite intérieure de la couche superficielle, qui émet et absorbe la chaleur rayonnante. La fraction $\alpha$ et la quantité de chaleur Q répondant, comme plus haut, au point O de la surface de A et à l'angle $\theta$, je désignerai par $\alpha'$ et Q′ ce qu'elles deviennent relativement au point O′ de la surface de A′ et à l'angle $\theta'$; je représenterai toujours la quantité Q par la formule (2), et je ferai de même

$$Q' = Fu' + \varphi'(F\zeta - Fu');$$

$\varphi'$ étant une quantité inconnue qui ne pourra dépendre que de la matière de A′ et de l'angle $\theta'$.

Cela posé, en conservant toutes les autres notations précédentes, on trouvera sans difficulté, par le raisonnement du n° 23, que la quantité $kZ$, comprise dans la formule (4), a pour valeur

$$kZ = \alpha_1 Z + (1 - \alpha_1)\alpha' Q' + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha')\alpha_3 Z$$
$$+ (1 - \alpha_1)(1 - \alpha')(1 - \alpha_3)\alpha_4 Z + \text{etc.};$$

laquelle ne diffère de celle du numéro cité qu'en ce que les quantités $\alpha_2$ et $\alpha_2 Z$ y sont remplacées par $\alpha'$ et $\alpha' Q'$. On aura toujours, comme dans ce numéro,

$$\alpha_1 + (1-\alpha_1)\alpha' + (1-\alpha_1)(1-\alpha')\alpha_3 + (1-\alpha_1)(1-\alpha')(1-\alpha_3)\alpha_4 + \text{etc.} = 1;$$

d'où il résultera

$$kZ = Z + (1 - \alpha_1)\alpha'(Q' - Z);$$

et au moyen de cette valeur, jointe à celles de $Q$, $Q'$, $Z$, la formule (4) deviendra

$$\Delta = \frac{a\omega\omega_1 \cos\theta \cos\theta_1}{4\pi h^2}[(1 - \varphi)(Fu - F\zeta)$$
$$- \alpha'(1 - \alpha_1)(1 - \varphi')(Fu' - F\zeta)].$$

Cette formule s'appliquera au cas où la ligne des réflexions successives vient rencontrer la surface du corps A, après une première réflexion à la surface de l'enceinte : on prendra alors pour A' le corps A lui-même, et O' sera un point de la surface de A, distinct du point O. A raison de la quantité $\alpha_1$ contenue dans la valeur de $\Delta$, on voit comment l'état de la surface de l'enceinte influera sur le flux de chaleur à la surface de A, et par suite sur la vitesse de son refroidissement. On voit aussi que la rencontre en un second point O' de la surface de A, pouvant avoir lieu ou ne pas exister, selon la place que ce corps occupe dans l'enceinte, il en résulte que l'enceinte restant la même, le déplacement de A peut influer sur la loi de son refroidissement ou de son échauffement, jusqu'à ce que la température soit devenue partout égale à $\zeta$, et que l'on ait, par conséquent, $u' = u$, $u = \zeta$, $\Delta = 0$.

On formera de même l'expression de $kZ$ que l'on devra employer

dans la formule (4), lorsque la ligne des réflexions successives qui part du point O rencontrera une ou plusieurs fois la surface de A, de A′ et d'autres corps contenus dans l'enceinte, après ou avant un nombre quelconque de réflexions à la surface de cette enceinte. Si, par exemple, ces rencontres n'ont lieu qu'une seule fois au point O′ de la surface de A′, et avant toutes les réflexions à la surface de l'enceinte, la valeur de $\Delta$ sera

$$\Delta = \frac{\alpha\omega\omega' \cos\theta \cos\theta'}{4\pi h^2} [(1-\varphi)(Fu - F\zeta) - \alpha'(1-\varphi')(Fu' - F\zeta)],$$

$\omega'$ désignant l'élément de la surface de A qui répond au point O′, $h$ la longueur de la droite OO′, $\theta'$ l'angle aigu que fait cette droite avec la normale en O′ à la surface de A′, et les autres notations étant les mêmes que précédemment. On voit que, dans ce cas, la valeur de $\Delta$ dépendra encore de l'état des surfaces de A et A′, à raison des fractions $\alpha$ et $\alpha'$, mais qu'elle ne dépend plus, comme la précédente, de l'état de la surface de l'enceinte. Ce cas comprend celui que nous n'avons pas considéré dans le n° 24, c'est-à-dire, le cas où la surface de A, étant [redacted] au point O, la ligne OO′ vient la rencontrer en un second point O′, avant toutes les réflexions à la surface de l'enceinte.

(28). Pour comprendre tous les cas en un seul, je suppose que les réflexions successives aient lieu en des points O′, O″, O‴, etc. (fig. 6), appartenant à la surface de l'enceinte ou à des corps différemment échauffés, au nombre desquels le corps A peut être compris, et que, pour cette suite de réflexions, les quantités désignées par $\alpha$ et Q relativement au point O de la surface de A et à l'angle d'incidence $\theta$, deviennent $\alpha'$ et $Q'$, $\alpha''$ et $Q''$, $\alpha'''$ et $Q'''$, etc. La valeur de $kZ$ relative à ce cas général sera

$$kZ = \alpha'Q' + (1-\alpha')\alpha''Q'' + (1-\alpha')(1-\alpha'')\alpha'''Q''' + \text{etc.};$$

mais comme on a toujours

$$\alpha' + (1-\alpha')\alpha'' + (1-\alpha')(1-\alpha'')\alpha''' + \text{etc.} = 1,$$

on pourra écrire cette valeur de $kZ$ sous la forme

$$kZ = Z + \alpha'(Q'-Z) + (1-\alpha')\alpha''(Q''-Z) + (1-\alpha')(1-\alpha'')\alpha'''(Q'''-Z) + \text{etc.};$$

au moyen de quoi la formule (4) deviendra

$$\Delta = \frac{a\omega\omega' \cos\theta \cos\theta'}{4\pi h^2} [Q - Z - a'(Q' - Z) - a''(1 - a')(Q'' - Z) \\ - a'''(1 - a')(1 - a'')(Q''' - Z) - \text{etc.}],$$

et ne contiendra que des différences de quantités de chaleur. Les élémens de surface $\omega$ et $\omega'$ sont toujours ceux qui répondent au point O de la surface de A, d'où part la ligne des réflexions successives, et au point O′, où a lieu la première réflexion; $h$ est la distance OO′ de ces deux élémens; $\theta$ et $\theta'$ sont les angles O′ON et OO′N′ que cette droite OO′ fait avec les normales extérieures ON et O′N′.

Il pourra arriver que les corps réfléchissans interceptent toute communication entre A et l'enceinte que nous avions d'abord considérée, et forment autour de A une autre enceinte fermée de toutes parts, dont la température variera d'un point à un autre et avec le temps. Mais si l'enceinte dont la température $\zeta$ est invariable, existe réellement derrière ces corps, ils finiront toujours par prendre tous cette température $\zeta$ après un temps plus ou moins considérable. Cela aurait encore lieu lors même que cette enceinte s'éloignerait à une distance immense; ce qui tient, ainsi qu'on l'a dit plus haut, à ce que l'étendue de l'enceinte croissant comme le carré de la distance, et l'intensité de la chaleur qui en émane décroissant suivant le même rapport, l'action échauffante ou refroidissante de l'enceinte demeure toujours la même, sa température étant supposée invariable.

D'après cela, on exprimera toujours la quantité Q par la formule (2); on fera pareillement

$$\begin{aligned} Q' &= Fu' + \varphi'(F\zeta - Fu'), \\ Q'' &= Fu'' + \varphi''(F\zeta - Fu''), \\ Q''' &= Fu''' + \varphi'''(F\zeta - Fu'''), \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

$u'$, $u''$, $u'''$, etc., désignant, au bout du temps $t$, les températures intérieures des corps réfléchissans, très près des points O′, O″, O‴, etc., de leurs surfaces, et $\varphi'$, $\varphi''$, $\varphi'''$, etc., étant des inconnues qui pourront dépendre de la matière de ces corps et des angles d'incidence.

De cette manière, et à cause de $Z = F\zeta$, la valeur précédente de $\Delta$ prendra la forme :

$$\Delta = \frac{\omega\omega' \cos\theta \cos\theta'}{4\pi h^2} \left[ (1-\varphi)(Fu - F\zeta) - \alpha'(1-\varphi')(Fu' - F\zeta) \right.$$
$$- \alpha''(1-\alpha')(1-\varphi'')(Fu'' - F\zeta) \qquad (7)$$
$$\left. - \alpha'''(1-\alpha')(1-\alpha'')(1-\varphi''')(Fu''' - F\zeta) - \text{etc.} \right].$$

(29). Si les températures de tous les corps réfléchissans, excepté une seule, sont invariables et égales à celles de l'enceinte, ou autrement dit, si toutes les réflexions ont lieu à la surface de l'enceinte, excepté une seule, qui sera la $n^{ième}$ et se fera à la surface d'un corps dont la température varie, toutes les températures $u'$, $u''$, $u'''$, etc., excepté $u^{(n)}$, seront égales à $\zeta$, et la formule (7) se réduira à

$$\Delta = \frac{\omega\omega' \cos\theta \cos\theta'}{4\pi h^2} \left[ (1-\varphi)(Fu - F\zeta) \right.$$
$$\left. - \alpha^{(n)}(1-\alpha')(1-\alpha'') \ldots\ldots (1-\alpha^{(n-1)})(1-\varphi^{(n)})(Fu^{(n)} - F\zeta) \right];$$

ce qui comprend les valeurs de $\Delta$ données dans le n° 27.

Il y a un autre cas particulier que l'on peut encore remarquer. Il a lieu lorsque les élémens $\omega$ et $\omega'$ sont tous les deux perpendiculaires à la ligne $OO'$ qui va de l'un à l'autre. Dans ce cas, il est évident que les points $O''$, $O^{iv}$, etc., de rang pair, coïncideront tous avec $O$, et les points $O'''$, $O^{v}$, etc., avec $O'$. On aura alors

$$u = u'' = u^{iv} = \ldots, \quad \alpha = \alpha'' = \alpha^{iv} = \ldots, \quad \varphi = \varphi'' = \varphi^{iv} \ldots,$$
$$u' = u''' = u^{v} = \ldots, \quad \alpha' = \alpha''' = \alpha^{v} = \ldots, \quad \varphi' = \varphi''' = \varphi^{v} \ldots;$$

la quantité comprise entre les crochets dans la formule (7) deviendra donc

$$(1-\varphi)(Fu - F\zeta)\{1 - \alpha(1-\alpha')[1 + (1-\alpha)(1-\alpha') + (1-\alpha)^2(1-\alpha')^2 + \text{etc.}]\}$$
$$- \alpha'(1-\varphi')(Fu' - F\zeta)[1 + (1-\alpha)(1-\alpha') + (1-\alpha)^2(1-\alpha')^2 + \text{etc.}];$$

et comme on a

$$1 + (1-\alpha)(1-\alpha') + (1-\alpha)^2(1-\alpha')^2 + \text{etc.} = \frac{1}{1-(1-\alpha)(1-\alpha')},$$

$$1 - \alpha(1-\alpha')[1 + (1-\alpha)(1-\alpha') + (1-\alpha)^2(1-\alpha')^2 + \text{etc.}] = \frac{\alpha'}{1-(1-\alpha)(1-\alpha')},$$

il en résultera

$$\Delta = \frac{\alpha\alpha'\omega\omega' \cos\theta \cos\theta'}{4\pi h^2(\alpha+\alpha'-\alpha\alpha')} [(1-\varphi)\ (Fu - F\zeta) - (1-\varphi')\ (Fu' - F\zeta)].$$

(30). Cette formule (7) servira à résoudre tous les problèmes relatifs à la *Catoptrique* de la chaleur. Par des intégrations, on déduira, comme dans le n° 24, de la valeur de $\Delta$ celle du flux total de chaleur $\Gamma\omega$ à travers l'élément $\omega$ de la surface de A; je me bornerai à former l'expression générale de $\Gamma$ dans le cas où la température intérieure de chacun des corps réfléchissans est la même en tous ses points : il sera alors facile de l'obtenir; mais les quantités $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, etc., $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$, etc., n'étant pas connues en fonctions des angles d'incidence, cette expression de $\Gamma$ renfermera des coefficiens dépendans de l'état des surfaces de A, de l'enceinte et des corps réfléchissans, qui ne pourront être déterminés que par l'expérience.

Je suppose d'abord que tous les corps réfléchissans aient une même température, variable avec le temps, et convergente vers la température constante $\zeta$ de l'enceinte extérieure où ils sont placés; je suppose aussi qu'aucun des points O′, O″, O‴, etc., où se font les réflexions successives, n'appartienne à la surface de cette enceinte, ni à celle de A; et ces suppositions ayant lieu pour tous les points O de la surface de A, et pour toutes les directions de la droite OO′, ce corps sera compris dans une autre enceinte, fermée de toutes parts, et ayant partout une même température, comme la première enceinte. Si l'on désigne par $u'$ cette température, qui sera la valeur commune de $u'$, $u''$, $u'''$, etc., et qu'on fasse

$$\alpha'(1-\varphi')+\alpha''(1-\alpha')(1-\varphi'')+\alpha'''(1-\alpha')(1-\alpha'')(1-\varphi''')+ \text{etc.} = \gamma,$$

la formule (7) deviendra simplement

$$\Delta = \frac{\alpha\omega\omega' \cos\theta \cos\theta'}{4\pi h^2} [(1-\varphi)\ (Fu - F\zeta) - \gamma\,(Fu' - F\zeta)].$$

Par une intégration semblable à celle du n° 24, on en déduira immédiatement

$$\Gamma = n\,(Fu - F\zeta) - n'\,(Fu' - F\zeta),$$

en faisant pour abréger,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \alpha\,(1-\varphi)\cos\theta\sin\theta d\theta = n,$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} \alpha\gamma\cos\theta\sin\theta d\theta d\psi = n';$$

et si l'on a égard à l'expression de la fonction F, trouvée dans le n° 26, et qu'on fasse aussi

$$ng = \lambda, \quad n'g = \lambda',$$

il en résultera

$$\Gamma = \lambda\,(\mu^u - \mu^\zeta) - \lambda'\,(\mu^{u'} - \mu^\zeta).$$

Le flux de chaleur à la surface de A dépendra donc en général, non-seulement de la température variable $u'$ de l'enceinte intérieure, mais de la température constante $\zeta$ de l'enceinte extérieure qui pourra être aussi éloignée qu'on voudra de la première. Son expression renferme, comme on voit, deux coefficiens $\lambda$ et $\lambda'$ qui devront être déterminés par l'expérience. Le premier est la mesure du pouvoir rayonnant de la surface de A au point O (n° 26); le second dépend en outre de l'état de la surface de l'enceinte intérieure, à raison des fractions $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$, etc., qui sont contenues généralement dans la quantité $\gamma$. Pour qu'elles en disparaissent, il faut que toutes les inconnues $\varphi'$, $\varphi''$, $\varphi'''$, etc., soient égales; auquel cas $\gamma$ se réduit à l'une des quantités égales $1-\varphi'$, $1-\varphi''$, $1-\varphi'''$, etc., multipliée par une série infinie dont la somme est l'unité. L'égalité de ces inconnues, relatives à une température variable de l'enceinte, exige qu'elles soient indépendantes des angles d'incidence, et qu'elles ne dépendent pas non plus de la matière des corps dont l'enceinte est formée, à moins qu'ils ne soient tous de la même matière. En supposant que ces conditions soient remplies, ce que l'expérience seule pourrait nous apprendre, et en outre, que la valeur commune de $\varphi'$, $\varphi''$, $\varphi'''$, etc., est celle de $\varphi$ qui a lieu pour le corps A, nous aurons

$$\gamma = 1 - \varphi, \quad n' = n, \quad \lambda' = \lambda,$$

et la formule précédente se réduira à

$$\Gamma = \lambda\,(\mu^{u} - \mu^{u'});$$

résultat semblable à la formule (6), qui répond au cas d'une température invariable de l'enceinte.

(31). Je suppose actuellement que les températures communes à tous les points de chaque corps réfléchissant, varient d'un corps à un autre et avec le temps. Les réflexions successives auront lieu à leurs surfaces, à celle de l'enceinte dont la température est $\zeta$, et à la surface du corps A dont la température $u$ sera aussi supposée la même en tous ses points.

Cela étant, du point O comme centre et d'un rayon pris pour unité, je décris une surface sphérique, et je désigne par $ds$ son élément différentiel perpendiculaire à la ligne OO' qui va de ce point O, d'où part la ligne des réflexions successives, au point O' où a lieu la première réflexion; je mets $ds$ à la place du facteur $\frac{\omega' \cos\theta'}{h^2}$ de la formule (7); j'intègre ensuite cette formule par rapport à $ds$ pour avoir la valeur de $\Gamma\omega$; et en supprimant le facteur $\omega$, il en résulte

$$\left.\begin{aligned}\Gamma = {} & \frac{1}{4\pi}(Fu - F\zeta)\int \alpha(1-\varphi)\cos\theta ds \\ & - \frac{1}{4\pi}(Fu' - F\zeta)\int \alpha\alpha'(1-\varphi')\cos\theta ds \\ & - \frac{1}{4\pi}(Fu'' - F\zeta)\int \alpha\alpha''(1-\alpha')(1-\varphi'')\cos\theta ds \\ & - \frac{1}{4\pi}(Fu''' - F\zeta)\int \alpha\alpha'''(1-\alpha')(1-\alpha'')(1-\varphi''')\cos\theta ds \\ & - \text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad (8)$$

Si l'on mène par le point O un plan tangent à la surface de A, l'intégrale contenue dans le premier terme de cette formule devra toujours s'étendre à tous les élémens $ds$ de la surface hémisphérique, terminée à ce plan, et à laquelle aboutissent les lignes OO' qui font des angles aigus $\theta$ avec la normale extérieure ON. Ce premier terme exprimera la valeur de $\Gamma$ qui aurait lieu si le corps A était convexe au point O, et qu'aucun autre corps ne fût renfermé dans l'enceinte avec A. En ayant égard à l'expression de la fonction F, et désignant

toujours par $\lambda$ la mesure du pouvoir rayonnant de A au point O, ce premier terme sera donc $\lambda\ (\mu^{u}-\mu^{\zeta})$. En même tems, la valeur entière de $\Gamma$ deviendra

$$\Gamma=\lambda(\mu^{u}-\mu^{\zeta})-\varpi'(\mu^{u'}-\mu^{\zeta})-\varpi''(\mu^{u''}-\mu^{\zeta})-\varpi'''(\mu^{u'''}-\mu^{\zeta})-\text{etc.} \quad (9)$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{g}{4\pi}\int \alpha\alpha'(1-\varphi')\cos\theta ds=\varpi',$$

$$\frac{g}{4\pi}\int \alpha\alpha''(1-\alpha')(1-\varphi'')\cos\theta ds=\varpi'',$$

$$\frac{g}{4\pi}\int \alpha\alpha'''(1-\alpha')(1-\alpha'')(1-\varphi''')\cos\theta ds=\varpi''',$$

etc.

Dans chaque cas, on fixera les limites des intégrales contenues dans les coefficiens $\varpi'$, $\varpi''$, $\varpi'''$, etc., d'après les formes et les positions respectives de A et des corps réfléchissans renfermés dans l'intérieur de l'enceinte. Mais les valeurs même de ces coefficiens, à raison des quantités inconnues dont elles dépendent, ne pourront être déterminées que par l'expérience. Elles varieront, en général, avec la position du point O à la surface de A. Lorsqu'on aura formé l'expression de $\Gamma$ relative à un point O quelconque, on la multipliera par $dt$ et par l'élément différentiel de cette surface; l'intégrale du produit étendue à cette surface entière exprimera la diminution totale de chaleur de A pendant l'instant $dt$. Tous les coefficiens $\varpi'$, $\varpi''$, $\varpi'''$, etc., étant positifs, on voit que la vitesse du refroidissement de A sera augmentée ou diminuée par l'influence de chacun des corps réfléchissans, selon que la température de celui-ci sera plus petite ou plus grande que celle de l'enceinte; et pour comparer entre elles les influences de l'émission directe et des réflexions successives de chaleur, il suffira généralement de considérer les limites des intégrales d'où dépendent les valeurs de $\varpi'$, $\varpi''$, $\varpi'''$, etc., ainsi qu'on le verra par les exemples suivans, dans chacun desquels nous supposerons, pour ne pas compliquer la question, qu'il n'y ait qu'un seul des points qu'on a désignés par O', O'', O''', etc., qui n'appartienne pas à la surface de l'enceinte, ce qui réduira chacune des formules (8) et (9) à deux termes seulement.

(32). Si A est concave au point O, le premier point O′ appartiendra, suivant certaines directions de la ligne OO′, à la surface de ce corps. On aura $u' = u$ en ce point O′; et tous les autres points O″, O‴, etc., appartenant par hypothèse à la surface de l'enceinte, la formule (8) se réduira à ses deux premiers termes, savoir,

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi}(\mathrm{F}u - \mathrm{F}\zeta)\left[\int \alpha(1-\varphi)\cos\theta ds - \int \alpha\alpha'(1-\varphi')\cos\theta ds\right].$$

La première intégrale s'étendra toujours à toute la surface hémisphérique, terminée au plan tangent en O, et comprenant la normale extérieure ON; et la seconde, à la partie de cette surface comprise entre ce plan tangent et le cône tangent à la surface de A, qui a son sommet au point O. En admettant que la quantité $\varphi'$ soit indépendante de l'angle d'incidence et de la matière de A, ou seulement de l'angle d'incidence, et supposant alors que A est un corps homogène, on aura $\varphi' = \varphi$. Si l'on a de plus $\alpha' = 1$, les deux intégrales se réduiront à une seule, laquelle s'étendra à la portion de surface hémisphérique, comprise dans l'intérieur du cône que l'on vient d'indiquer, de sorte qu'en ayant égard à l'expression de la fonction F, et faisant

$$\frac{g}{4\pi}\int \alpha(1-\varphi)\cos\theta ds = \varpi,$$

nous aurons simplement

$$\Gamma = \varpi(\mu^u - \mu^\zeta).$$

Si A était convexe au point O, il faudrait étendre jusqu'au plan tangent en O, c'est-à-dire à la surface hémisphérique entière, l'intégrale contenue dans la quantité $\varpi$ qui coïnciderait alors avec le coefficient $\lambda$ de la formule (6). Le flux de chaleur que nous considérons ne diffère donc de celui qui aurait lieu dans le cas de la convexité de A, que par le coefficient $\varpi$ qui remplace $\lambda$; et comme ces deux coefficiens dépendent d'une même intégrale, prise entre des limites différentes, qui sont moins étendues pour $\varpi$ que pour $\lambda$, il s'ensuit qu'on a $\varpi < \lambda$, et que l'effet de la concavité de A est de ralentir, toutes choses d'ailleurs égales, la vitesse de son refroidissement.

Pour second exemple, supposons qu'il y ait avec A un autre corps

A′ contenu dans l'enceinte fermée, que le premier point O′ appartienne à la surface de A′, et que tous les autres points O″, O‴, etc., soient situés à la surface de l'enceinte. La formule (9) se réduira à celle-ci :

$$\Gamma = \lambda(\mu^u - \mu^\zeta) - \varpi'(\mu^{u'} - \mu^\zeta),$$

dans laquelle on aura

$$\varpi' = \frac{g}{4\pi}\int aa'(1 - \varphi')\cos\theta ds.$$

Pour fixer les limites de cette dernière intégrale, je mène par le point O un plan tangent et une normale extérieure ON à la surface de A ; je conçois un cône ayant son sommet en O et circonscrit à la surface de A′ ; et je désigne par $s'$ la portion de la surface hémisphérique, comprise dans l'intérieur du cône, et située du même côté du plan tangent que la normale ON. C'est à cette portion $s'$ de surface, dont le centre est en O et le rayon égal à l'unité, que l'on devra étendre l'intégrale contenue dans la valeur de $\varpi'$. Si les dimensions de A′ sont très petites par rapport à sa distance de A, la surface $s'$ sera aussi très petite ; ce qui rendra également très petite la valeur de $\varpi'$, et, par suite, l'influence directe de A′ sur la température de A, à moins que la température $u'$ de A′ ne soit extrêmement différente de $\zeta$. Mais quoique A′ soit un corps d'un très petit volume, son influence sur le refroidissement de A, par la réflexion de la chaleur à la surface de l'enceinte, sera quelquefois très considérable.

En effet, prenons pour troisième exemple le cas où c'est le second point O″ qui se trouve à la surface d'un corps A″, compris avec A dans l'intérieur de l'enceinte, et où tous les autres points O′, O‴, etc., appartiennent à la surface de l'enceinte. La formule (9) se réduira alors à celle-ci :

$$\Gamma = \lambda(Fu - F\zeta) - \varpi''(Fu'' - F\zeta),$$

où l'on aura

$$\varpi'' = \frac{g}{4\pi}\int aa''(1 - \alpha')(1 - \varphi'')\cos\theta ds.$$

Pour fixer les limites de cette dernière intégrale, je mène par le

point O, comme précédemment, un plan tangent et une normale extérieure ON à la surface de A; d'après la position du point O, la figure de l'enceinte, la forme et la position de A', je détermine, dans chaque exemple, une portion S de la surface de l'enceinte qui comprenne tous les points O' pour lesquels la condition du cas que nous considérons est remplie; et je conçois un cône circonscrit à S et ayant son sommet au point O. En appelant $s''$ la portion de surface hémisphérique, comprise dans l'intérieur de ce cône et située du côté du plan tangent où se trouve la normale ON, l'intégrale contenue dans $\varpi''$ devra s'étendre à tous les élémens $ds$ de $s''$. Or, si la surface de l'enceinte est, par exemple, celle d'un ellipsoïde de révolution, et que A et A' soient deux corps d'un très petit volume, placés à ses deux foyers, S sera alors la surface entière de l'enceinte; par conséquent, $s''$ sera aussi la surface hémisphérique entière; ce qui rendra très grande l'influence de A'' sur la température de A. En supposant $\alpha'=0$ dans toute l'étendue de la surface de l'enceinte, et, au contraire, $\alpha''=1$ en tous les points de la surface de A''; en admettant aussi que l'inconnue $\varphi''$ soit indépendante de l'angle d'incidence, et égale à $\varphi$, il en résultera $\varpi''=\lambda$, et conséquemment

$$\Gamma=\lambda(Fu-Fu'');$$

en sorte que le flux de chaleur à la surface de A et son refroidissement seront les mêmes, dans ces hypothèses particulières, que si l'enceinte avait dans toute son étendue la température $u''$ du très petit corps A'', et un degré quelconque de réflexibilité.

Pour dernier exemple, je suppose que le troisième point O''' soit situé à la surface d'un corps A''' compris dans l'enceinte avec A, et que tous les autres points O', O'', O$^{\text{iv}}$, etc., sont situés à la surface de l'enceinte. Je réduis, en conséquence, la formule (9) à

$$\Gamma=\lambda(Fu-F\zeta)-\varpi'''(Fu'''-F\zeta),$$

le coefficient $\varpi'''$ ayant pour valeur

$$\varpi'''=\frac{c}{4\pi}\int\alpha\alpha'''(1-\alpha')(1-\alpha'')(1-\varphi^{\text{iv}})\cos\theta ds.$$

Pour fixer les limites de cette intégrale, je mène toujours par le

point O une normale extérieure ON et un plan tangent à la surface de A; je détermine, dans chaque exemple, la portion S de la surface de l'enceinte où se trouvent tous les points O' qui remplissent, avec un autre point O'' de cette même surface, la condition relative à l'expression de Γ que je considère; cela fait, je circonscris à S un cône qui ait son sommet au point O, et j'appelle $s'''$ la portion de la surface hémisphérique comprise dans l'intérieur de ce cône et située du même côté que la normale ON par rapport au plan tangent. L'intégrale contenue dans $\varpi'''$ devra s'étendre à tous les élémens $ds$ de $s'''$. Maintenant, si A et A''' sont deux très petits corps, placés aux foyers F et F' (fig. 7) de deux *miroirs conjugués* M et M', dont les surfaces sont censées faire partie de celle de l'enceinte, S sera la surface de M, et $s'''$ aura pour valeur cette même surface divisée par le carré du rayon de ce miroir, ou du double de sa distance *focale*. Elle sera donc indépendante de la distance de A''' à A; par conséquent, le coefficient $\varpi'''$ et l'influence de A''' sur la température de A, n'en dépendront pas non plus. En comparant la valeur de $s'''$ à celle de $s'$ qui avait lieu dans le second exemple de ce numéro, on voit que, malgré les deux réflexions que la chaleur subit sur la surface de l'enceinte, et qui donnent lieu aux facteurs $1-\alpha'$ et $1-\alpha''$, par lesquels la valeur de $\varpi'''$ est affaiblie, cette influence de A''' sur le refroidissement de A, est généralement beaucoup plus grande que celle qui est exercée directement par ce même corps A'''. Ce corps étant donné, son influence par réflexion atteindra son *maximum* lorsque les miroirs M et M' n'auront qu'un pouvoir absorbant nul ou insensible, et qu'on aura, en conséquence, $\alpha' = 0$ et $\alpha'' = 0$. On supposera aussi $\alpha''' = 1$, afin de n'avoir pas à considérer dans la valeur complète de Γ, une série infinie de réflexions, semblable à celle du second exemple du n° 29. C'est de cette manière que l'on explique en Physique, d'après M. Pierre Prévost, la réflexion apparente du froid. Si la température de A est égale à celle de l'enceinte, et qu'on ait $u''' < \zeta$, ce corps est en effet refroidi par l'action de A''' transmise par réflexion; il est au contraire échauffé quand on a $u = \zeta$ et $u''' > \zeta$.

(33). Dans tout ce qui précède, le corps A a été placé dans une enceinte vide d'air; on va maintenant supposer cette enceinte rem-

plie d'air ou d'un gaz quelconque ; et il s'agira de déterminer, en ayant égard à l'absorption et à l'émission de chaleur dues à ce fluide, la valeur de la quantité $\Delta$ du n° 22.

Pour cela, considérons de nouveau le cône dont le sommet est un point de A très voisin du point O de sa surface, ou, si l'on veut, ce point O lui-même (n° 20), et qui est circonscrit à l'élément $\omega_1$ de la surface de l'enceinte, correspondant au point $O_1$. Menons par ces points O et $O_1$ les normales ON et $O_1N_1$ (fig. 8) aux deux surfaces, et faisons toujours

$$OO_1 = h, \quad O_1ON = \theta, \quad OO_1N_1 = \theta_1.$$

Soit M′ un point quelconque de la droite $OO_1$, situé à une distance $r'$ de $O_1$, de sorte qu'on ait

$$M'O_1 = r', \quad M'O = h - r'.$$

Appelons $m'$ une portion d'air de grandeur insensible et correspondante au point M′, et désignons par $\Pi' m' dt$ la quantité de chaleur émise en tous sens par $m'$ pendant l'instant $dt$ ; on aura $\frac{\omega \cos \theta}{4\pi (h - r')^2} \Pi' m' dt$ (n° 9) pour la partie de cette chaleur qui atteindrait dans le vide l'élément $\omega$ de la surface de A correspondant au point O.

Cela posé, je prends pour $m'$ la tranche très mince du cône dont il s'agit, perpendiculaire en M′ à la droite $OO_1$. En appelant $b'$ sa base, $\eta'$ son épaisseur, et $\rho'$ la densité de l'air au point M′, on aura

$$m' = \rho' b' \eta'.$$

Si l'on compare cette section $b'$ du cône à la section parallèle, faite par le point $O_1$, et qui est égale à $\omega_1 \cos \theta_1$, on aura aussi

$$b' = \left(\frac{h - r'}{h}\right)^2 \omega_1 \cos \theta_1.$$

Soient, de plus, $\xi'$ la température de $m'$ au bout du temps $t$, et $q'$ la mesure de son pouvoir absorbant. D'après l'équation (3) du n° 13, nous aurons

$$\Pi' = q' F \xi' ;$$

et au moyen de cette valeur jointe à celles de $m'$ et $b'$, la quantité de chaleur précédente deviendra

$$\frac{\omega\omega_{1} \cos\theta \cos\theta_{1}}{4\pi h^{2}} q'\rho' \mathrm{F}\xi' . \eta' dt.$$

Je représente actuellement par

$$\frac{\omega\omega_{1} \cos\theta \cos\theta_{1}}{4\pi h^{2}} \mathrm{Z}' dt,$$

la quantité de chaleur, émise ou réfléchie, qui part de $\omega_1$ pendant l'instant $dt$, et qui viendrait tomber tout entière sur $\omega$, s'il n'y avait pas d'air interposé entre ces deux élémens; quantité dans laquelle le facteur $\mathrm{Z}'$ serait égal, dans le vide, à la fonction $\mathrm{F}\zeta$ de la température $\zeta$ de l'enceinte, d'après ce qu'on a vu précédemment. Je suppose que cette quantité de chaleur soit augmentée, à la distance $r'$ de $\omega_1$, dans le rapport de $p'$ à l'unité; en négligeant le carré de $\eta'$, elle sera augmentée, à la distance $r' + \eta'$, dans le rapport de $p' + \frac{dp'}{dr'} \eta'$ à l'unité; par conséquent, l'accroissement positif ou négatif qu'elle éprouvera en traversant $m'$, aura pour valeur

$$\frac{\omega\omega_{1} \cos\theta \cos\theta_{1}}{4\pi h^{2}} \mathrm{Z}' \frac{dp'}{dr'} \eta' dt.$$

Or, cet accroissement résulte de la chaleur envoyée par $m'$ à $\omega$ pendant l'instant $dt$, dont on vient de former l'expression, et dont il faudra retrancher la portion de chaleur absorbée par cette même partie matérielle $m'$; d'ailleurs, cette portion de chaleur est égale à la chaleur incidente sur $m'$, multipliée par l'épaisseur $\eta'$, la densité $\rho'$ et le pouvoir absorbant $q'$ (n° 10), c'est-à-dire au produit

$$\frac{\omega\omega_{1} \cos\theta \cos\theta_{1}}{4\pi h^{2}} \mathrm{Z}' p' q' \rho' \eta' dt;$$

en supprimant les facteurs $\frac{\omega\omega_{1} \cos\theta \cos\theta_{1}}{4\pi h^{2}}$ et $\eta' dt$, communs aux trois quantités que l'on considère, on aura donc

$$\mathrm{Z}' \frac{dp'}{dr'} = q'\rho' \mathrm{F}\xi' - \mathrm{Z}' p' q' \rho'.$$

J'intègre cette équation, et je détermine la constante arbitraire, de sorte qu'on ait $p' = 1$ quand $r' = 0$; il en résulte

$$p'Z' = Z'e^{-\int q'\rho'dr'} + e^{-\int q'\rho'dr'}\int e^{\int q'\rho'dr'} F\xi'.q'\rho'dr',$$

où l'on suppose que les intégrales indiquées commencent avec $r'$, et l'on représente par $e$ la base des logarithmes népériens.

Je désigne par $k'$ la valeur de $p'$ qui répond au point O, c'est-à-dire, à $r' = h$. En faisant

$$e^{-\int_0^h q'\rho'dr'} = h', \quad \int_0^h e^{\int q'\rho'dr'} F\xi'.q'\rho'dr' = g'F\zeta,$$

nous aurons

$$k'Z' = Z'h' + h'g'F\zeta.$$

Ce sera cette valeur de $k'Z'$ qu'il faudra mettre à la place de $kZ$ dans la formule (4), après que la valeur de $Z'$ aura été déterminée : $h'$ et $g'$ sont des nombres abstraits, dont le premier dépendra de la distance $h$ et de la nature du fluide dans lequel le corps A est plongé, et dont le second dépendra, en outre, des températures du fluide et de l'enceinte.

(34). Le facteur $Z'$ de la quantité de chaleur envoyée par $\omega_1$ à $\omega$, se trouve donc augmenté dans le rapport de $k'$ à l'unité, par l'air interposé entre ces deux élémens. En désignant par $Z''$ ce que devient cette inconnue $Z'$ relativement au point $O_1$ (fig. 4) de la surface de l'enceinte et à la direction $O_1O_{,}$, l'inconnue $Z''$ sera aussi augmentée par l'air dans un rapport de $k''$ à l'unité, déterminé par une équation semblable à la précédente; en sorte que l'on aura

$$k''Z'' = h''Z'' + h''g''F\zeta,$$

en appelant $h_1$ la distance $O_1 O_{,}$, faisant ensuite

$$e^{-\int_0^{h_1} q'\rho'dr'} = h'', \quad \int_0^{h_1} e^{\int q'\rho'dr'} F\xi'.q'\rho'dr' = g''F\zeta;$$

et supposant que $q'$, $\rho'$, $\xi'$, se rapportent, dans ces intégrales, à un point quelconque de la ligne $O_1O_{,}$, situé à la distance $r'$ de $O_1$. Si

l'on désigne de même pour $Z'''$, ce que devient l'inconnue $Z'$ relativement au point $O_3$ et à la direction $O_3O_4$, que l'on suppose l'inconnue $Z'''$ augmentée par l'air dans un rapport de $k'''$ à l'unité, et que l'on fasse

$$O_3O_4=h_4,\quad e^{-\int_0^{h_4} q'\rho' dr'}=h''',\quad \int_0^{h_4} e^{\int q'\rho' dr'}\, F\xi'.q'r'dr' = g'''F\zeta,$$

on aura également

$$k'''Z''' = h'''Z''' + h'''g'''F\zeta;$$

et ainsi de suite.

D'un autre côté, on verra, par un raisonnement semblable à celui du n° 23, que la quantité $Z'$ se composera d'une partie $\alpha_1 F\zeta$ provenant de l'émission à travers l'élément $\omega_1$, et d'une partie $k''Z''(1-\alpha_1)$ provenant de la réflexion sur ce même élément : la quantité $Z''$ se composera aussi de deux parties $\alpha_2 F\zeta$ et $k'''Z'''(1-\alpha_2)$, qui résulteront de l'émission et de la réflexion; et de même pour chacune des inconnues suivantes $Z'''$, $Z^{\text{iv}}$, etc. On aura donc cette série infinie d'équations :

$$\left.\begin{aligned} Z' &= \alpha_1 F\zeta + k''Z''(1-\alpha_1),\\ Z'' &= \alpha_2 F\zeta + k'''Z'''(1-\alpha_2),\\ Z''' &= \alpha_3 F\zeta + k^{\text{iv}}Z^{\text{iv}}(1-\alpha_3),\\ &\text{etc.}, \end{aligned}\right\}\ (10)$$

à laquelle il faudra joindre la série précédente, savoir :

$$\left.\begin{aligned} k'Z' &= h'Z' + h'g'F\zeta,\\ k''Z'' &= h''Z'' + h''g''F\zeta,\\ k'''Z''' &= h'''Z''' + h'''g'''F\zeta,\\ &\text{etc.}; \end{aligned}\right\}\ (11)$$

et ces deux systèmes d'équations serviront à déterminer les deux suites d'inconnues $Z'$, $Z''$, $Z'''$, etc., $k'$, $k''$, $k'''$, etc.

(35). Les quantités $g'$, $g''$, $g'''$, etc., que ces dernières équations renferment, supposent connue la température $\xi'$, en tous les points de l'air ou du gaz contenu dans l'enceinte où le corps A est placé. Près de la surface de A, cette température $\xi'$ sera modifiée par celle de ce corps et variera avec le temps; mais quand la surface de A

a peu d'étendue relativement à celle de l'enceinte, le fluide prend, à peu près dans toute sa masse, la température invariable de l'enceinte, et l'on peut supposer, sans erreur sensible dans les intégrations d'où dépendent $g'$, $g''$, $g'''$, etc., que l'on a partout $\xi'=\zeta$.

Cela étant, on aura

$$\int e^{\int q'\rho' dr'} \mathrm{F}\xi' . q'\rho' dr' = \left(e^{\int q'\rho' dr'} - 1\right) \mathrm{F}\zeta,$$

à cause que les intégrales indiquées doivent s'évanouir avec $r'$. En étendant successivement l'intégrale $\int q'\rho' dr'$ jusqu'à $r' = h, = h_1, = h_2$, etc., et ayant égard aux valeurs de $h'$, $h''$, $h'''$, etc., on en conclura

$$h'g' = 1 - h', \quad h''g'' = 1 - h'', \quad h'''g''' = 1 - h''', \text{ etc.};$$

au moyen de quoi les équations (11) deviendront

$$\begin{aligned} k'Z' &= (Z' - \mathrm{F}\zeta)\, h' + \mathrm{F}\zeta, \\ k''Z'' &= (Z'' - \mathrm{F}\zeta)\, h'' + \mathrm{F}\zeta, \\ k'''Z''' &= (Z''' - \mathrm{F}\zeta)\, h''' + \mathrm{F}\zeta, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Or, on satisfait, quelles que soient les quantités $h'$, $h''$, $h'''$, etc., aux équations (10) et à ces dernières équations, en prenant l'unité pour chacune des inconnues $k'$, $k''$, $k'''$, etc., et faisant chacune des inconnues $Z'$, $Z''$, $Z'''$, etc., égale à $\mathrm{F}\zeta$; ce qui est la seule solution de toutes ces équations, puisqu'elles sont linéaires, en y regardant $Z'$, $Z''$, $Z'''$, etc., $k'Z'$, $k''Z''$, $k'''Z'''$, etc., comme les inconnues.

Dans ce cas, la valeur de $k'Z'$, qu'il faudra mettre à la place de $kZ$ dans la formule (4), sera donc $\mathrm{F}\zeta$, comme dans le cas du vide. Lors donc que le fluide, homogène ou hétérogène, dans lequel le corps A est plongé, a pris la température invariable de l'enceinte, il n'influe plus sur la valeur de $\Delta$, ni sur celle du flux de chaleur $\Gamma\omega$ à travers chaque élément de la surface de A; ce qui tient à ce que chaque partie du fluide envoie alors à cet élément une quantité de chaleur rayonnante, égale à celle qu'elle intercepte, et qui serait envoyée par l'enceinte à ce même élément. Il ne s'ensuit pas que le fluide n'ait aucune influence sur le refroidissement du corps A : il

enlève ou communique, comme on sait, directement par le contact, de la chaleur à ce corps; mais cet effet n'étant pas relatif à la chaleur rayonnante, c'est dans un autre chapitre qu'il en sera question.

(36). Voici, en terminant celui-ci, le résultat général de l'échange de chaleur entre deux parties matérielles $m$ et $m'$, de grandeur insensible, appartenant à un même corps ou à des corps différens, et pouvant avoir lieu dans le second cas, après une ou plusieurs réflexions intermédiaires sur les surfaces d'autres corps.

Supposons que $m$ réponde au point M du corps A, très voisin du point O de la surface (fig. 6). Soit $\Pi m dt$ la quantité de chaleur émise en tous sens par $m$ pendant l'instant $dt$. Désignons par $\sigma$ l'ouverture d'un cône extrêmement aigu, ayant son sommet au point M, et comprenant la droite MO. Dans le cas du vide, la portion de $\Pi m dt$ qui se propagerait suivant ce cône, serait $\sigma \Pi m dt$; supposons qu'elle soit diminuée par l'absorption due à la matière de A, en allant de M à O, dans le rapport de $p$ à l'unité, et ensuite par la réflexion intérieure, dans le rapport de $\alpha$ à l'unité, en traversant la surface de A au point O; la portion $\alpha p \sigma \Pi m dt$ de la chaleur émanée de $m$, se propagera alors en dehors de A, et formera un filet extrêmement mince dont j'indiquerai la direction par la droite OO'. Pour plus de généralité, je supposerai que cette ligne ne soit pas le prolongement de MO; ce qui aura lieu effectivement si la chaleur éprouve une réfraction analogue à celle de la lumière, en passant d'un milieu dans un autre.

Soit O' le point où la droite OO' rencontrera la surface d'un second corps A'; faisons $OO' = h$, et supposons qu'en parcourant cette distance $h$, la chaleur soit diminuée dans le rapport de H à l'unité par l'absorption dans l'air. Désignons par $\alpha'$ la fraction de la chaleur incidente $H \alpha p \sigma \Pi m dt$ qui pénétrera dans l'intérieur de A'; le surplus $(1 - \alpha') H \alpha p \sigma \Pi m dt$ sera réfléchi, et formera encore un filet très mince dont je représenterai la direction par la ligne O'O'', de sorte que les deux droites O'O et O'O'' feront, avec la normale O'N' à la surface de A', des angles OO'N' et O''O'N' égaux et compris dans un même plan.

Soient de même O'' le point où la droite O'O'' rencontre la surface d'un troisième corps A'', et $h'$ la distance O'O''; supposons qu'en par-

courant cette distance, la chaleur soit diminuée dans le rapport de $H'$ à l'unité par l'absorption dans l'air; appelons $\alpha''$ la fraction de la chaleur incidente sur la surface de $A''$, qui pénétrera dans l'intérieur de ce corps; la portion de chaleur réfléchie au point $O''$ sera $(1-\alpha'')H'(1-\alpha')Ha\rho\sigma\Pi m dt$, et sa direction, que j'indiquerai par la droite $O''O'''$, fera, avec la normale $O''N''$ à la surface de $A''$, un angle égal à $O'O''N''$, et compris dans le même plan.

Soient encore $O'''$ le point où la droite $O''O'''$ rencontrera la surface d'un quatrième corps $A'''$, et $h''$ la distance $O''O'''$. Supposons que la chaleur soit diminuée dans le rapport de $H''$ à l'unité, en parcourant dans l'air cette distance $h''$; la chaleur incidente au point $O'''$ de la surface de $A''$, savoir, $H''(1-\alpha'')H'(1-\alpha')Ha\rho\sigma\Pi m dt$, se divisera en deux parties, dont l'une pénétrera dans l'intérieur de $A'''$, et l'autre sera réfléchie. Il sera facile de voir ce que deviendra la seconde partie, après un nombre quelconque d'autres réflexions subséquentes; mais, pour fixer les idées, je ne prolongerai pas plus loin cette série de réflexions, et je vais considérer la portion de chaleur qui pénétrera dans l'intérieur de $A'''$.

Je suppose que cette portion soit la fraction $\alpha'''$ de la chaleur incidente; elle formera dans l'intérieur de $A'''$ un filet très mince dont j'indiquerai la direction par la droite $O'''M'$, distincte du prolongement de $O''O'''$, s'il y a réfraction au point $O'''$. Soit $s'$ la section de ce filet, perpendiculaire à sa longueur, et faite par le point $M'$. Je prendrai pour $m'$ la partie de $A'''$ qui a $s'$ pour base, et une très petite épaisseur $\nu'$; de sorte qu'en appelant $\rho'$ la densité de $A'''$ au point $M'$, on aura

$$m' = s'\nu'\rho'.$$

Je supposerai aussi que la chaleur, en parcourant la distance $O'''M'$, soit diminuée dans le rapport de $p'$ à l'unité, par l'absorption due à la matière de $A'''$. En désignant par $q'$ la mesure du pouvoir absorbant de $m'$, la chaleur absorbée par cette partie matérielle se déduira de la chaleur incidente sur sa base $s'$, en la multipliant par le produit $\nu'\rho'q'$ (n° 10); si donc on la désigne par G, elle aura pour expression, d'après ce qui précède,

$$G = HH'H''(1-\alpha')(1-\alpha'')\,a\alpha'''pp'\nu'\rho'q'\sigma\Pi m dt,$$

où l'on voit clairement l'origine de chacun des facteurs, et l'effet auquel il répond.

Cette portion de chaleur, émanée de $m$ et absorbée par $m'$, a suivi la route indiquée par la ligne brisée MOO'O''O'''M', en formant un filet dont la section normale varie dans toute sa longueur, mais qui est toujours extrêmement petite et proportionnelle à l'ouverture conique que l'on a désignée par $\sigma$. Réciproquement, une portion de chaleur émanée de $m'$ suivra la route indiquée par M'O'''O''O'OM, et sera absorbée par $m$. Elle formera aussi un filet très mince dont la section normale, variable d'un point à un autre, sera proportionnelle, dans toute sa longueur, à une ouverture conique extrêmement petite que je désignerai par $\sigma'$, et qui appartiendra à un cône ayant son sommet en tel point M' que l'on voudra de $m'$. Or, je désigne aussi par $s$ la section normale de ce filet correspondante au point M; je prends pour $m$ la partie de A qui a $s$ pour base, et une très petite épaisseur $\eta$, de sorte qu'on ait

$$m = s\eta\rho,$$

en appelant $\rho$ la densité de A au point M : si l'on représente en outre par $q$ la mesure du pouvoir absorbant de $m$, par $\Pi' m' dt$ la quantité de chaleur émise en tous sens par $m'$ pendant l'instant $dt$, et par G' la portion de cette chaleur qui atteindra $m$ et sera absorbée par cette partie matérielle, nous aurons

$$G' = HH'H''(1-\alpha')(1-\alpha'')\alpha\alpha'''pp'\eta\rho q\sigma'\Pi' m' dt.$$

Dans ces valeurs de G et G', les neuf premiers facteurs sont les mêmes, savoir : H, H', H'', $p$, $p'$, parce que l'absorption que la chaleur éprouve est égale, soit en allant d'un point à un autre, soit en allant de ce second point au premier (n° 12); $\alpha$ et $\alpha'''$, parce que la chaleur est aussi diminuée dans la même proportion, en traversant sous un angle donné une même surface, de dedans en dehors ou de dehors en dedans; $1-\alpha'$ et $1-\alpha''$, parce qu'ils répondent, dans ces deux formules, à des réflexions sur les mêmes surfaces et sous des angles d'incidence qui sont égaux.

Les ouvertures coniques $\sigma$ et $\sigma'$ étant arbitraires, pourvu qu'elles soient l'une et l'autre extrêmement petites, on peut supposer qu'elles

sont entre elles comme les sections normales $s'$ et $s$ des deux filets de chaleur que nous venons de considérer, et faire, en conséquence,

$$\sigma = \frac{s'}{4\pi l^2}, \quad \sigma' = \frac{s}{4\pi l^2};$$

$l$ étant une ligne dont la longueur demeurera arbitraire. On aura alors

$$\eta' \rho' \sigma = \frac{m'}{4\pi l^2}, \quad \eta \rho \sigma' = \frac{m}{4\pi l^2}.$$

Je substitue ces valeurs dans celles de G et G′ que je retranche ensuite l'une de l'autre; en désignant par $\delta$ l'excès positif ou négatif de G sur G′, il vient

$$\delta = \frac{mm'}{4\pi l^2} \mathrm{HH'H''} (1-\alpha')(1-\alpha'') \alpha \alpha''' pp' (q'\Pi - q\Pi') dt;$$

ce qui exprimera, pendant l'instant $dt$, la diminution de chaleur de $m$, ou l'augmentation de chaleur de $m'$, provenant de l'échange entre ces deux parties matérielles.

Si ces parties appartiennent au même corps A, on supprimera dans cette formule les facteurs H, H′, H″, ceux qui dépendent des fractions $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$, et le facteur $p'$; et si l'on suppose la ligne $l$ égale à la distance $r$ ou MM′ qui sépare ces deux parties, cette formule coïncidera, comme cela doit être dans cette hypothèse, avec la formule (2) du n° 13. Elle s'appliquera aussi sans difficulté à l'échange de chaleur entre une partie $m$ de A et une partie $m'$ de l'air environnant, aussi bien qu'entre deux parties $m$ et $m'$ de ce fluide.

En admettant, comme dans le n° 13, que les pouvoirs émissifs de deux matières différentes soient entre eux comme leurs pouvoirs absorbans, on aura

$$\Pi = qFu, \quad \Pi' = q'Fu';$$

$u$ et $u'$ étant les températures de $m$ et $m'$ au bout du temps $t$, et F désignant une fonction indépendante de la nature des corps auxquels ces parties matérielles appartiennent; la formule précédente deviendra alors

$$\delta = \frac{mm'}{4\pi l^2} \mathrm{HH'H''} (1-\alpha')(1-\alpha'') \alpha \alpha''' pp' qq' (Fu - Fu') dt;$$

et dans le cas de $u' = u$, on aura $\Delta = 0$, quelles que soient les matières de $m$ et $m'$, et les absorptions et réflexions intermédiaires. On conclut de là que quand les températures seront primitivement égales, ou qu'elles le deviendront après un certain temps, entre tous les points d'un système de corps, de forme et de nature quelconques, solides, liquides ou gazeux, cet *équilibre de température* subsistera indéfiniment entre les parties de ce système, prises deux à deux et aussi petites que l'on voudra, pourvu qu'elles contiennent toujours, comme $m$ et $m'$, des nombres extrêmement grands de molécules.

Les formules générales que l'on a réunies dans ce numéro mettent en évidence toutes les hypothèses que nous avons faites précédemment sur l'émission, l'absorption et la réflexion de la chaleur. Elles renferment l'expression analytique de ces hypothèses, et montrent comment ces suppositions satisfont, de la manière la plus générale, à la condition de l'équilibre de température. Les lois de la chaleur rayonnante exposées dans ce chapitre en sont le développement et les conséquences.

# CHAPITRE III.

## *Lois du refroidissement des corps qui ont la même température en tous leurs points.*

(37). Les lois du refroidissement ou de l'échauffement d'un corps dépendent, en général, d'une équation aux différences partielles, commune à tous ses points, et d'une équation relative à sa surface, que nous donnerons dans la suite, mais qu'on ne parvient à résoudre simultanément que dans des cas très peu nombreux. La question devient beaucoup plus simple, et ne conduit plus qu'à des équations différentielles du premier ordre, en nombre égal à celui des corps soumis à leur influence mutuelle, lorsque la température de chacun d'eux est la même en tous ses points et seulement variable avec le temps. C'est de ce cas le plus simple que nous allons d'abord nous occuper.

Pour qu'il ait lieu, il faut que le corps A, qui se refroidit ou s'échauffe, ait de petites dimensions. Les températures initiales de ses différens points seront égales ou inégales; la chaleur sera d'abord distribuée arbitrairement dans toute sa masse; mais après un temps peu considérable, les températures de tous ses points seront devenues égales, excepté près de la surface, dans l'épaisseur de la couche d'où émane la chaleur rayonnante, et où la température varie toujours très rapidement suivant chaque normale (n° 18). Toutefois, quelque peu étendu que soit le corps A, l'égalité de température en tous ses points exige qu'il n'y ait pas de causes qui entretiennent certaines parties de ce corps, ses extrémités par exemple, à des températures données : dans ce chapitre, nous supposerons donc que A ne soit pas soumis à l'action constante de semblables causes.

Ce corps A pourra être un solide, homogène ou hétérogène, d'un petit volume; il pourra aussi consister en un fluide contenu dans

une enveloppe très mince; et, dans ce dernier cas, l'égalité de température s'établira plus promptement ou dans une plus grande étendue, à raison des mouvemens qui seront produits dans le fluide par la différence des températures et des densités initiales, et qui la feront bientôt disparaître, en mêlant les parties inégalement échauffées. Un thermomètre, ou du moins la boule de cet instrument, qui en forme la partie principale, est un corps de cette espèce, que l'on suppose également échauffé à chaque instant dans toute son étendue.

(38). Au bout du temps quelconque $t$, désignons par $u$ la température intérieure de A, au-delà de sa couche superficielle d'où émane la chaleur rayonnante, et après les premiers momens de son refroidissement; par hypothèse, $u$ sera simplement une fonction de $t$, qu'il s'agira de déterminer. La *vitesse* du refroidissement de A à cette époque sera la diminution de sa température pendant l'instant $dt$, divisée par $dt$; en la désignant par V, on aura donc

$$V = -\frac{du}{dt};$$

et selon que cette quantité V sera positive ou négative, il y aura, en effet, refroidissement ou échauffement de A. Dans la pratique, on prendra pour V la diminution de température pendant un temps très court, donnée par l'observation et divisée par cet intervalle de temps.

Soient $a$ le volume de A et $c$ sa chaleur spécifique, s'il est homogène, ou la moyenne des chaleurs spécifiques de ses différentes parties, s'il est hétérogène. La diminution de sa quantité de chaleur pendant l'instant $dt$ sera $-acdu$ (n° 5) ou $acVdt$, en supposant que les dimensions de ce corps, quoique très petites, sont néanmoins fort grandes eu égard à l'épaisseur de sa couche superficielle où la température n'est pas la même que dans son intérieur, et négligeant, en conséquence, la variation de la quantité de chaleur qui appartient à cette petite portion de A.

D'un autre côté, cette diminution de chaleur $acVdt$ proviendra du flux de chaleur $\Gamma\omega dt$ (n° 17), qui aura lieu à travers chaque élément $\omega$ de la surface de A pendant l'instant $dt$, et de la chaleur enlevée directement à ce corps, pendant ce même instant, par l'air en

contact avec toute sa surface. En ajoutant cette dernière quantité de chaleur à la somme des valeurs de $\Gamma\omega dt$, relatives à tous les élémens $\omega$, on aura donc une quantité équivalente à $ac\mathrm{V}dt$; ce qui servira à déterminer la valeur de V, et fournira l'équation différentielle d'où dépendra la valeur de $u$.

Or, quelque petit que soit A, si ce corps est soumis à l'influence d'un ou de plusieurs autres corps dont la température varie avec le temps, le coefficient $\Gamma$ ne sera pas le même en tous les points de sa surface, et son expression sera différente selon les différens cas qui pourront se présenter. Je supposerai, en premier lieu, que A soit contenu seul dans une enceinte fermée de toutes parts, dont la température est invariable et partout la même; en la désignant par $\zeta$, par $\mu$ le nombre constant 1,0077, et par $\lambda$ le pouvoir rayonnant qui répond à l'élément $\omega$, on aura alors (n° 26)

$$\Gamma = \lambda\,(\mu^{u} - \mu^{\zeta}). \qquad (1)$$

Si l'état de la surface de A n'est pas le même dans toute son étendue, $\lambda$ variera d'un point à un autre; mais on pourra toujours le regarder comme constant, en prenant pour ce coefficient la moyenne des valeurs du pouvoir rayonnant en tous les points de cette surface; et de cette manière, si l'on appelle $b$ la surface entière, la partie de $ac\mathrm{V}dt$ qui provient du flux de chaleur dans toute son étendue, sera $b\Gamma dt$.

Quant à l'autre partie de la valeur de $ac\mathrm{V}dt$, l'observation montre que la chaleur enlevée à un corps par le contact de l'air est indépendante de la matière de ce corps et de l'état de sa surface, de sorte qu'en désignant par $\Gamma_1$ un coefficient qui ne dépend ni de cet état, ni de cette matière, la quantité de chaleur enlevée à A pendant l'instant $dt$, par l'air en contact avec sa surface entière, pourra être représentée par $b\Gamma_1 dt$. La perte totale de la chaleur de A pendant cet instant sera donc $b(\Gamma+\Gamma_1)dt$; et en l'égalant à son autre expression $ac\mathrm{V}dt$, il en résultera

$$\mathrm{V} = \frac{b}{ac}\,(\Gamma + \Gamma_1); \qquad (2)$$

ce qui fait voir que, toutes choses d'ailleurs égales, la vitesse du refroidissement du corps A que nous considérons est en raison directe

de l'étendue de sa surface et en raison inverse du produit de son volume et de sa chaleur spécifique.

Ce résultat est conforme à l'expérience; mais pour qu'il ait réellement lieu, il faut que le corps A soit convexe en tous ses points; car si sa surface présentait une ou plusieurs concavités, la valeur de $\Gamma$ ne serait pas la même dans toute son étendue; et d'après la remarque du n° 32, les vitesses du refroidissement de deux corps de même volume et de même matière, ne sont pas entre elles comme leurs surfaces, quand l'un d'eux a une partie concave. Il faut aussi qu'aucune portion de la chaleur émanée de A ne soit réfléchie vers ce corps par l'enceinte, sans quoi la valeur de $\Gamma$ ne serait pas non plus la même pour tous les élémens de la surface.

(39). Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de se former une idée précise de la chaleur enlevée à un corps par le contact immédiat de l'air, et distincte de celle qu'il perd en même temps par le rayonnement.

Cette perte de chaleur par le contact résulte de l'échange entre les molécules du corps comprises dans la même couche superficielle d'où émane la chaleur rayonnante, et les molécules d'air appartenant à une couche de ce fluide dont l'épaisseur est aussi très petite. Elle est nulle quand la température du corps est égale à celle de l'air; elle se change en une augmentation de chaleur, lorsque la seconde température surpasse la première; et généralement si l'on appelle $\nu$ la température de l'air, la diminution de chaleur positive ou négative du corps A pendant l'instant $dt$, due au contact de l'air dans toute l'étendue $b$ de la surface, que l'on a désignée par $b\Gamma_{1}dt$, devra être représentée par $b\varpi(u - \nu)dt$; de sorte que l'on aura

$$\Gamma_{1} = \varpi(u - \nu);$$

$\varpi$ étant un coefficient positif qui pourra encore dépendre des températures $u$ et $\nu$.

Le corps A étant placé dans une enceinte fermée ou exposé à l'air libre, je suppose qu'il se trouve dans un courant d'air ou d'un gaz quelconque, dont la température et la vitesse sont constantes. La couche d'air en contact avec A se renouvelant sans cesse, on prendra pour $\nu$ la température donnée du fluide en mouvement; et, pour un

même gaz, le coefficient $\varpi$ sera proportionnel à sa densité, et croîtra, en outre, avec la vitesse du courant. A la vérité, l'air en mouvement et en contact avec A se comprime et s'échauffe d'un côté de ce corps, tandis qu'il se dilate et se refroidit de l'autre côté; mais en prenant $n$ et $\varpi$ comme nous l'indiquons, on suppose implicitement que ces deux effets contraires se compensent sur la surface entière de A. La même chose aura lieu si l'air est en repos et A en mouvement; sa vitesse, dans ce second cas, ou celle de l'air dans le premier cas, pourra être assez grande pour que cette cause de refroidissement ou d'échauffement de A soit prépondérante, et l'emporte de beaucoup sur d'autres causes qui agissent en même temps, c'est-à-dire, sur le rayonnement de A et sur l'influence calorifique d'autres corps voisins. Cela étant, lorsque la température de A sera devenue stationnaire, elle sera celle de l'air dans lequel il se trouve. C'est sur cette considération qu'est fondé le procédé qu'on emploie pour connaître la température de l'air, et qui consiste à agiter fortement un thermomètre dans ce fluide, jusqu'à ce que la température indiquée par l'instrument ait cessé de s'élever ou de s'abaisser. On prend pour la température de l'air environnant celle que le thermomètre marque à cet instant; on peut aussi la déterminer, mais moins promptement, au moyen d'un thermomètre dont la surface est sensiblement imperméable à la chaleur, ou douée d'une réflexibilité aussi parfaite qu'il est possible; en sorte que l'instrument ne puisse s'échauffer ou se refroidir que par le contact immédiat de l'air, dont l'effet est indépendant de l'état de sa superficie.

Lorsque l'air est calme et le corps A en repos, la couche d'air en contact avec sa surface s'échauffe ou se refroidit; sa densité et sa force élastique changent : elle se déplace, en conséquence, et est sans cesse renouvelée. Il se produit alors près de la surface de A un mouvement de l'air qui peut s'étendre à la masse entière de ce fluide, quand elle est peu considérable, et dont la vitesse dépend de la différence entre les températures de A et du fluide. La détermination de ce mouvement particulier de l'air, et par suite de la variation de température de A à laquelle il donne lieu, est un problème que l'on est loin de savoir résoudre. La loi de cette variation doit donc être empruntée de l'expérience; or, on conçoit qu'elle sera diffé-

rente, selon que le corps A, d'un petit volume, est placé dans un vaisseau clos, comme dans les expériences de MM. Dulong et Petit, ou qu'il est exposé à l'air libre, ou, du moins, suspendu dans un grand appartement.

Dans le premier cas, la température de la masse d'air est inconnue; elle n'est sans doute pas partout la même; et à chaque instant elle doit dépendre de la température du vaisseau où elle est renfermée, que l'on peut rendre invariable, et de la température variable de A. Il en résulte qu'en définitive le coefficient $\Gamma_{\prime}$ doit aussi dépendre de ces deux températures, dont il est une fonction qui ne peut être déterminée que par l'observation. Sur ce point, je renverrai au mémoire de MM. Dulong et Petit, où sont consignés les résultats de leurs nombreuses expériences sur le pouvoir refroidissant de différens gaz, pris à différentes températures et sous différentes pressions.

Si, au contraire, A est placé dans un grand appartement ou tout-à-fait exposé à l'air libre, on peut admettre que la couche d'air en contact à chaque instant avec la surface de ce corps, a une température propre et donnée dans chaque exemple; ce qui revient à dire qu'une couche d'air, après avoir enlevé ou communiqué à A une petite quantité de chaleur, et s'être détachée de sa surface, est remplacée par une autre couche dont la température est celle que la première avait d'abord; que cette deuxième couche est de même remplacée par une troisième, celle-ci par une quatrième, et ainsi de suite. Ces couches successives vont perdre ou reprendre, dans la masse d'air environnante la chaleur qu'elles ont enlevée ou perdue, sans que le fluide soit sensiblement échauffé ou refroidi par cette cause, non plus que par l'absorption d'une petite partie de la chaleur rayonnante émanée de A; ce qui fait rentrer le cas que l'on examine actuellement dans celui d'un courant d'air d'une température donnée, dont on a parlé tout à l'heure.

Pour un corps A exposé à l'air libre ou suspendu dans un grand appartement, l'expérience n'a pas encore fait connaître, en fonction de sa température et de celle de l'air, la loi de la perte de chaleur que ce corps éprouve par le contact immédiat de l'air; généralement, on suppose cette perte proportionnelle à l'excès de la température de A

sur celle de l'air environnant; ce qui revient à représenter, comme plus haut, le coefficient $\Gamma_1$ par un produit $\varpi(u - n)$, et à regarder le facteur $\varpi$ comme une quantité indépendante des températures $n$ et $u$ de l'air et de A; hypothèse qui doit peu s'écarter de la vérité, dans le cas des températures ordinaires. Mais, pour plus de commodité dans les calculs, nous supposerons à $\Gamma_1$ la même forme qu'au coefficient $\Gamma$ qui répond à la perte de chaleur par le rayonnement et qui est exprimé par la formule (1); nous ferons donc

$$\Gamma_1 = \lambda_1 (\mu^u - \mu^n); \qquad (3)$$

$\lambda_1$ désignant une quantité de chaleur indépendante des températures $u$ et $n$. Le nombre $\mu$ différant peu de l'unité, cette valeur de $\Gamma_1$ sera, en effet, à très peu près proportionnelle à la différence $u-n$, quand ces températures ne seront pas très-élevées. Le coefficient $\lambda_1$ ne dépendra pas non plus de la nature de A ni de l'état et de l'étendue de sa surface qu'on suppose très petite; il sera proportionnel à la densité de l'air; et si ce fluide est en mouvement, ou si A se meut dans ce fluide, ce coefficient devra être augmenté en raison de la vitesse relative de A et de l'air; ce qui pourra, quand cette vitesse sera très-grande, rendre $\lambda_1$ beaucoup plus grand que le coefficient $\lambda$ de la formule (1). Enfin, si A est exposé à l'air libre, on prendra pour $n$ la température de l'air environnant, donnée dans chaque cas, et déterminée par le moyen qu'on a indiqué plus haut, ou autrement : si A est suspendu dans un grand appartement, dont les parois ont partout la même température, on la prendra pour la valeur de $n$.

(40). Je reviens actuellement à l'équation (2), qui suppose le corps A contenu seul dans une enceinte fermée de toutes parts, et dont la température constante est $\zeta$. Cette enceinte étant aussi supposée très grande, on fera, d'après ce qu'on vient de dire, $n = \zeta$ dans la formule (3); en la substituant à la place de $\Gamma_1$ et la formule (1) au lieu de $\Gamma$ dans l'équation (2), mettant $-\frac{du}{dt}$ à la place de V, et faisant, pour abréger,

$$\frac{b(\lambda + \lambda_1)\mu^\zeta \log \mu}{ac} = k,$$

on tirera de cette équation

$$kdt = -\frac{\mu^\zeta d.\mu^u}{\mu^u(\mu^u - \mu^\zeta)}.$$

J'intègre, et je suppose qu'on ait $u = \gamma$, quand $t = 0$; il vient

$$kt = \log.\frac{\mu^u(\mu^\gamma - \mu^\zeta)}{\mu^\gamma(\mu^u - \mu^\zeta)};$$

d'où l'on déduit, en désignant par $e$ la base des logarithmes népériens,

$$\mu^u = \frac{\mu^{\zeta+\gamma}}{\mu^\gamma - (\mu^\gamma - \mu^\zeta)e^{-kt}};$$

résultat qui montre que quand la température initiale $\gamma$ est égale à $\zeta$, on a constamment $u = \gamma$, comme cela doit être, et que si cette température $\gamma$ est plus grande ou plus petite que $\zeta$, la température $u$ diminue ou augmente sans cesse, jusqu'à ce qu'elle ne diffère plus sensiblement de $\zeta$.

Si les températures $\zeta$ et $\gamma$ sont peu élevées, $u$ le sera aussi; en développant alors les exponentielles $\mu^\zeta$, $\mu^\gamma$, $\mu^u$, suivant les puissances de $\zeta \log \mu$, $\gamma \log \mu$, $u \log \mu$, on pourra négliger les carrés et les produits de ces quantités, qui seront de petites fractions à cause du facteur $\log \mu$, moindre que 0,0077; de cette manière, la formule précédente devient, en réduisant,

$$u = \zeta + (\gamma - \zeta)e^{-kt};$$

et, en même temps, la valeur de $k$ se change en celle-ci:

$$k = \frac{b(\lambda + \lambda_{,})\log \mu}{ac}.$$

Par conséquent, le temps croissant par des intervalles égaux, la température de A variera suivant une progression géométrique dont la raison est indépendante de la température $\zeta$ de l'enceinte; ce qui est, en effet, conforme à l'expérience dans le cas des températures ordinaires.

Cette loi du refroidissement des corps d'un petit volume est celle

qui résulte du principe de Newton, d'après lequel la chaleur communiquée par un corps à un autre est simplement proportionnelle à la différence de leurs températures; principe que l'on a admis pendant long-temps, mais dont les conséquences s'écartent de plus en plus de l'observation, à mesure que les températures sont plus élevées. En adoptant cette loi, à cause de sa simplicité, lorsqu'il s'agit de températures ordinaires, et désignant par $\theta$ le temps pendant lequel la température de A s'abaisse de sa valeur initiale $\gamma$, à une valeur donnée $\epsilon$, nous aurons

$$\frac{b\theta}{ac}(\lambda + \lambda_1)\log\mu = \log\frac{\gamma - \zeta}{\epsilon - \zeta},$$

en vertu des expressions précédentes de $u$ et de $k$. Pour un autre corps placé dans la même enceinte, dont la surface est dans le même état que celle de A, et dont la température emploiera un temps $\theta_1$ à s'abaisser de $\gamma$ à $\epsilon$, nous aurons de même

$$\frac{b_1\theta_1}{a_1c_1}(\lambda + \lambda_1)\log\mu = \log\frac{\gamma - \zeta}{\epsilon - \zeta};$$

$b_1$, $a_1$, $c_1$, désignant la surface, le volume et la chaleur spécifique de ce second corps. En divisant ces deux dernières équations l'une par l'autre, on aura donc

$$\frac{b_1 a\theta_1}{ba_1\theta} = \frac{c_1}{c};$$

équation très simple, sur laquelle est fondé le procédé dont les physiciens ont fait usage pour comparer les chaleurs spécifiques de deux corps d'un petit volume, d'après les temps de leurs abaissemens égaux de température.

(41). Ces deux corps étant de matières différentes, pour que leurs surfaces soient dans le même état, comme le suppose cette dernière équation, on les recouvre l'un et l'autre d'une couche très mince formée d'une même matière. Or, relativement à l'épaisseur de cette couche, l'expérience a fait connaître un résultat propre à nous éclairer sur l'étendue du rayonnement de la chaleur dans la matière des corps solides.

Si l'on recouvre ainsi la surface entière de A, d'une couche dont l'é-

paisseur soit très petite, eu égard aux dimensions de ce corps, et qui soit formée d'une matière telle que le noir de fumée, par exemple, dont le pouvoir rayonnant est très grand, $\lambda$ augmentera, $\lambda_1$ ne changera pas, et les autres quantités $b$, $a$, $c$, contenues dans $k$, ne varieront pas sensiblement. La variation de température de A deviendra donc plus rapide; mais l'expérience prouve qu'il faut que la couche additive ait atteint une certaine épaisseur, pour que la vitesse de l'échauffement ou du refroidissement parvienne à son *maximum* et devienne stationnaire. Ainsi, en faisant croître graduellement l'épaisseur de cette couche, sans qu'elle cesse néanmoins d'être fort petite, on observe que la température de A varie de plus en plus vite, jusqu'à ce que cette épaisseur ait atteint une limite que l'expérience fait connaître, et que je désignerai par $\epsilon$. Parvenue à cette grandeur $\epsilon$, si l'épaisseur de la couche additive augmente encore, en demeurant toujours très petite, la vitesse du refroidissement ou de l'échauffement ne varie plus. Dans le cas des températures ordinaires, l'expérience montre aussi que pour une épaisseur donnée, plus petite ou plus grande que $\epsilon$, la température de A s'abaisse ou s'élève en progression géométrique, le temps croissant par des intervalles égaux.

Quand la couche de noir de fumée que j'ai citée pour exemple a atteint ou dépassé l'épaisseur $\epsilon$, elle absorbe à peu près toute la chaleur qui tombe du dehors sur sa surface extérieure, et son degré de réflexibilité est sensiblement nul. Au contraire, pour une épaisseur moindre que $\epsilon$, elle réfléchit une partie de la chaleur incidente, dans une proportion qui diminue à mesure que cette épaisseur approche de $\epsilon$. Lorsque la couche additive est formée d'une autre matière, la limite $\epsilon$ a une autre grandeur; à cette limite, la vitesse du refroidissement, devenue stationnaire, est généralement moindre que celle qui a lieu dans le cas du noir de fumée, et la couche conserve encore un degré de réflexibilité relatif à l'état de sa surface. L'expérience n'a pas fait connaître si cette vitesse est ou n'est point toujours la même pour deux couches additives de matière différente, parvenues à leur limite d'épaisseur, pour lesquelles cette limite $\epsilon$ serait égale, et qui absorberaient, à cette limite, toute la chaleur incidente, ou qui la réfléchiraient en égale proportion.

En admettant ces résultats comme des données de l'observation, il s'ensuit que le pouvoir rayonnant $\lambda$ de la couche additive dépend, en général, de son épaisseur, de l'état de sa surface, et peut-être aussi de la matière dont elle est formée. Or, d'après les n^os 24 et 26, l'expression de cette quantité est

$$\lambda = \frac{1}{2} g \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \alpha(1 - \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta;$$

$g$ désignant une quantité invariable de chaleur, $\alpha$ étant une fraction qui exprime, sous l'angle d'incidence $\theta$, la proportion suivant laquelle la chaleur extérieure pénètre à travers la surface du corps auquel $\lambda$ se rapporte, et $\varphi$ représentant une inconnue dont la valeur peut varier, non-seulement avec l'angle $\theta$, comme celle de $\alpha$, mais aussi avec la matière de ce corps. On peut supposer, ainsi que nous l'avons déjà dit (n° 17), que le phénomène de la division de la chaleur incidente en deux parties, dont l'une est réfléchie au dehors et l'autre pénètre dans l'intérieur, se passe dans l'épaisseur tout-à-fait insensible de la couche qui termine tous les corps et dont la densité varie très rapidement, de sorte qu'il n'y ait plus aucune réflexion de chaleur à la profondeur à laquelle la densité est regardée comme constante, ou ne varie plus qu'à raison de la température. Dans cette hypothèse, qui paraît la plus naturelle, la fraction $\alpha$, relative à un angle donné $\theta$, se rapporte uniquement à la surface même de la couche additive, et ne saurait varier avec son épaisseur, de grandeur sensible. C'est donc l'inconnue $\varphi$ qui doit changer de valeur avec cette épaisseur; et, pour cela, il est nécessaire que les points de la couche additive, qui émettent au dehors la chaleur rayonnante, et qui absorbent, en échange, la chaleur extérieure après qu'elle a traversé la surface, s'étendent à une profondeur dont la limite est $\epsilon$.

A la vérité, si la fraction $\alpha$ ne varie qu'avec l'état de la surface extérieure, et que le degré de réflexibilité de cette surface soit insensible, comme dans l'exemple du noir de fumée, lorsque l'épaisseur de la couche a atteint la limite $\epsilon$, il semble qu'il devrait aussi disparaître, et qu'il n'y aurait plus de chaleur réfléchie, contrairement à l'observation, dès que cette épaisseur aurait une grandeur sensible. Mais il faut observer que la fraction $\alpha$ de la chaleur in-

cidente, qui a traversé la surface extérieure de la couche additive, n'est pas absorbée en entier par la matière de cette couche, lorsque son épaisseur est moindre que $\epsilon$ : une portion de cette chaleur atteint donc la surface du corps A recouvert par cette couche; et si cette surface a un degré quelconque de réflexibilité, cette portion de chaleur sera en partie réfléchie : elle traversera une seconde fois la couche additive, sans être entièrement absorbée. La portion qui atteindra la surface extérieure de cette couche se divisera de nouveau en deux parties, dont l'une sera émise au dehors, et l'autre renvoyée vers la surface de A; et ainsi de suite. De cette manière, la totalité de la chaleur réfléchie au dehors de la couche additive se compose de deux parties distinctes : l'une ne dépend que de l'état de sa surface, et nullement de son épaisseur; l'autre diminue à mesure que l'épaisseur augmente, et s'évanouit quand l'épaisseur a atteint la limite $\epsilon$. La première n'a éprouvé qu'une seule réflexion, qui a eu lieu à la surface extérieure de la couche; la seconde en a éprouvé une ou plusieurs à la surface du corps A.

Ces considérations montrent la nécessité de la quantité $\varphi$, que nous avons introduite dans l'expression du pouvoir rayonnant, et dont l'existence tient à ce que la température varie très rapidement près de la surface d'un corps qui s'échauffe ou se refroidit (n° 21). En général, toutes les circonstances que présentent l'émission et la réflexion de la chaleur rayonnante s'expliqueront au moyen des deux quantités $\alpha$ et $\varphi$, d'où dépend la valeur de $\lambda$, et dont la première est uniquement relative à l'état de sa surface, c'est-à-dire, à sa coloration et à son degré de poli, tandis que la seconde en est indépendante, et varie, au contraire, avec la matière des corps, ou du moins avec la limite $\epsilon$ qui répond à chaque matière.

La conclusion générale de ce qui précède est que l'épaisseur de la couche superficielle, d'où émane la chaleur rayonnante émise au dehors par les différens corps, et où la chaleur extérieure qui les pénètre est absorbée, n'a point une grandeur insensible, et qu'elle a, au contraire, une grandeur sensible, quoique très petite, qui peut changer d'un corps à un autre. On peut supposer que le rayonnement moléculaire s'étend à des distances sensibles dans l'intérieur des corps solides et liquides, aussi bien que dans leurs couches su-

perficielles, et que cette étendue sensible peut influer sur les lois de la communication de la chaleur qui se fait de proche en proche dans chacun de ces corps. Toutefois, à cause de la variation rapide de température, qui a lieu près de la surface et n'existe pas dans l'intérieur, il est possible que, pour une même matière, la limite du rayonnement intérieur diffère de celle que nous avons désignée plus haut par $\varepsilon$.

(42). Supposons actuellement qu'un second corps A′, d'un petit volume, est contenu avec A dans l'enceinte fermée, dont la température invariable sera toujours représentée par $\zeta$. Au bout du temps $t$, la température de A sera désignée par $u$, comme plus haut, et celle de A′ par $u'$. Cela étant, concevons une surface développable, tangente aux surfaces de ces deux corps, qui sera, par exemple, un cylindre à base circulaire, lorsque A et A′ seront des sphères égales. Soient EHF et E′H′F′ (fig. 9) les parties de leurs surfaces, comprises entre ces corps et terminées à la surface développable. Il y aura un échange de chaleur entre A et A′, à travers deux élémens quelconques, appartenant l'un à EHF, l'autre à E′H′F′. Je désigne par $\Delta dt$ la perte de chaleur de A pendant l'instant $dt$, résultant de l'échange à travers les deux élémens $\omega$ et $\omega'$ qui répondent aux points O et O′ de ces portions de surface. En conservant les notations du n° 27, la valeur de $\Delta$ sera donnée par la dernière formule de ce numéro, ou par la formule (7) du n° 28, réduite à ses deux premiers termes, savoir :

$$\Delta = \frac{\alpha\,\omega\omega'\cos\theta\cos\theta'}{4\pi h^2}\left[(1-\varphi)(\mathrm{F}u-\mathrm{F}\zeta)-\alpha'(1-\varphi')(\mathrm{F}u'-\mathrm{F}\zeta)\right].$$

Son premier terme est la valeur de $\Delta$ qui aurait lieu si A′ n'existait pas ; le flux de chaleur qui en résultera, pendant l'instant $dt$, à travers la surface entière $b$ de A, sera donc, comme plus haut, égal à $b\Gamma dt$ ; le coefficient $\Gamma$ étant donné par la formule (1). Si donc on remplace $\omega$ et $\omega'$, dans le second terme de $\Delta$, par les élémens différentiels $ds$ et $ds'$ des surfaces de A et A′ qui répondent aux points O et O′, le flux total de chaleur à travers cette même surface $b$ sera

$$b\Gamma dt - \frac{dt}{4\pi h^2}(\mathrm{F}u'-\mathrm{F}\zeta)\int\!\!\int \alpha\alpha'(1-\varphi')\cos\theta\cos\theta'\,ds\,ds' ;$$

l'intégrale double s'étendant aux deux portions de surface EHF et E′H′F′.

Si les quantités $\alpha$ et $\alpha'$ ne sont pas toutes deux égales à l'unité, il y aura, en outre, entre les élémens de EHF et E'H'F' des séries de réflexions de chaleur qui changeront, sous le signe $\int\int$, le facteur $\alpha\alpha'(1-\varphi')$ en un autre que je désignerai par $\alpha_1$. En ayant égard à l'expression de la fonction F (n° 26), on pourra faire

$$\frac{1}{4\pi h^2}(Fu'-F\zeta)\int\int\alpha_1 \cos\theta\cos\theta' ds\, ds' = b\mathfrak{C}(\mu^{u'}-\mu^{\zeta});$$

$\mathfrak{C}$ étant une quantité de chaleur dépendante de l'état des surfaces EHF et E'H'F', de la quantité $\varphi'$, et de la distance qui sépare les deux corps A et A'. Si cette distance est très grande par rapport à leurs dimensions, la quantité $\mathfrak{C}$ sera très petite relativement à la quantité $\lambda$ de même nature, qui entre dans la formule (1), et elle variera, à très peu près, en raison inverse du carré de cette distance. Pour tenir compte de la série de réflexions qui a changé $\alpha\alpha'(1-\varphi')$ en $\alpha_1$, il faudra aussi changer le facteur $\lambda$ de cette formule (1) en un autre facteur $\lambda(1+f)$, dans lequel $f$ est une fraction très petite, comme $\frac{\mathfrak{C}}{\lambda}$, dans le cas où la distance de A' à A sera très grande. On supposera que leurs surfaces ne présentent aucune concavité, et qu'aucune portion de chaleur émise par ces corps ne leur est renvoyée par l'enceinte. L'expression précédente du flux de chaleur à travers la surface $b$ sera complète; en sorte qu'en y ajoutant la perte de chaleur $b\Gamma_1 dt$, produite par le contact de l'air, on aura la valeur totale de la quantité $ca\mathrm{V}dt$ du n° 42.

Cela posé, d'après l'équation précédente et les valeurs de $\Gamma$ et $\Gamma_1$, nous aurons

$$ac\mathrm{V} = b[\lambda(1+f)+\lambda_1](\mu^u-\mu^\zeta) - b\mathfrak{C}(\mu^{u'}-\mu^\zeta).$$

Si l'on désigne par $f'$, $\mathfrak{C}'$, $\lambda'$, ce que deviennent les quantités $f$, $\mathfrak{C}$, $\lambda$, relativement au corps A'; si l'on représente par $a'$, $b'$, $c'$, $\mathrm{V}'$, son volume, sa surface, sa chaleur spécifique, la vitesse de son refroidissement; et si l'on observe que $\lambda_1$ ne change pas en passant de A à A', puisque ces deux corps sont placés dans un même fluide, on aura de même

$$a'c'\mathrm{V}' = b'[\lambda'(1+f')+\lambda_1](\mu^{u'}-\mu^\zeta) - b'\mathfrak{C}'(\mu^u-\mu^\zeta).$$

En mettant, dans ces équations, $-\frac{du}{dt}$ et $-\frac{du'}{dt}$ à la place des vitesses V et V', et faisant, pour abréger,

$$\frac{b}{ac}[\lambda(1+f)+\lambda]=p,\quad \frac{b\mathcal{C}}{ac}=q,$$
$$\frac{b'}{a'c'}[\lambda'(1+f')+\lambda_{1}]=p',\quad \frac{b'\mathcal{C}'}{a'c'}=q',$$

on aura ces deux équations différentielles du premier ordre, mais non linéaires,

$$\frac{du}{dt}+p(\mu^{u}-\mu^{\zeta})-q(\mu^{u'}-\mu^{\zeta})=0,$$
$$\frac{du'}{dt}+p'(\mu^{u'}-\mu^{\zeta})-q'(\mu^{u}-\mu^{\zeta})=0,$$

dans lesquelles on ne pourra pas, en général, effectuer la séparation des variables. On y parviendra seulement dans le cas particulier où l'on a $pp'=qq'$, en supposant que cette égalité soit possible. Si l'on ajoute alors la seconde de ces équations, multipliée par $q$, à la première multipliée par $p'$, on aura

$$p'du+qdu'=0;$$

d'où l'on tire

$$u'=\gamma-\frac{p'}{q}u;$$

$\gamma$ étant une constante arbitraire. En substituant cette valeur de $u'$ dans la première équation, on en déduira ensuite une valeur de $dt$ de la forme U$du$; le coefficient U étant une fonction de $u$, de sorte que les variables seront maintenant séparées. Pour que U$du$ soit intégrable sous forme finie, il faudra que $\frac{p'}{q}$ puisse s'exprimer par le rapport de deux nombres entiers; ce qui sera toujours possible, exactement ou à tel degré d'approximation que l'on voudra. Lorsque la distance comprise entre A et A' sera très grande, les quantités $q$ et $q'$ seront très petites par rapport à $p$ et $p'$, et l'on intégrera les équations précédentes par la méthode des approximations successives.

(43). Si les températures $u$ et $u'$ ne sont pas très élevées, on réduira ces deux équations à la forme linéaire, en développant les exponentielles $\mu^u$ et $\mu^{u'}$ suivant les puissances de $u$ et $u'$, jusqu'à la seconde exclusivement. En développant aussi $\mu^\zeta$, faisant

$$u-\zeta=x, \quad u'-\zeta=x',$$

et comprenant le facteur log $\mu$ dans les coefficiens $p$, $p'$, $q$, $q'$, on aura alors

$$\frac{dx}{dt}+px-qx'=0,$$
$$\frac{dx'}{dt}+p'x'-q'x=0;$$

équations dont les intégrales sont

$$x=q\gamma e^{-mt}+q\gamma' e^{-m't},$$
$$x'=(p-m)\gamma e^{-mt}+(p-m')\gamma' e^{-m't}.$$

On désigne ici par $e$ la base des logarithmes népériens, par $m$ et $m'$ les deux racines d'une équation du second degré, dont les valeurs sont

$$m=\tfrac{1}{2}(p+p')+\tfrac{1}{2}\sqrt{(p-p')^2+4qq'},$$
$$m'=\tfrac{1}{2}(p+p')-\tfrac{1}{2}\sqrt{(p-p')^2+4qq'},$$

et par $\gamma$ et $\gamma'$ les deux constantes arbitraires que l'on déterminera d'après les valeurs de $x$ et $x'$ qui répondent à $t=0$.

Les valeurs de $m$ et $m'$ sont évidemment réelles. De plus, les quatre quantités $p$, $p'$, $q$, $q'$, étant positives, et la quantité contenue sous le radical étant la même chose que

$$(p+p')^2-4(pp'-qq'),$$

on voit que les valeurs de $m$ et $m'$ seront aussi toutes deux positives, si $pp'$ surpasse $qq'$, ce qui a effectivement lieu. En effet, si l'on compare les intégrales d'où dépendent les valeurs de $b\lambda(1+f)$ et $b'\text{Є}'$, et celles de $b'\lambda'(1+f')$ et $b\text{Є}$, il sera facile de s'assurer, en ayant égard à leurs limites, que l'on a toujours

$$b\lambda(1+f)>b'\text{Є}', \quad b'\lambda'(1+f')>b\text{Є};$$

d'où l'on conclut $pp' > qq'$, en observant que la quantité $\lambda_{\prime}$ contenue dans $p$ et $p'$ est positive. Il s'ensuit qu'après un certain temps les exponentielles $e^{-mt}$ et $e^{-m't}$ sont sensiblement nulles; les valeurs de $x$ et $x'$ le sont donc aussi, et les températures $u$ et $u'$ des deux corps A et A' ne diffèrent plus sensiblement de la température $\zeta$ de l'enceinte, quelles qu'aient été leurs valeurs initiales; ce qui est conforme à l'expérience. L'exponentielle qui répond à la plus grande des deux quantités $m$ et $m'$ s'évanouira la première; et quand elle aura disparu, les températures de A et A' varieront toutes deux suivant une même progression géométrique, le temps croissant par des intervalles égaux. Si le cas particulier de $pp' = qq'$ n'était pas impossible, l'une des quantités $m$ et $m'$ serait zéro quand il aurait lieu, et alors les variables $x$ et $x'$ convergeraient vers des valeurs constantes, qui ne seraient pas nulles; au bout d'un certain temps, les températures de A et A' deviendraient donc constantes, mais inégales et différentes de la température de l'enceinte; ce qui ne saurait arriver; et, effectivement, le cas de $pp' = qq'$ est impossible, comme celui de $pp' < qq'$, d'après l'origine des quantités $p$, $p'$, $q$, $q'$.

Cette analyse pourra s'étendre au cas de trois ou d'un plus grand nombre de corps contenus dans une même enceinte fermée, dont la température est invariable. On formera toujours des équations différentielles du premier ordre, en nombre égal à celui de ces corps, qui seront non linéaires et non intégrables sous forme finie. Dans le cas des températures ordinaires, on réduira ces équations, comme les précédentes, à la forme linéaire; on les intégrera ensuite sans difficulté; et l'on conclura de la forme de leurs intégrales, qu'au bout d'un certain temps les températures de tous les corps varieront, à très peu près, suivant une même progression géométrique, pour des temps équi-différens, et qu'après un temps encore plus long, elles cesseront de varier, et seront alors toutes égales entre elles et à la température donnée de l'enceinte.

# CHAPITRE IV.

*Mouvement de la chaleur dans l'intérieur des corps solides ou liquides.*

(44). Il y a toujours de la chaleur en mouvement dans tous les corps, lors même que les températures de tous leurs points sont invariables, soit que chaque point ait une température particulière, soit qu'ils aient tous une même température. Mais l'expression *mouvement de la chaleur* est prise ici dans un autre sens; elle signifie la variation de température qui a lieu d'un instant à l'autre dans un corps qui s'échauffe ou se refroidit; et la vitesse de ce mouvement, en chaque point du corps, est le premier coefficient différentiel de la température par rapport au temps.

J'appellerai A le corps solide ou liquide, homogène ou hétérogène, dans lequel nous allons considérer le mouvement de la chaleur. Soient M un point quelconque de A, et $m$ une partie de ce corps, de grandeur insensible (nº 7), et comprenant le point M. Au bout d'un temps quelconque $t$, désignons par $x$, $y$, $z$, les trois coordonnées rectangulaires de M, par $v$ le volume de $m$, et par $\rho$ sa densité, de sorte qu'on ait

$$m = v\rho.$$

Soient aussi, au même instant, $u$ la température et $\delta$ la vitesse du mouvement de la chaleur qui répondent au point M.

La quantité $u$ sera une fonction de $t$, $x$, $y$, $z$, dépendante d'une équation aux différences partielles par rapport à ces quatre variables, qu'il s'agira de former. Si A est un corps solide, et qu'on fasse abstraction de ses petites dilatations, positives ou négatives, produites par les variations de $u$ relatives au temps, les coordonnées $x$, $y$, $z$,

seront indépendantes de $t$, et l'on aura simplement

$$\delta = \frac{du}{dt}.$$

Si au contraire on a égard aux petits déplacemens du point M provenant de ces dilatations, ou bien, si A est un fluide dans lequel l'inégalité des températures, ou toute autre cause, donne lieu à des mouvemens de ses molécules, les coordonnées $x$, $y$, $z$, seront des fonctions de $t$; et l'on aura alors, par les règles connues de la différentiation des fonctions de fonctions,

$$\delta = \frac{du}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dt}\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dt}\frac{du}{dz}; \qquad (1)$$

expression dans laquelle $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, seront les composantes de la vitesse du point M, parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$.

L'inconnue $u$ ne sera pas la seule qu'il faudra déterminer, pour connaître complètement l'état calorifique du corps A à un instant quelconque. Supposons que l'on divise ce corps en deux parties B et B', par une surface quelconque, tracée dans son intérieur. Soit $\omega$ un élément de cette surface (n° 9) comprenant le point M, il y aura continuellement, à travers $\omega$, un *flux de chaleur* semblable à celui de la chaleur rayonnante qui a lieu à travers un élément de la surface de A, et que je représenterai par $\Gamma\omega dt$ pendant l'instant $dt$, de manière que ce produit, positif ou négatif, soit l'excès de la chaleur qui traverse $\omega$ en passant de B en B', pendant cet instant, sur celle qui le traverse en même temps, en passant de B' dans B. Le coefficient $\Gamma$, ou le flux de chaleur rapporté aux unités de temps et de surface, dépendra de la matière et de la température de A au point M, et de la direction de $\omega$; il s'agira aussi de le déterminer, en fonction de $t$, $x$, $y$, $z$, pour chaque direction donnée de $\omega$. Ainsi, $u$ et $\Gamma$ seront les deux inconnues du problème dont nous aurons à nous occuper dans ce chapitre. Quand le corps A est soumis à l'influence de foyers constans de chaleur, toutes ses parties parviennent généralement, après un certain temps, à des températures variables d'un point à un autre, mais indépendantes du temps. Dans cet état permanent de A, la vitesse $\delta$ est nulle en tous ses points; mais le flux de cha-

leur Γ existe encore, et seulement sa valeur est indépendante de $t$, comme celle de $u$.

(45). Soient M′ un second point de A très voisin de M, et $m'$ une partie de A de grandeur insensible, comme $m$, qui comprendra M′. Au bout du temps $t$, appelons $x'$, $y'$, $z'$, les coordonnées de M′ rapportées aux mêmes axes que $x$, $y$, $z$, et désignons par $u'$ la température de $m'$; soit aussi $r$ la distance MM′.

D'après l'hypothèse générale sur laquelle est fondée la théorie mathématique de la chaleur (n° 7), il y aura un échange continuel de chaleur entre $m$ et $m'$. Je représenterai par $\delta$ l'augmentation de chaleur qui en résultera pour $m$ pendant l'instant $dt$, c'est-à-dire, l'excès positif ou négatif, pendant cet instant, de la chaleur émanée de $m'$ et absorbée par $m$, sur la chaleur émanée de $m$ et absorbée par $m'$. On pourra supposer cet excès proportionnel au produit $mm'dt$, ou à $vv'\rho\rho'dt$, en appelant $v'$ et $\rho'$ le volume et la densité de $m'$, de sorte qu'on ait $m' = v'\rho'$, comme on a déjà $m = v\rho$. Il sera nul dans le cas de $u' = u$, et de même signe que la différence $u' - u$, quand elle ne sera pas zéro; dans le vide, il varierait en raison inverse du carré de $r$; et généralement sa valeur sera de la forme

$$\delta = \frac{vv'}{r^2} \mathrm{R} (u' - u) dt, \qquad (2)$$

en désignant par R un coefficient positif, dans lequel nous comprenons le facteur $\rho\rho'$, qui décroîtra très rapidement pour des valeurs croissantes de $r$, qui pourra aussi dépendre des matières et des températures de $m$ et $m'$, et variera avec la direction de MM′, lorsque l'absorption de la chaleur ne sera pas la même en tous sens autour de M.

Dans la supposition la plus générale, R sera donc une fonction de $r$, $u$, $u'$, et des coordonnées de M et M′; en sorte que l'on aura

$$\mathrm{R} = \Phi(r, u, u', x, y, z, x', y', z').$$

Mais si l'on appelle $\delta'$ la diminution de chaleur de $m'$ pendant l'instant $dt$, provenant de l'échange entre $m$ et $m'$, on aura évidemment $\delta' = -\delta$; d'ailleurs, la valeur de $\delta'$ devra se déduire de celle de $\delta$ par la permutation des quantités relatives à l'un des points M

et M', et des quantités analogues qui répondent à l'autre; par conséquent, il faudra que la fonction Φ soit symétrique par rapport à $u$ et $u'$, $x$ et $x'$, $y$ et $y'$, $z$ et $z'$.

Le corps A étant un solide ou un liquide, cette fonction Φ variera très rapidement avec $r$ et sera insensible ou nulle, dès que $r$ aura atteint une très petite grandeur. Je désignerai cette limite par $l$, de sorte que cette fonction Φ soit zéro, dès qu'on aura $r > l$ ou seulement $r = l$. Cette ligne $l$ sera donc très petite, mais de grandeur sensible et mesurable (n° 41), et, par conséquent, extrêmement grande par rapport aux dimensions de $m$ et $m'$.

(46). L'augmentation totale de chaleur de $m$ pendant l'instant $dt$ sera la somme des valeurs de $\delta$, étendue à tous les points M' dont la distance au point M est moindre que $l$. J'indiquerai une telle somme par la caractéristique Σ. Le facteur $vdt$ étant commun à toutes les valeurs de $\delta$, leur somme sera

$$vdt\Sigma\frac{R}{r^2}(u'-u)v'.$$

Mais pendant l'instant $dt$, la température de $m$ augmente de $\vartheta dt$; si donc on appelle $c$ sa chaleur spécifique, $cv\vartheta dt$ sera aussi son augmentation de chaleur pendant cet instant; donc en supprimant le facteur commun $vdt$, on aura

$$c\vartheta = \Sigma\frac{R}{r^2}(u'-u)v', \qquad (3)$$

pour l'équation du mouvement de la chaleur, également applicable à un corps solide et à un liquide, en y substituant l'expression convenable de $\vartheta$.

La somme Σ, contenue dans cette équation, ne dépend en effet que de l'état calorifique de $m$ et des parties circonvoisines de A, qui existe au bout du temps $t$, et en aucune manière du changement qui pourrait avoir lieu l'instant d'après; en sorte qu'il n'était pas nécessaire de chercher, comme des géomètres l'ont pensé, une équation particulière pour le mouvement de la chaleur dans les liquides, distincte de celle qui répond aux corps solides hétérogènes, et qui avait été donnée depuis long-temps.

La valeur d'une somme Σ relative à des parties de grandeur insen-



sible, telle que la précédente, peut s'exprimer par une série dont le premier terme est une intégrale prise entre les mêmes limites que cette somme, et dont les autres termes procèdent suivant les dimensions de ces parties, élevées à des puissances croissantes. Ces dimensions étant insensibles par hypothèse, il s'ensuit que la série est, en général, extrêmement convergente, et peut être réduite à son premier terme. Ainsi, en désignant par $dv'$ l'élément différentiel du volume de A, qui répond au point M', on aura, sans erreur appréciable,

$$\Sigma\ \frac{R}{r^2}(u'-u)v' = \int \frac{R}{r^2}(u'-u)\,dv';$$

l'intégrale s'étendant à tous les élémens $dv'$, dont la distance $r$ au point M est moindre que $l$.

A la vérité, j'ai remarqué dans d'autres occasions que la réduction d'une somme à une intégrale n'est plus permise dans un certain cas qui se présente, par exemple, dans le calcul des forces moléculaires; mais pour que cette exception ait lieu, il faut que la fonction dont on veut sommer les valeurs, varie très rapidement et change de signe entre les limites de cette sommation; or, ici le coefficient R varie bien en effet très rapidement avec la variable $r$, mais sans jamais changer de signe; et, pour cette raison, l'exception dont il s'agit n'est pas à craindre. Dans tous les calculs de quantités de chaleur qui résulteront d'échanges entre les parties d'un corps, de grandeur insensible, on pourra décomposer immédiatement son volume en élémens infiniment petits, et remplacer les sommes par des intégrales, comme si ce corps était formé d'une matière continue et non pas de molécules disjointes, séparées par des pores ou espaces vides.

(47). Du point M comme centre et d'un rayon égal à l'unité linéaire, décrivons une surface sphérique; soit $ds$ l'élément différentiel de cette surface, auquel aboutit le rayon dont la direction est celle de MM', nous aurons

$$dv' = r^2 dr ds;$$

et d'après la valeur de la somme $\Sigma$, l'équation (3) deviendra

$$c\frac{du}{dt} = \iint R\,(u'-u)\,dr ds. \quad (4)$$

On y a mis, pour abréger $\frac{du}{dt}$ au lieu de $\delta$; mais on se souviendra que ce coefficient différentiel doit être pris par rapport à $t$ et à tout ce qui en dépend; en sorte qu'il faudra remplacer $\frac{du}{dt}$ par la formule (1), lorsque les coordonnées $x, y, z$, du point M varieront avec le temps.

La limite relative à $r$ de l'intégrale contenue dans cette équation (4) ne sera pas la même, selon que la distance du point M à la surface de A surpassera $l$ ou sera moindre que cette petite ligne. Dans ce chapitre on supposera que ce soit le premier cas qui ait lieu; l'intégrale relative à $r$ devra alors être prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = l$, dans toutes les directions autour de M; on pourra donc écrire l'équation (4) sous la forme

$$c\frac{du}{dt} = \int_0^l [\int \mathrm{R}(u' - u)\, ds]\, dr; \qquad (5)$$

l'intégrale relative à $ds$ devra s'étendre à tous les élémens $ds$ de la surface sphérique, et par la réduction en série, on en obtiendra facilement la valeur approchée.

(48). Pour cela, je désigne par $\alpha, \beta, \gamma$, les angles que la droite MM′ fait avec des parallèles aux axes des $x, y, z$, menées par le point M. A cause de $\mathrm{MM}' = r$, il en résultera

$$x' - x = r\cos\alpha, \quad y' - y = r\cos\beta, \quad z' - z = r\cos\gamma;$$

et, d'après le théorème de Taylor, on aura

$$\begin{aligned} u' - u = {} & \frac{du}{dx} r\cos\alpha + \frac{du}{dy} r\cos\beta + \frac{du}{dz} r\cos\gamma \\ & + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} r^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dy^2} r^2\cos^2\beta + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dz^2} r^2\cos^2\gamma \\ & + \frac{d^2u}{dxdy} r^2\cos\alpha\cos\beta + \frac{d^2u}{dxdz} r^2\cos\alpha\cos\gamma + \frac{d^2u}{dydz} r^2\cos\beta\cos\gamma \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Si l'on développe de même R suivant les puissances et les produits de $u' - u$, $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, on aura aussi

$$R = V + \left(\frac{dR}{du'}\right)(u' - u) + \left(\frac{dR}{dx'}\right)(x' - x) + \left(\frac{dR}{dy'}\right)(y' - y) + \left(\frac{dR}{dz'}\right)(z' - z) + \text{etc.};$$

les parenthèses indiquant ici que l'on doit faire $u' = u$, $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, après les différentiations qui supposent $r$ invariable, et V désignant ce que devient en même temps la fonction $\Phi$ du n° 45, de sorte que l'on a

$$V = \Phi\,(r,\ u,\ u,\ x,\ y,\ z,\ x,\ y,\ z).$$

Au moyen de ces développemens de R et de $u' - u$, celui du produit R $(u' - u)$ se composera de termes de cette forme

$$Hr^n \cos^i \alpha \cos^{i'} \beta \cos^{i''} \gamma;$$

H désignant un coefficient indépendant de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et les exposans $i$, $i'$, $i''$, étant des nombres entiers et positifs qui ne seront pas nuls tous les trois à la fois, et dont l'exposant $n$ est la somme $i + i' + i''$. Or, en ayant égard aux limites de l'intégrale relative à $ds$, on aura

$$\int \cos^i \alpha \cos^{i'} \beta \cos^{i''} \gamma ds = 0,$$

toutes les fois que l'un des trois nombres $i$, $i'$, $i''$, sera impair; car alors cette intégrale se composera d'élémens qui seront deux à deux égaux et de signes contraires. Quand aucun des nombres $i$, $i'$, $i''$, ne sera impair, l'intégrale ne sera pas zéro; les règles ordinaires en donneront les valeurs exactes, quels que soient ces trois nombres; et de cette manière on aura

$$\int R\,(u' - u)\,ds = H_2 r^2 + H_4 r^4 + H_6 r^6 + \text{etc.}; \qquad (6)$$

les quantités $H_2$, $H_4$, $H_6$, etc., étant des fonctions différentielles de forme connue, dans chacune desquelles les différences partielles de $u$ seront prises par rapport à $x$, $y$, $z$, et s'élèveront à l'ordre marqué par son indice inférieur.

Pour une température $u$ qui varierait très rapidement, de sorte qu'elle ait des valeurs très différentes dans l'étendue du rayonnement

intérieur, les coefficiens $H_2$, $H_4$, $H_6$, etc., formeraient une série très rapidement croissante, à cause des différences partielles de $u$ dont ils dépendent. La série (6) cesserait alors d'être convergente, malgré la petitesse de $r^2$; mais ce cas n'a pas lieu en un point M suffisamment éloigné, comme on le suppose, de la surface de A; et nous pourrons, en conséquence, regarder la série (6) comme extrêmement convergente.

En s'arrêtant à son $n^{ième}$ terme, l'équation aux différences partielles du mouvement de la chaleur sera de l'ordre $2n$; mais son intégrale complète renfermera certaines parties qui varieront très rapidement, et que l'on devra supprimer pour cette raison, dans la valeur de $u$, comme étrangères à la question; ce qui réduira toujours cette valeur au même degré de généralité, quel que soit son degré d'approximation, dépendant des termes de la série (6) que l'on aura conservés. C'est ce que nous ferons voir par la suite, sur un exemple particulier, dans lequel nous montrerons aussi l'influence que peut avoir l'étendue sensible du rayonnement intérieur sur la valeur de $u$. Mais pour réduire l'équation générale du mouvement de la chaleur à la forme la plus simple, c'est-à-dire, à la forme d'une équation aux différences partielles du second ordre, ainsi qu'on le fait ordinairement, nous bornerons l'approximation au premier terme de la série (6); ce qui revient à considérer comme insensible l'étendue du rayonnement dans l'intérieur des corps solides et des liquides.

(49). Dans cette hypothèse, on arrêtera le développement de R aux termes dépendans du carré de $r$ exclusivement. A cause de la symétrie de R par rapport à $u$ et $u'$, $x$ et $x'$, $y$ et $y'$, $z$ et $z'$, et de ce que V représente, on a évidemment

$$\left(\frac{dR}{du'}\right)=\frac{1}{2}\frac{dV}{du},\ \left(\frac{dR}{dx'}\right)=\frac{1}{2}\frac{dV}{dx},\ \left(\frac{dR}{dy'}\right)=\frac{1}{2}\frac{dV}{dy},\ \left(\frac{dR}{dz'}\right)=\frac{1}{2}\frac{dV}{dz};$$

il en résultera donc

$$R=V+\frac{1}{2}\frac{dV}{du}(u'-u)+\frac{1}{2}\frac{dV}{dx}(x'-x)+\frac{1}{2}\frac{dV}{dy}(y'-y)+\frac{1}{2}\frac{dV}{dz}(z'-z);$$

et de cette valeur jointe à celle de $u'-u$, on conclura

$$H_2 = \frac{1}{2}\left[V\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{dV}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dV}{dx}\right)\frac{du}{dx}\right]\int \cos^2 \alpha ds$$
$$+ \frac{1}{2}\left[V\frac{d^2u}{dy^2} + \left(\frac{dV}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dV}{dy}\right)\frac{du}{dy}\right]\int \cos^2 \mathcal{C} ds$$
$$+ \frac{1}{2}\left[V\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{dV}{du}\frac{du}{dz} + \frac{dV}{dz}\right)\frac{du}{dz}\right]\int \cos^2 \gamma ds,$$

ou plus simplement

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(V\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dV}{dx}\frac{du}{dx}\right)\int \cos^2 \alpha ds$$
$$+ \frac{1}{2}\left(V\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{dV}{dy}\frac{du}{dy}\right)\int \cos^2 \mathcal{C} ds$$
$$+ \frac{1}{2}\left(V\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{dV}{dz}\frac{du}{dz}\right)\int \cos^2 \gamma ds;$$

les différences partielles de V par rapport à $x$, $y$, $z$, étant prises en considérant $u$ comme une fonction de ces trois coordonnées, et sans faire varier $r$.

On a d'ailleurs

$$\int \cos^2 \alpha ds = \int \cos^2 \mathcal{C} ds = \int \cos^2 \gamma ds.$$

De plus, si l'on appelle $\psi$ l'angle que fait le plan de la droite MM′ et d'une parallèle à l'axe des $x$ menée par le point M, avec un plan fixe mené par cette parallèle, on aura

$$ds = \sin \alpha d\alpha d\psi;$$

et l'intégrale relative à $ds$ devant s'étendre à toute la surface sphérique à laquelle cet élément appartient, il en résultera

$$\int \cos^2 \alpha ds = \int_0^\pi \cos^2 \alpha \sin \alpha \, d\alpha \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{4\pi}{3}.$$

Donc en réduisant la valeur de $R(u' - u)$ au premier terme $H_2 r^2$ de la série (6), l'équation (5) deviendra

$$c\frac{du}{dt} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\int_0^l Vr^4dr + \frac{du}{dx}\int_0^l \frac{dV}{dx} r^4dr\right)$$
$$+ \frac{2\pi}{3}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\int_0^l Vr^4dr + \frac{du}{dy}\int_0^l \frac{dV}{dy} r^4dr\right)$$
$$+ \frac{2\pi}{3}\left(\frac{d^2u}{dz^2}\int_0^l Vr^4dr + \frac{du}{dz}\int_0^l \frac{dV}{dz} r^4dr\right).$$

La fonction V étant nulle pour toutes les valeurs de $r$ plus grandes que $l$, on pourra maintenant étendre les intégrales relatives à $r$ au-delà de cette limite, et si l'on veut jusqu'à $r = \infty$. Si l'on fait alors

$$\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty Vr^2 dr = k,$$

$k$ sera une fonction de $u, x, y, z$, et l'on aura

$$\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{dV}{dx} r^2 dr = \frac{dk}{dx},$$
$$\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{dV}{dy} r^2 dr = \frac{dk}{dy},$$
$$\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{dV}{dz} r^2 dr = \frac{dk}{dz};$$

par conséquent, l'équation générale du mouvement de la chaleur deviendra finalement

$$c\frac{du}{dt} = \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}. \qquad (7)$$

Quand tous les points de A seront parvenus à un état stationnaire, on aura $\frac{du}{dt} = 0$, et il en résultera

$$\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz} = 0,$$

pour l'équation relative à cet état permanent.

(50). L'équation (7) coïncide avec celle que j'ai trouvée autrefois pour le cas d'un corps hétérogène (*), mais en ne supposant point alors que la quantité $k$ dépendît de la température $u$.

Si A est un corps homogène, $k$ ne dépendra que de $u$, et l'équation (7) se changera en celle-ci :

$$c\frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \frac{dk}{du}\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right). \qquad (8)$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 19e cahier, page 87.

En supposant que cette quantité $k$ soit indépendante de $u$, on aurait l'équation

$$c\,\frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right), \qquad (9)$$

que l'on donne ordinairement, et qui se réduit, dans le cas de l'état permanent, à une équation indépendante des deux quantités $c$ et $k$, savoir :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

Après avoir obtenu l'équation (9), en considérant $c$ et $k$ comme des quantités constantes, on supposait qu'elle conservera la même forme lorsque ces quantités seront variables, qu'il suffira d'y mettre pour $\frac{k}{c}$ une fonction donnée de $u$, et que l'équation relative à l'état permanent n'éprouve aucun changement. Mais on voit que ces suppositions ne sont point admissibles : l'équation (9) et celle qui s'en déduit dans le cas de $\frac{du}{dt} = 0$, ne sont point, dans le cas même d'un corps homogène, l'équation exacte du mouvement de la chaleur et celle de l'état permanent; et la formule (8) montre qu'indépendamment des différences partielles de $u$, du second ordre par rapport à $x$, $y$, $z$, les véritables équations doivent aussi contenir les carrés de ses différences partielles du premier ordre.

Pour avoir égard aux déplacemens des points de A, produits par les dilatations et condensations dues aux variations de température, ou par d'autres causes, on remplacera, comme on l'a dit plus haut, $\frac{du}{dt}$ par la formule (1), et l'équation (7) deviendra

$$\begin{aligned} c\left(\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}\right) \\ = \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}. \end{aligned} \qquad (10)$$

C'est cette équation (10) que l'on devra joindre, par exemple, aux équations ordinaires du mouvement des liquides, pour les compléter,

ainsi que je l'ai déjà proposé dans mon *Traité de Mécanique* et dans un mémoire précédent.

(51). Occupons-nous maintenant de la détermination du flux de chaleur $\Gamma$ (n° 44), correspondant à l'élément $\omega$ d'une surface qui divise A en deux parties B et B'.

Supposons que le point de la surface auquel répond l'élément $\omega$ soit le point M de A, que nous avons considéré précédemment, qui est situé à une distance de la surface de ce corps plus grande que $l$, et dont la température et les coordonnées sont $u$, $x$, $y$, $z$, au bout du temps $t$; prenons dans B un point $M_1$ et dans B' un point M', très voisins l'un et l'autre de M, et appartenant avec M à une ligne droite $M_1MM'$ (fig. 10); soient $m_1$ et $m'$ des parties de B et B', de grandeur insensible, et qui comprennent les points $M_1$ et M'; appelons $u_1$ et $u'$ leurs températures au bout du temps $t$; soient aussi $v_1$ et $v'$ leurs volumes; $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées de $M_1$, et $x'$, $y'$, $z'$ celles de M'; faisons

$$M_1M = r, \quad M'M = r', \quad M_1M' = r + r' = r_1;$$

et désignons par $\delta$ la diminution de chaleur de $m_1$, provenant de l'échange entre $m_1$ et $m'$ pendant l'instant $dt$. D'après la formule (2), nous aurons

$$\delta = \frac{v_1 v'}{r_1^2} R_1 (u_1 - u') dt;$$

$R_1$ étant ce que devient la fonction $\Phi$ du n° 45, quand on y met les quantités qui répondent aux points $M_1$ et M', de sorte que l'on ait

$$R_1 = \Phi (r_1, u_1, u', x_1, y_1, z_1, x', y', z').$$

Cela posé, si nous concevons un cône circonscrit à l'élément $\omega$ et ayant son sommet au point $M_1$, et si nous appelons $\Delta$ la somme des valeurs de $\delta$ relatives à toutes les parties de B' comprises dans ce cône, nous aurons

$$\Delta = v_1 dt \int\int R_1 (u_1 - u') dr_1 ds,$$

en remplaçant la somme par une intégrale (n° 46), et $v'$ par l'élément différentiel $r_1^2 dr_1 ds$, du volume de B' qui répond au point M';

dans lequel élément, $ds$ est celui d'une surface sphérique décrite du point $M_1$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. La distance du point $M_1$ à la surface de A étant plus grande que $l$, nous prendrons en conséquence l'intégrale relative à $r_1$, depuis $r_1 = r$ jusqu'à $r_1 = l$. Quant à l'intégrale relative à $ds$, elle devra s'étendre à la portion de surface sphérique interceptée par le cône, et que nous représenterons par $\sigma$.

Maintenant on obtiendra la somme des valeurs de $\Delta$ relatives à toutes les parties de B, telles que $m_1$, au moyen d'une nouvelle intégrale triple, dans laquelle on prendra pour $v_1$ l'élément différentiel du volume de B correspondant au point $M_1$. Si l'on mène par le point M, une normale $N_1MN'$ à la surface de séparation de B et B', dont $MN_1$ soit la partie comprise dans B; que l'on fasse

$$M_1MN_1 = \theta,$$

et que l'on désigne par $\psi$ l'angle que fait le plan de $MN_1$ et $MM_1$, avec un plan fixe passant par $MN_1$, cette expression différentielle de $v_1$ sera $r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi$. L'intégrale relative à $r$ s'étendra depuis $r = 0$ jusqu'à $r = l$; on intégrera depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 2\pi$, et seulement depuis $\theta = 0$ jusqu'à la valeur de $\theta$ qui a lieu à la surface de B, et que je représenterai par $\theta - i$, de sorte que $i$ soit un très petit angle dépendant de la courbure de cette surface au point M.

Or, cette somme des valeurs de $\Delta$ sera évidemment la valeur du flux de chaleur $\Gamma\omega dt$ à travers l'élément $\omega$; car, d'après l'éloignement du point $M_1$ de la surface de A, toute la chaleur émise par chacune des deux parties B et B' est absorbée par l'autre; par conséquent, nous aurons

$$\Gamma\omega = \int R_1 (u_1 - u') r^2 \sin\theta dr dr_1 ds d\theta d\psi.$$

L'intégrale relative à $ds$ étant une intégrale double, il s'ensuit que la valeur rigoureuse de $\Gamma$ dépend d'une intégrale sextuple; ce qui devait être, puisque ce flux de chaleur dépend de l'action réciproque des parties de B et de B'; mais sa valeur approchée se réduira, comme on va le voir, à une intégrale simple.

(52). D'abord, à cause de la petitesse des dimensions de $\omega$, que l'on suppose insensibles par rapport à $l$, nous pouvons considérer $u'$

et $R_1$ comme étant sensiblement invariables dans l'intégration relative à $ds$, qui se réduira alors à changer $ds$ en $\sigma$. Par la même raison, et en observant que $\omega \cos \theta$ est la projection de $\omega$ sur un plan mené par le point M perpendiculairement à la droite $MM_1$, on pourra aussi prendre

$$r^2\sigma = \omega \cos \theta,$$

même pour les valeurs de $r$ comparables aux dimensions de $\omega$, sans qu'il en puisse résulter aucune erreur sensible dans la valeur totale de $\Gamma\omega$.

A raison de ce facteur cos $\theta$, qui sera introduit sous le signe $\int$, la partie de $\Gamma$ dépendante de l'angle $i$, ou de la forme de B, aura pour coefficient le carré de la fonction des rayons de courbure qui entre dans l'expression de l'action capillaire; en sorte que la courbure des surfaces influe beaucoup moins sur le flux de chaleur que sur les phénomènes de la capillarité. Son influence sera tout-à-fait nulle au degré d'approximation où nous allons nous arrêter.

Après avoir développé le produit $R_1(u_1 - u')$ en série, nous bornerons l'approximation comme dans le n° 49, au premier terme de ce développement. Cela étant, nous pourrons négliger $i$, et étendre l'intégrale relative à $\theta$, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Il n'y aurait d'exception que si les rayons de courbure de la surface de B au point M, étaient très petits et comparables à $l$; mais nous supposerons que ce cas n'ait pas lieu. De cette manière, en supprimant le facteur commun $\omega$, nous aurons

$$\Gamma = \int_0^l \int_0^l \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} R_1(u_1 - u') \cos\theta \sin\theta dr dr_1 d\theta d\psi. \quad (11)$$

Pour simplifier le calcul, je prends l'axe des $x$ parallèle à la normale $N_1MN'$; je le suppose aussi dirigé dans le sens de la partie $MN'$ comprise en dehors de B, et le plan d'où l'on compte l'angle $\psi$, parallèle à celui des $x$ et $y$; en sorte que $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\sin\psi$, soient les cosinus des angles que fait la ligne $MM'$ avec les prolongemens des coordonnées $x$, $y$, $z$, du point M, ou ceux des supplémens des angles compris entre $MM_1$ et ces mêmes prolongemens. On aura alors

$$x_1 = x - r\cos\theta, \quad y_1 = y - r\sin\theta\cos\psi, \quad z_1 = z - r\sin\theta\sin\psi,$$
$$x' = x + r'\cos\theta, \quad y' = y + r'\sin\theta\cos\psi, \quad z' = z + r'\sin\theta\sin\psi,$$

pour les coordonnées de $M_1$ et $M'$. En négligeant les carrés de $r$ et $r'$, il en résultera

$$u_1 = u - \frac{du}{dx} r \cos\theta - \frac{du}{dy} r \sin\theta \cos\psi - \frac{du}{dz} r \sin\theta \sin\psi,$$

$$u' = u + \frac{du}{dx} r' \cos\theta + \frac{du}{dy} r' \sin\theta \cos\psi + \frac{du}{dz} r' \sin\theta \sin\psi,$$

et, par conséquent,

$$u_1 - u' = -\frac{du}{dx} r_1 \cos\theta - \frac{du}{dy} r_1 \sin\theta \cos\psi - \frac{du}{dz} r_1 \sin\theta \sin\psi,$$

à cause de $r_1 = r + r'$. En même temps, on réduira dans $R_1$ les températures et les coordonnées de $M_1$ et $M'$ à leurs premiers termes, c'est-à-dire, à la température $u$ et aux coordonnées $x$, $y$, $z$, de $M$; ce qui donnera $R_1 = V_1$, en désignant par $V_1$ ce que devient la quantité V du n° 48, quand on y met $r_1$ au lieu de $r$. Cela étant, les intégrations relatives à $\theta$ et $\psi$ s'effectueront immédiatement dans l'expression de $\Gamma$; les termes dépendans de $\frac{du}{dy}$ et $\frac{du}{dx}$ disparaîtront, et l'on aura simplement

$$\Gamma = -\frac{2\pi}{3}\frac{du}{dx}\int_0^l \left(\int_r^l V_1 r_1 dr_1\right) dr.$$

Je fais, pour un moment,

$$\int_r^l V_1 r_1 dr_1 = fr;$$

de sorte que $fr$ soit une fonction qui s'évanouira pour $r = l$, et telle qu'en la différentiant par rapport à $r$, on aura

$$\frac{dfr}{dr} = -Vr.$$

En intégrant par partie, on a généralement,

$$\int frdr = rfr - \int \frac{dfr}{dr} rdr;$$

donc, puisque le produit $rfr$ s'évanouit aux deux limites $r = 0$ et $r = l$,

on aura

$$\int_0^l frdr = -\int_0^l \frac{dfr}{dr} rdr;$$

et en remettant pour $fr$ et $\frac{dfr}{dr}$ leurs valeurs précédentes, il en résultera

$$\int_0^l \left(\int_r^l V_1 r_1 dr_1\right) dr = \int_0^l V r^2 dr;$$

par conséquent, en ayant égard à l'expression de la quantité $k$ du n° 49, on aura finalement

$$\Gamma = -k\frac{du}{dx}; \qquad (12)$$

quantité qui sera négative ou positive, comme cela doit être, selon que la température croîtra ou décroîtra près du point M, dans le sens de la normale MN' extérieure à B.

(53). Abstraction faite du signe, cette formule fait voir que les flux de chaleur rapportés aux unités de surface et de temps, et relatifs à un même point M, qui ont lieu à travers différens élémens de surfaces passant par ce point, sont entre eux comme les décroissemens de température suivant les directions perpendiculaires à ces élémens et relatifs à une même épaisseur infiniment petite. Pour une même valeur du rapport du décroissement de température à l'épaisseur correspondante, le flux de chaleur est proportionnel à la quantité $k$. La communication de la chaleur entre deux parties contiguës d'un corps a donc lieu, toutes choses d'ailleurs égales, avec plus ou moins de facilité, selon que cette quantité est plus ou moins grande ; c'est pourquoi l'on prend la quantité $k$ pour la mesure de la *conductibilité* de la chaleur dans l'intérieur d'un corps dont les différentes parties sont inégalement échauffées.

La valeur de $k$ est très différente dans les diverses matières, et ne peut être déterminée que par l'expérience pour chaque matière en particulier. Elle dépend aussi de la température; sous ce rapport, il y a lieu de croire que sa variation est plus grande, dans les corps solides, que celle de la chaleur spécifique, qui n'est sensible qu'à des températures très élevées. C'est, en général, dans les métaux que la conduc-

tibilité $k$ est la plus grande. Dans les liquides, elle est presque nulle; ainsi, lorsqu'un liquide en repos est échauffé à sa partie supérieure, ses couches inférieures s'échauffent très lentement; en sorte qu'il faut un temps très grand pour que sa température s'élève d'une manière sensible, à une profondeur peu considérable. Si, au contraire, le liquide est échauffé par en bas, ses parties inférieures se dilatent et s'élèvent, en conséquence, à raison de leur diminution de densité; en même temps, ses parties supérieures descendent; puis elles s'échauffent quand elles sont parvenues au bas du liquide, et remontent ensuite vers la surface. Il se produit ainsi, dans tout le liquide, un mouvement très compliqué et qu'il serait très difficile de soumettre au calcul, mais dont l'effet, quant à la chaleur, est de suppléer au défaut de conductibilité et de produire assez promptement une température égale dans la masse entière. Les mêmes choses ont lieu à l'égard des fluides aériformes : la conductibilité de la chaleur de proche en proche est à peu près nulle dans les différens gaz. Quand un gaz est en contact avec un corps chaud, il n'y a guère qu'une couche extrêmement mince du fluide qui s'échauffe directement; au-delà de cette couche, la chaleur se transmet dans le fluide, non-seulement par le déplacement de ses parties, mais aussi par l'absorption, en petite proportion, de la chaleur rayonnante émanée du corps chaud. Peut-être l'échauffement direct de la couche fluide, en contact avec ce corps, n'est-il que l'effet de cette absorption augmentée dans un très grand rapport par la condensation que produit l'attraction du corps, et qui rend la densité de cette couche beaucoup plus grande que la densité naturelle du fluide.

Dans l'intérieur des corps solides, comme le verre par exemple, qui sont traversés dans de grandes épaisseurs par la chaleur rayonnante émanée d'une source dont la température est très élevée, la chaleur se propage à la fois, de proche en proche en vertu de la conductibilité propre à chacun de ces corps, et par l'absorption plus ou moins grande de cette chaleur rayonnante.

(54). Il est possible que dans certains corps la conductibilité de la chaleur ne soit pas la même suivant toutes les directions autour de chaque point. Cela peut avoir lieu dans le bois, composé de fibres juxtaposées, et où la propagation de la chaleur est peut-être plus

facile dans le sens de ces fibres que dans le sens perpendiculaire à leurs directions. De même, dans l'intérieur des cristaux, il n'est pas impossible que la conductibilité de la chaleur soit différente dans le sens du *clivage* et suivant d'autres directions.

Pour que cette anomalie ait lieu dans le corps A, il faut que sa nature intime varie sensiblement dans l'étendue du rayonnement intérieur, c'est-à-dire dans une épaisseur égale à $l$. En calculant la valeur approchée de la formule (11), on ne pourra plus alors, comme on l'a fait tout à l'heure, réduire les coordonnées des points $M_1$ et $M'$ à celles du point M, dans l'expression de $R_1$. Mais si la température n'éprouve pas de changement brusque, et qu'elle soit au contraire sensiblement la même tout autour de chaque point M, dans l'étendue du rayonnement intérieur, on pourra encore mettre $u$ à la place de $u_1$ et $u'$ dans $R_1$, et développer l'autre facteur $u_1 - u'$, compris sous le signe $\int$, suivant les puissances de $r$ et $r'$. De cette manière, $R_1$ sera une fonction de $u$, $r$, $r'$, $\theta$, $\psi$, de forme inconnue, non-seulement par rapport à $r$ et $r'$, mais aussi par rapport à $\theta$ et $\psi$; les intégrations relatives à ces angles ne pourront donc plus s'effectuer comme dans le cas général; et la valeur approchée de $\Gamma$, déduite de l'équation (11), prendra la forme

$$\Gamma = -h\frac{du}{dx} - h'\frac{du}{dy} - h''\frac{du}{dz},$$

en arrêtant toujours le développement de $u_1 - u'$ aux premières puissances de $r$ et $r'$, et désignant par $h$, $h'$, $h''$, trois quantités positives, dépendantes de la température $u$ et de la constitution intime de A autour du point M.

Cette expression du flux de chaleur à travers l'élément $\omega$ est moins simple que la formule (12), et ne dépend plus seulement de l'accroissement de température dans le sens perpendiculaire à cet élément. L'équation du mouvement de la chaleur serait aussi plus compliquée que l'équation (7). Mais dans cet ouvrage je ferai abstraction de l'inégalité de conductibilité en différens sens, qui peut quelquefois exister; et sur ce point, je renverrai à un mémoire de M. Duhamel, inséré dans le 21e cahier du *Journal de l'École polytechnique*.

(55). Je vais maintenant faire voir le rapport qui existe entre la conductibilité $k$ et le pouvoir absorbant, dont on a représenté la me-

sure par $q$ dans le n° 11 ; je comparerai ensuite les flux de chaleur qui ont lieu dans l'intérieur et à la surface des corps.

La quantité $\delta$ contenue dans l'équation (2) de ce chapitre, est égale et de signe contraire à la quantité désignée par la même lettre dans l'équation (2) du n° 13. De ces deux équations, on conclura, en conséquence,

$$vv'R(u'-u)=\frac{1}{4\pi}pmm'(q\Pi'-q'\Pi).$$

On a d'ailleurs

$$m=\rho v,\quad m'=\rho' v',$$

et, en vertu de la formule (3) du numéro cité,

$$\Pi=qFu,\quad \Pi'=q'Fu';$$

la valeur de R, déterminée par l'équation précédente, sera donc

$$R=\frac{1}{4\pi}p\rho\rho' qq'\left(\frac{Fu'-Fu}{u'-u}\right).$$

Pour en déduire la quantité V qui entre dans l'expression de $k$, il y faut faire (n° 48) $u'=u$, et les coordonnées du point M' égales à celles de M, sans changer la distance $r$ ou MM' d'où dépend le facteur $p$. On aura donc

$$\frac{Fu'-Fu}{u'-u}=\frac{dFu}{du},\quad \rho'=\rho,\quad q'=q;$$

et en même temps on devra prendre pour $p$ la valeur de cette quantité qui a lieu dans un corps homogène dont la matière et la température sont partout les mêmes qu'au point M de A ; laquelle valeur est (n° 11)

$$p=e^{-\frac{r}{\epsilon}},$$

en désignant par $e$ la base des logarithmes népériens, et faisant

$$\frac{1}{\rho q}=\epsilon.$$

Par conséquent, la valeur de V sera

$$V = \frac{1}{4\pi} \rho^2 q^2 \frac{dFu}{du} e^{-\frac{r}{\epsilon}}.$$

La valeur correspondante de $k$ pourra s'écrire sous cette forme :

$$k = \frac{1}{6\rho q} \frac{dFu}{du} \int_0^l e^{-\frac{r}{\epsilon}} \frac{r^2 dr}{\epsilon^3};$$

celle de l'intégrale qu'elle contient est le double de $1 - e^{-\frac{l}{\epsilon}}$; mais la quantité $p$ devant être insensible à la limite $r = l$, on peut négliger l'exponentielle $e^{-\frac{l}{\epsilon}}$, et l'on aura simplement

$$k = \frac{1}{3\rho q} \frac{dFu}{du}.$$

La fonction F$u$ étant la même pour tous les corps, ce ne sera donc qu'à raison du facteur $\frac{1}{\rho q}$ ou $\epsilon$, que la conductibilité $k$ pourra varier d'un corps à un autre pour une même température. Si $\rho_1$, $q_1$, $k_1$, sont la densité, le pouvoir absorbant et la conductibilité d'un second corps, différent de A, on aura, à égalité de température,

$$\frac{k_1}{k} = \frac{\rho q}{\rho_1 q_1},$$

équation qui fera connaître le rapport $\frac{q}{q_1}$ des pouvoirs absorbans, lorsque celui des conductibilités aura été déterminé par l'expérience, et que le rapport des densités sera donné.

(56). D'après la valeur de F$u$ qu'on a trouvée dans le n° 26, on a

$$\frac{dFu}{du} = g \frac{d.\mu^u}{du};$$

$g$ étant une quantité de chaleur inconnue et commune à tous les corps, et $\mu$ le nombre constant 1,0077. La valeur précédente de $k$ deviendra donc

$$k = \frac{1}{3} g\epsilon \frac{d.\mu^u}{du};$$

au moyen de quoi celle de $\Gamma$ qui est donnée par l'équation (12), prendra la forme :

$$\Gamma = -\frac{1}{3}g\epsilon\frac{d.\mu^u}{dx}.$$

Dans un corps solide ou liquide, la ligne $\epsilon$ est très petite (nº 11); en désignant par $v$ la température qui a lieu sur la normale MN′, à la distance $\frac{1}{3}\epsilon$ de M, on pourra donc remplacer, avec une approximation suffisante, cette valeur de $\Gamma$ par celle-ci :

$$\Gamma = g(\mu^u - \mu^v),$$

afin de la rendre plus facilement comparable à celle du flux de chaleur qui a lieu à la surface de A. Pour des températures $u$ et $\zeta$ du corps et de l'enceinte où il est placé, l'expression de cet autre flux de chaleur est, en effet (nº 26),

$$\Gamma = ng(\mu^u - \mu^\zeta),$$

$n$ étant un nombre abstrait déterminé par la formule

$$n = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \alpha(1-\varphi)\cos\theta\sin\theta d\theta.$$

Si donc on représente par $\chi$ le rapport de la première valeur de $\Gamma$ à la seconde, on aura

$$\chi = \frac{\mu^u - \mu^v}{n(\mu^u - \mu^\zeta)}.$$

Or, la température $v$ différant extrêmement peu de $u$, tandis que $u$ peut différer beaucoup de $\zeta$, il faut donc que $n$ soit une fraction extrêmement petite, sans quoi le flux intérieur serait toujours incomparablement moindre que le flux extérieur, ce qui n'a certainement pas lieu.

Pour satisfaire à cette condition, il est nécessaire et il suffit que l'inconnue $\varphi$, contenue dans la valeur de $n$, et qui tient à la variation rapide de la température dans la couche superficielle de A (nº 21), soit très peu différente de l'unité; ce qui montre de nouveau la nécessité d'avoir égard à cette variation rapide de température, près de la surface des corps qui s'échauffent ou se refroidissent. Dans la très

petite épaisseur de la couche superficielle qui émet et absorbe la chaleur rayonnante, si la température variait très peu, comme à l'intérieur dans une égale épaisseur, on aurait $\varphi = 0$; la surface étant supposée entièrement perméable à la chaleur ou dépourvue de réflexibilité, le facteur $\alpha$ serait l'unité; la plus grande valeur de $n$ serait donc

$$n = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\theta \sin\theta dt = \frac{1}{4};$$

ce qui rendrait celle de $\chi$ tout-à-fait inadmissible.

La quantité $n$ étant donc une très petite fraction, à cause du facteur $1 - \varphi$ très peu différent de l'unité, il faut cependant que le flux extérieur dont $n$ est un facteur, ne devienne pas aussi extrêmement petit; et pour cela, il est nécessaire et il suffit que son autre facteur constant $g$ soit une très grande quantité de chaleur. Ainsi, la considération des deux quantités $\varphi$ et $g$ est indispensable pour accorder entre elles les expressions des deux flux de chaleur qui ont lieu dans l'intérieur et à la surface d'un corps, dont l'un résulte d'une très petite différence $u - v$ de température, l'autre d'une différence $u - \zeta$, incomparablement plus grande en général, et qui doivent avoir néanmoins des valeurs du même ordre de grandeur.

L'expérience ne détermine pas séparément les deux facteurs $n$ et $g$ du pouvoir rayonnant $ng$ ou $\lambda$ (nº 26): $n$ est très petit et variable, $g$ est constant et très grand, et leur produit peut être en conséquence tout ce que l'expérience donnera dans chaque cas pour la valeur de $\lambda$.

(57). Nous pouvons encore considérer sous un point de vue différent de celui qui nous a conduit à l'équation (12), la communication de la chaleur entres les deux parties contiguës B et B′ du corps A.

Pour cela, élevons en dehors de B un cylindre perpendiculaire à la surface commune de ces deux parties, et ayant pour base l'élément $\omega$ de cette surface, qui répond au point M situé, comme précédemment, à une distance de la surface de A plus grande que $l$. On pourra représenter, pendant l'instant $dt$, par $\Omega\omega dt$ l'excès de la chaleur émanée de B et absorbée par ce cylindre, sur la chaleur émanée de ce même cylindre et absorbée par B. La question qu'il s'agit maintenant de résoudre consiste à déterminer le coefficient $\Omega$, dont la va-

leur coïncidera, comme on va le voir, avec celle de $\Gamma$ qu'on a trouvée plus haut.

Désignons toujours au bout du temps $t$, par $u_1$ et $u'$, les températures des parties $m_1$ et $m'$ qui répondent au point $M_1$ et $M'$ de B et B', et par $u$ celle qui répond au point M de la surface de séparation; supposons actuellement que M' (fig. 11) soit situé sur la normale MN', et que la partie $m'$ appartienne au cylindre que nous considérons; du point $M_1$ abaissons une perpendiculaire $M_1P$ sur le plan tangent en M à la surface de B; et cela étant, faisons

$$MM' = r', \quad MP = r, \quad M_1P = \xi, \quad M'M_1 = r_1;$$

nous aurons

$$r_1^2 = r^2 + (r' + \xi)^2.$$

Les coordonnées de M étant $x, y, z$, et l'axe des $x$ étant dirigé, comme plus haut, dans le sens de la normale MN', les coordonnées du point M' seront $x + r', y, z$, et celles du point $M_1$ pourront être représentées par $x - \xi, y - r\cos\psi, z - r\sin\psi$, en désignant par $\psi$ un angle susceptible de croître depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 2\pi$. En vertu du théorème de Taylor, on aura donc

$$u_1 = u - \frac{du}{dx}\xi - \frac{du}{dy}r\cos\psi - \frac{du}{dz}r\sin\psi + \text{etc.},$$

$$u' = u + \frac{du}{dx}r' + \text{etc.}$$

L'expression de $\delta$ du n° 51 sera l'augmentation de chaleur de $m'$, provenant de l'échange entre $m'$ et $m_1$ pendant l'instant $dt$. On en déduira la valeur de $\Omega\omega dt$ par l'application immédiate des règles du calcul intégral (n° 46). Ainsi, en mettant dans cette expression de $\delta$, à la place de $v'$, le volume $\omega dr'$ d'une tranche infiniment mince du cylindre normal, et intégrant ensuite depuis $r' = 0$ jusqu'à $r' = l$, on obtiendra d'abord l'augmentation de chaleur du cylindre entier provenant de l'échange avec une seule partie $m_1$ de B. Cela fait, on en déduira la valeur totale de $\Omega\omega dt$ par une intégrale triple, relative aux variables $r, \psi, \xi$, dans laquelle on prendra pour le facteur $v_1$ de $\delta$, l'élément différentiel du volume de B, exprimé au

moyen des différentielles de ces trois variables, lequel est $rdrd\xi d\psi$. L'intégrale relative à $\xi$ devra s'étendre depuis la valeur de cette variable en fonction de $r$ et $\psi$, qui a lieu à la surface de B, jusqu'à $\xi = l$; on intégrera ensuite depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 2\pi$, et depuis $r = 0$ jusqu'à $r = l$.

De cette manière on obtiendrait la valeur rigoureuse de $\Omega \omega dt$; mais si l'on néglige dans ces calculs les puissances de $\xi$, $r$, $r'$, supérieures à la première, on pourra étendre l'intégrale relative à $\xi$ depuis $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = l$; on aura simplement

$$u_1 - u' = -\frac{du}{dx}(\xi + r') - \frac{du}{dy} r \cos\psi - \frac{du}{dz} r \sin\psi,$$

et l'on réduira l'autre facteur $R_1$ de $\delta$ à une fonction de $r_1$, $u$, $x$, $y$, $z$, qui sera la fonction $V_1$ du n° 52, que nous désignerons par $fr_1$, attendu que nous aurons seulement besoin d'y considérer la variable $r_1$. L'intégrale relative à $\psi$ s'effectuera immédiatement : elle fera disparaître $\frac{du}{dy}$ et $\frac{du}{dz}$; et en supprimant le facteur commun $\omega dt$, il en résultera

$$\Omega = -2\pi \frac{du}{dx} \int_0^l \int_0^l \int_0^l \frac{(\xi + r')r}{r_1^3} fr_1 dr' d\xi dr.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à réduire cette intégrale triple à une intégrale simple; ce que nous ferons dans le numéro suivant.

(58). La fonction $fr_1$, facteur de la quantité soumise à l'intégration, est nulle pour toute valeur de $r_1$, plus grande que $l$, et l'on a $r_1 > l$, dès que l'une des trois variables $r$, $\xi$, $r'$, surpasse $l$; il s'ensuit donc que l'on peut étendre l'intégrale relative à chacune de ces variables au-delà de la limite $l$, et, si l'on veut, jusqu'à l'infini. Alors, si l'on met $r\xi$ et $rr'$, à la place des variables $\xi$ et $r'$, et conséquemment, $rd\xi$ et $rdr'$ au lieu de leurs différentielles, les limites des intégrales relatives à $r$, $\xi$, $r'$, seront encore zéro et l'infini; la valeur de $r_1$ deviendra

$$r_1 = r\sqrt{1 + (\xi + r')^2};$$

et celle de $\Omega$ prendra la forme

$$\Omega = -2\pi \frac{du}{dx} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\xi + r')r^2}{1 + (\xi + r')^2} fr_1 dr' d\xi dr.$$

Changeons actuellement la variable $r$ et sa différentielle, et remplaçons-les par

$$\frac{r}{\sqrt{1+(\xi+r')^2}}, \qquad \frac{dr}{\sqrt{1+(\xi+r')^2}};$$

les limites des intégrales demeureront encore les mêmes; on aura $r_1 = r$, et, par conséquent,

$$\Omega = -2\pi \frac{du}{dx} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\xi+r')\,d\xi dr'}{[1+(\xi+r')^2]^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty fr.r^4dr.$$

Dans l'expression de $k$ du n° 49, on peut aussi étendre l'intégrale jusqu'à $r=\infty$; la quantité V qu'elle renferme est la même que $fr$; on a donc

$$k = \frac{2\pi}{3}\int_0^\infty fr.r^4dr.$$

En effectuant les intégrations, on a aussi

$$\int_0^\infty \frac{(\xi+r')d\xi}{[1+(\xi+r')^2]^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dr'}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}} = 1,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\xi+r')\,d\xi dr'}{[1+(\xi+r')^2]^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}.$$

On aura donc finalement,

$$\Omega = -k\frac{du}{dx};$$

en sorte que la valeur de $\Omega$ coïncide, comme on l'a dit plus haut, avec celle de $\Gamma$ qui est donnée pour la formule (12).

(59). Cette expression commune de $\Omega$ et $\Gamma$ suppose les coordonnées du point M rapportées à des axes parallèles à la normale et au plan tangent en ce point à la surface de B; ce qui était propre, en effet, à simplifier les calculs; mais maintenant il est bon de transformer la formule (12) en une autre, dans laquelle les axes des coordonnées soient indépendans de la direction de l'élément $\omega$. Si $x, y, z$,

représentent les coordonnées du point M, rapportées à des axes rectangulaires quelconques, et que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, soient les angles que la normale MN′, extérieure à B, fait avec des parallèles à ces axes menées par ce point, on aura alors

$$\Gamma = -k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right), \qquad (13)$$

formule qui sera aussi l'expression générale de $\Omega$.

En effet, soient $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les trois coordonnées de M, ayant même origine que $x$, $y$, $z$, et rapportées, la première $x_{,}$ à un axe qui a la même direction que MN′, les deux autres $y_{,}$ et $z_{,}$ à des axes perpendiculaires entre eux et à l'axe des $x_{,}$, nous aurons

$$\begin{aligned} x &= x_{,}\cos\alpha + y_{,}\cos\alpha' + z_{,}\cos\alpha'', \\ y &= x_{,}\cos\beta + y_{,}\cos\beta' + z_{,}\cos\beta'', \\ z &= x_{,}\cos\gamma + y_{,}\cos\gamma' + z_{,}\cos\gamma''; \end{aligned}$$

$\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, et $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, étant les angles que font les axes des $y_{,}$ et $z_{,}$ avec ceux des $x$, $y$, $z$. Or, si l'on considère $u$ comme une fonction de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, on aura, en vertu de la formule (12),

$$\Gamma = -k\frac{du}{dx_{,}}.$$

Si, au contraire, on regarde $u$ comme une fonction de $x$, $y$, $z$, on aura, d'après les équations précédentes,

$$\frac{du}{dx_{,}} = \frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma;$$

et de ces deux dernières équations, on conclut immédiatement la formule (13) qu'il s'agissait d'obtenir.

(60). En prenant pour $\omega$ l'élément différentiel de la surface de séparation de B et B′ qui répond au point M, l'intégrale de $\Gamma\omega$ étendue à une portion quelconque de cette surface et multipliée par $dt$, exprimera le flux instantané de chaleur à travers cette même portion de surface. Si B entoure B′ de toutes parts (fig. 12), et que l'on étende l'intégrale à la surface entière de B′, ce flux de chaleur sera l'augmentation totale de la chaleur de B′ pendant l'instant $dt$; ce qui sup-

pose, toutefois, qu'aucun point de la surface de B′ ne soit à une distance de celle de A, moindre que $l$, et que les dimensions de B′, aussi petites que l'on voudra d'ailleurs, surpassent toujours cette limite $l$ du rayonnement intérieur : la première condition est nécessaire pour que l'on puisse faire usage de la formule (13) dans toute l'étendue de la surface de B′; la seconde doit être remplie pour que la chaleur émise par B à travers cette surface soit absorbée en entier par B′.

On trouvera encore l'augmentation instantanée de la chaleur de B′, en prenant la somme des augmentations qui résultent des échanges entre B et les cylindres élevés dans l'intérieur de B′, perpendiculairement sur tous les élémens de sa surface ; laquelle somme sera donnée par l'intégrale de $\Omega\omega$ étendue à la surface entière et multipliée par $dt$; ce qui coïncidera avec le résultat déduit de la considération du flux de chaleur $\Gamma$, en exprimant les valeurs de $\Gamma$ et $\Omega$ par la même formule (13). A la vérité, les cylindres normaux, pour remplir entièrement et sans double emploi le volume de B′, devraient être remplacés par des filets qui se rétrécissent ou s'élargissent à raison de la convexité ou de la concavité de cette partie de A ; mais il faut observer qu'en déterminant la valeur de $\Omega$, on a déjà négligé l'influence de la courbure de B′, et que l'on doit, conséquemment, en faire encore abstraction dans les usages que l'on fera de cette valeur.

La considération de l'accroissement instantané de chaleur de B′ peut aussi conduire à l'équation générale du mouvement de la chaleur dans l'intérieur de A, par une méthode qu'il est bon de connaître, et qui diffère essentiellement de celle que nous avons suivie d'abord, en ce que la partie $m$ de A dont on considérait l'augmentation instantanée de chaleur devait avoir des dimensions de grandeur insensible par rapport à $l$, tandis que maintenant les dimensions de B′ devront encore être très petites, mais plus grandes que $l$.

(61). Les intégrales des trois termes de la formule (13) multipliée par $\omega$, pourront se déduire de l'une d'elles par des changemens de lettres : il suffira, par exemple, de considérer l'intégrale correspondante au premier terme. Je supposerai, pour fixer les idées, l'axe des $x$ vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, et la partie B′ de A située en entier au-dessous du plan des $y$ et $z$. Si l'on conçoit un

cylindre vertical, tangent à la surface de B', la ligne de contact divisera cette surface en deux parties qui auront une même projection horizontale : j'appellerai S' la partie supérieure, $S_{,}$ la partie inférieure, et S leur projection commune; d'après la direction de l'axe des $x$ et la position de B', l'angle $\alpha$ sera aigu dans toute l'étendue de S', et obtus en tous les points de $S_{,}$. Or, l'élément $\omega$ et sa projection horizontale $dydz$ étant des quantités positives, liées entre elles par l'équation

$$dydz = \pm\, \omega \cos \alpha,$$

on devra donc prendre le signe supérieur ou inférieur selon que $\omega$ appartiendra à S' ou à $S_{,}$, afin que $\pm \cos \alpha$ soit toujours positif; par conséquent, l'intégrale de $-k\frac{du}{dx}\omega\cos\alpha$, étendue à la surface entière de B', sera la différence de deux autres intégrales doubles, savoir :

$$\iint\left(k\frac{du}{dx}\right)dydz - \int\left[k\frac{du}{dx}\right]dydz,$$

qui s'étendront l'une et l'autre à tous les élémens $dydz$ de S, mais dans lesquelles $\left(k\frac{du}{dx}\right)$ se rapporte à un point quelconque de $S_{,}$, et $\left[k\frac{du}{dx}\right]$, à un point quelconque de S'.

Cela posé, soient M, M', $M_{,}$, trois points situés sur une même verticale, dont le premier appartient à l'intérieur de B', le second à S' et le troisième à $S_{,}$. Ces trois points auront les mêmes coordonnées horizontales $y$ et $z$; et si $x$ est l'ordonnée verticale de M, on pourra représenter celles de M' et $M_{,}$ par $x - \xi'$ et $x + \xi_{,}$. En développant suivant les puissances de $\xi'$ et $\xi_{,}$, on aura alors

$$\left(k\frac{du}{dx}\right) = k\frac{du}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}\xi_{,} + \text{etc.},$$

$$\left[k\frac{du}{dx}\right] = k\frac{du}{dx} - \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}\xi' + \text{etc.}$$

Or, si l'on suppose que les dimensions de B', toujours plus grandes que $l$, soient néanmoins très petites, les variables $\xi'$ et $\xi_{,}$ le seront aussi; et si l'on néglige, en conséquence, leurs puissances supérieures à la

première, on aura

$$\left(k\frac{du}{dx}\right)-\left[k\frac{du}{dx}\right]=\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}\xi,$$

en désignant par $\xi$ la longueur de la droite $M'M_{,}$, de sorte qu'on ait $\xi'+\xi_{,}=\xi$. De cette manière, la différence des deux intégrales précédentes deviendra

$$\int\int\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}\xi dydz.$$

A raison de la petitesse des dimensions de la surface S à laquelle cette intégrale double doit s'étendre, on y pourra considérer $\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}$ comme une constante. De plus, si l'on appelle H le volume de B', on aura

$$\int\int\xi dydz = \text{H}.$$

L'intégrale précédente, ou la valeur approchée de $-\int k\frac{du}{dx}\omega\cos\alpha$, sera donc enfin $\text{H}\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}$. On trouvera de même

$$\text{H}\left(\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}+\frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy}+\frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}\right),$$

pour l'intégrale des trois termes de la formule (13), multipliés par $\omega$; en sorte que cette expression multipliée par $dt$ sera l'accroissement de chaleur de B' pendant cet instant. D'un autre côté, si l'on appelle $c$ la chaleur spécifique de A, qui répond au point M, on pourra, à cause des petites dimensions de B', regarder $c$, aussi bien que la température $u$ relative au même point, comme des quantités constantes dans toute l'étendue de cette partie B' de A. Son accroissement de chaleur correspondant à la variation $du$ de sa température, sera donc aussi $\text{H}c\,du$; et en l'égalant à la quantité précédente, multipliée par $dt$, nous aurons

$$\text{H}c du = \left(\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}\right)\text{H}dt, \qquad (14)$$

pour l'équation générale du mouvement de la chaleur dans l'intérieur de A, qui coïncide, en effet, avec l'équation (7), qu'on a trouvée d'une autre manière.

A raison des différentes quantités que l'on a négligées, cette équation (14) n'est qu'approchée; mais il est bon d'observer que l'approximation ne porte que sur la valeur de Γ dont on a fait usage : cette valeur étant donnée, les deux membres de l'équation (14) peuvent être regardés comme les premiers termes de deux développemens d'une même quantité de chaleur, ordonnés suivant les puissances et les produits des dimensions de B'; et les deux développemens devant être égaux, quelles que soient ces dimensions, pourvu qu'elles surpassent $l$, il faut que le premier terme de l'un soit rigoureusement égal au premier terme de l'autre.

(62). On parvient encore à l'équation (14), en prenant pour B', un parallélépipède rectangle dont les côtés sont très petits et néanmoins plus grands que $l$.

Pour simplifier le calcul, je prendrai les axes des coordonnées parallèles aux côtés de ce parallélépipède, adjacens à un même sommet qui sera le point M. Ces coordonnées de M étant $x$, $y$, $z$, les trois côtés adjacens seront leurs prolongemens, et j'en représenterai les longueurs par $h$, $h'$, $h''$. Je supposerai, comme plus haut, l'axe des $x$ vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, et la partie B' de A située en entier au-dessous du plan des $y$ et $z$; la hauteur de ce parallélépipède sera $h$, chacune de ses deux bases horizontales aura $h'h''$ pour valeur, et H étant son volume, on aura

$$\text{H} = hh'h''.$$

La normale à sa base supérieure, comprise dans son intérieur, fera un angle zéro avec l'axe des $x$, et des angles droits avec ceux des $y$ et $z$; par conséquent, en vertu de l'équation (13), le flux de chaleur correspondant au point M aura pour expression $-k\frac{du}{dx}$;

et, à raison de la petitesse de $h'$ et $h''$, on pourra regarder cette quantité comme constante dans toute l'étendue $h'h''$ de cette base. Mais une portion de la chaleur qui traverse les élémens de ce rectangle, dont les distances à ses côtés sont moindres que $l$, n'est pas absorbée par le parallélépipède B', et sort par ses faces latérales. Pour que le produit de $-k\frac{du}{dx}$ et de $h'h''dt$ puisse exprimer l'augmentation de chaleur de B' pendant l'instant $dt$, due au flux de chaleur à travers sa base supérieure, il faudra donc que l'on néglige la partie de ce flux correspondante aux élémens dont il s'agit, par rapport au flux entier; ce qui exige que les côtés $h'$ et $h''$, quoique très petits, soient néanmoins de très grands multiples de $l$.

Dans cette hypothèse, l'augmentation instantanée de chaleur de B', provenant du flux à travers sa base supérieure, étant

$$-k\frac{du}{dx}h'h''dt,$$

on en déduira évidemment son augmentation de chaleur provenant du flux à travers sa base inférieure, en y mettant $x+h$ au lieu de $x$, et changeant ensuite le signe du résultat, parce que la normale intérieure à laquelle répondent les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, dans la formule (13), change de direction en passant d'une base à l'autre. Si l'on néglige le carré de $h$, cette seconde augmentation de chaleur sera donc

$$k\frac{du}{dx}h'h''dt + \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}hh'h''dt.$$

Donc aussi, en l'ajoutant à la première, et mettant H au lieu de $hh'h''$, on aura

$$\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}\text{H}dt,$$

pour l'augmentation de chaleur de B' pendant l'instant $dt$, due aux flux qui ont lieu à travers ses deux bases horizontales.

En changeant, dans ce résultat, $x$ en $y$ et en $z$ successivement, on aura les augmentations de chaleur de ce parallélépipède, dues aux

flux qui ont lieu à travers ses autres faces parallèles; par conséquent, son accroissement total de chaleur pendant l'instant $dt$ sera, comme plus haut,

$$\left(\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}\right)\text{H}dt.$$

Mais maintenant, si l'on considère comme constantes, dans toute l'étendue de B′, la température et la chaleur spécifique, et celle-ci étant $c$ au point M, ce même accroissement de chaleur devra être égal à H$cdu$; ce qui donne de nouveau l'équation (14).

Cette manière de parvenir à l'équation générale du mouvement de la chaleur laisse quelque obscurité sur son degré d'approximation, à raison des quantités qu'on a été obligé de négliger près des côtés du parallélépipède. Elle n'aurait aucun sens, si l'on supposait cette partie B′ de A infiniment petite; et même on a vu qu'il faut que ses trois dimensions $h$, $h'$, $h''$, soient très grandes par rapport à $l$.

Les quantités désignées précédemment par Γ et Ω étant égales, cette même méthode peut aussi être présentée d'une autre manière. En décomposant le parallélépipède B′ en prismes verticaux qui auront pour bases les élémens du rectangle $h'h''$, le produit $-k\frac{du}{dx}h'h''dt$ exprimera, pendant l'instant $dt$, le résultat des échanges de chaleur entre tous ces prismes et la partie de A située au-dessus du plan de la base supérieure de B′ : pour cela, il suffira que l'on regarde $k\frac{du}{dx}$ comme invariable dans toute l'étendue de cette base, et l'on n'aura pas besoin de rien négliger près de ses côtés. En négligeant le carré de $h$, on en conclut que $\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}\text{H}dt$ exprimera de même l'accroissement instantané de la chaleur de B′, provenant des échanges entre ce parallélépipède et les parties de A, situées, soit au-dessous du plan de la base inférieure de B′, soit au-dessus du plan de sa base supérieure. Les quantités analogues qui répondent

aux faces verticales de B' seront aussi $\frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy}\mathrm{H}dt$ et $\frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}\mathrm{H}dt$. Mais il faut observer que près des côtés du parallélépipède, une portion des parties environnantes de A influe à la fois sur deux de ces trois quantités de chaleur, et même sur toutes les trois près des sommets. Il y a donc double ou triple emploi à l'égard de ces portions extérieures; et pour que la somme des trois quantités précédentes exprime l'augmentation totale de la chaleur de B' pendant l'instant $dt$, il faut qu'on puisse négliger l'effet des portions extérieures dont il s'agit par rapport à l'effet total; ce qui exige encore, comme tout à l'heure, que les dimensions du parallélépipède soient de très grands multiples de l'étendue $l$ dans laquelle s'exerce l'influence de ces mêmes portions extérieures sur B'.

On retrouve également la nécessité de cette même condition, lorsque l'on applique l'analyse du numéro précédent à la surface entière de ce parallélépipède, en considérant les arètes vives comme des portions de surfaces cylindriques, tangentes aux faces adjacentes, et d'un rayon extrêmement petit. A cause de la petitesse de ce rayon de courbure, l'analyse du n° 52 et l'expression de $\Gamma$ qu'on en a déduite ne sont point applicables, dans l'étendue $l$, de part et d'autre de chaque arète; et pour pouvoir se servir de la formule (13), comme on l'a fait dans le n° 61, il faut encore qu'on puisse négliger cette étendue par rapport aux dimensions $h$, $h'$, $h''$, de B'.

(63). Si le corps A est une barre homogène, cylindrique ou prismatique, qui ne rayonne pas au dehors à travers sa surface latérale, et dans laquelle les points de chaque section perpendiculaire à sa longueur aient une même température, variable d'un instant à un autre, cette température $u$ ne sera fonction que de $t$ et de $x$, en prenant l'axe des $x$ dans le sens de la longueur de A; par conséquent, les équations (7) et (13) se réduiront à

$$c\frac{du}{dt} = \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}, \quad \Gamma = -k\frac{du}{dx}\cos\alpha.$$

Les flux de chaleur à travers différentes sections planes de la barre, faites par un même point, seront donc entre eux, d'après la dernière

de ces équations, comme les cosinus des angles compris entre la direction de la barre et les normales à ces sections. Relativement à la section perpendiculaire à cette direction, on aura

$$\alpha = 0, \quad \Gamma = -k\frac{du}{dx};$$

d'où l'on conclut, ce qui est d'ailleurs évident, que le flux de chaleur aura lieu dans le sens où la température est décroissante.

Si, de plus, les deux extrémités de cette barre sont entretenues à des températures constantes, tous ses points parviendront aussi, après un temps plus ou moins long, à des températures permanentes. A cette époque, l'inconnue $u$ ne dépendant plus que de $x$, on aura

$$\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} = 0, \quad k\frac{du}{dx} + C = 0, \qquad (15)$$

C étant une constante arbitraire. Dans cet état, le flux de chaleur à travers chaque section normale de la barre sera donc constant, le même dans toute sa longueur, et égal à $b$C, en appelant $b$ l'aire constante de la section normale.

La température permanente, déterminée par la seconde équation (15), sera une fonction de $x$ qui dépendra de la valeur de $k$ en fonction de $u$. Ce n'est que dans le cas particulier où la conductibilité est indépendante de la température, que celle-ci croîtra ou décroîtra uniformément suivant la longueur de la barre. Dans ce cas, on aura

$$ku + Cx + C' = 0,$$

C' étant une seconde constante arbitraire. Supposons que la variable $x$ soit comptée à partir de l'une des extrémités de la barre; appelons $\delta$ la température donnée qui répond à $x=0$; prenons pour le zéro de l'échelle thermométrique la température, aussi donnée, qui a lieu à l'autre extrémité, et qui répondra à $x=h$, en désignant par $h$ la longueur de la barre. Nous aurons, d'après l'équation précédente,

$$k\delta + C' = 0, \quad Ch + C' = 0,$$

pour déterminer les valeurs de C et C'; et il en résultera, en un

point quelconque de la barre parvenue à l'état permanent,

$$u = \left(1 - \frac{x}{h}\right)\delta, \quad bC = \frac{bk\delta}{h}. \qquad (16)$$

Ainsi, dans le cas particulier où l'on suppose la conductibilité indépendante de la température, et dépendante seulement de la matière de la barre, cette matière, la section normale de la barre et la différence des températures extrêmes restant les mêmes, le flux constant de chaleur, d'après la dernière équation (16), est en raison inverse des longueurs dans deux barres différentes.

En partant des équations (16), et en étendant la seconde, c'est-à-dire, la loi du flux de chaleur en raison inverse de l'épaisseur de chaque tranche d'un corps, au cas où cette épaisseur est infiniment petite, ainsi que la différence des températures relatives aux deux faces de la tranche, on en déduit l'équation du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps échauffé d'une manière quelconque. D'après cette considération, on a cru pouvoir présenter cette équation générale comme indépendante d'aucune hypothèse sur le mode de communication de la chaleur entre les molécules voisines, et l'égalité de ses deux membres comme une proposition rigoureuse que l'on a comparée aux théorèmes de la Statique et de la Dynamique. Mais on voit, par ce qui précède, que les équations (16), quelque simples qu'elles paraissent, n'ont réellement lieu que dans deux suppositions particulières: l'une qui consiste à regarder l'échange de chaleur entre deux molécules comme indépendant de la température absolue, et simplement proportionnel à leur température relative; l'autre concernant l'étendue du rayonnement intérieur, que l'on suppose de grandeur finie, mais tout-à-fait insensible. En admettant la première hypothèse, on pourrait démontrer, *à priori*, que dans une barre parvenue à l'état permanent, la température varie uniformément suivant sa longueur, et que le flux constant de chaleur qui en résulte est en raison directe de la différence des températures extrêmes et en raison inverse de la longueur totale, quelles que soient la loi et l'étendue du rayonnement intérieur; mais le flux de chaleur étant ainsi proportionnel au premier coefficient différentiel de la température, lorsque celui-ci ne varie pas, on n'en peut pas conclure que cela

ait encore lieu quand ce coefficient varie d'un point à un autre; et, au contraire, le flux de chaleur suit une autre loi, bien plus compliquée, si l'on a égard à l'étendue sensible du rayonnement. Les méthodes que j'ai suivies dans ce chapitre, pour parvenir à l'équation générale du mouvement de la chaleur, étant, sans aucun doute, moins simples que celles dont on avait d'abord fait usage, et qui semblaient donner à cette équation plus d'étendue qu'elle n'en a réellement, j'ai dû présenter ici quelques observations pour montrer la nécessité de mes calculs, et pour fixer les idées sur la nature véritable de cette équation fondamentale.

# CHAPITRE V.

*Mouvement de la chaleur à la surface d'un corps de forme quelconque.*

(64). Indépendamment de l'équation (7) du n° 49, commune à tous les points du corps A, solide ou liquide, homogène ou hétérogène, il en existe une autre qui n'a lieu que pour les points de sa surface, ou, plus exactement, pour les points situés à une profondeur très petite, mais néanmoins plus grande que l'étendue $l$ du rayonnement intérieur, augmentée de l'épaisseur de la couche superficielle d'où émane et où est absorbée la chaleur rayonnante proprement dite (n° 18). On doit distinguer cette épaisseur et cette étendue l'une de l'autre, ainsi qu'on l'a dit à la fin du n° 41, parce que la loi des températures, et, par suite, celle de l'absorption de la chaleur, ne sont pas les mêmes dans l'intérieur et près de la surface d'un corps qui s'échauffe ou se refroidit.

A une distance de la surface moindre que l'épaisseur de la couche superficielle, les variations de chaleur d'une partie matérielle de grandeur insensible, provenant des échanges, soit avec les parties environnantes du même corps, soit avec celles des corps voisins et de l'air environnant, ne sont plus exprimées par des intégrales entières, c'est-à-dire, par des intégrales relatives aux distances, que l'on puisse étendre depuis zéro jusqu'à l'infini, comme dans l'intérieur. Pour cette raison, la température varie très rapidement près de la surface dans le sens normal, et peut-être très différente à la surface même et à une très petite profondeur. La loi de cette variation n'est pas déterminée; l'expérience ne nous la fait pas connaître; mais elle confirme la différence indiquée par la théorie, entre cette variation et celle qui a lieu en dehors de la couche superficielle (n° 41). Heureuse-

ment l'équation qu'il s'agit d'obtenir est indépendante des lois inconnues de l'absorption de la chaleur et de la température dans l'épaisseur de cette couche.

(65). Soit M un point de A très voisin de sa surface; appelons $x$, $y$, $z$, les trois coordonnées rectangulaires de M; et désignons par $u$ la température de A qui répond à ce point au bout du temps quelconque $t$. Du point M, abaissons sur la surface de A une perpendiculaire qui la rencontre au point O (fig. 13); et soit $h$ la longueur de MO, que nous supposerons extrêmement petite, mais de grandeur sensible, et dont nous fixerons plus bas la limite. Par le point O, menons un plan tangent à la surface de A, et par le point M, un plan parallèle au premier. Ce plan divisera A en deux parties que nous appellerons B et B'; et la partie B', qui comprend la perpendiculaire MO, sera un très petit segment, ayant pour flèche cette droite MO. Soit $\omega$ l'élément de ce même plan, de grandeur insensible et qui comprend le point M. Appelons C le cylindre perpendiculaire à B, contenu dans B', dont la base, la hauteur, le volume, sont $\omega$, $h$, $\omega h$, et qui interceptera sur la surface de A un élément comprenant le point O, que l'on pourra regarder comme appartenant aussi à ce plan tangent et comme égal à $\omega$.

Je représenterai par $\Omega\omega dt$ l'augmentation de chaleur de C pendant l'instant $dt$, provenant des échanges entre C et les parties de B, et par $\Delta\omega dt$ celle qui provient des échanges entre C et les parties de B'. Je désignerai de même par $\Gamma\omega dt$, la diminution instantanée de chaleur de C, due au rayonnement extérieur, c'est-à-dire, l'excès de la chaleur que tous les points de C émettent pendant l'instant $dt$, et qui atteint et traverse la surface de A, sur la chaleur venue du dehors, qui traverse cette surface, atteint ensuite C, et est absorbée par cette partie de B'. L'augmentation de chaleur de C pendant le même instant $dt$, sera alors

$$\Omega\omega dt + \Delta\omega dt - \Gamma\omega dt.$$

D'un autre côté, si l'on appelle $c$ la chaleur spécifique moyenne de C, et $\mu$ la plus grande valeur de la vitesse $\delta$ (nº 44) qui aura lieu, au bout du temps $t$, dans toute l'étendue de ce cylindre, son augmentation de chaleur sera moindre que $c\mu\omega h dt$; par conséquent, la quan-

tité $\Omega + \Delta - \Gamma$, abstraction faite du signe, devra être plus petite que $c\mu h$. Or, quelles que soient les températures inconnues des points de C, nous admettrons que les vitesses de leurs variations ne sont pas extrêmement grandes, sauf un cas d'exception dont il sera question plus bas. Nous pourrons donc négliger le produit $c\mu h$, à cause de l'extrême petitesse de son facteur $h$; et nous aurons, en conséquence,

$$\Omega + \Delta = \Gamma; \qquad (1)$$

équation d'où l'on déduira celle qu'il s'agit d'obtenir, en y substituant les valeurs de $\Omega$, $\Delta$, $\Gamma$.

(66). La première de ces trois quantités a déjà été déterminée; on prouvera que la deuxième peut être négligée; et quant à la troisième, elle est équivalente, comme on va aussi le démontrer, au flux de chaleur rapporté aux unités de temps et de surface, qui a lieu du dedans au dehors de A, et qui répond au point O de sa surface.

1°. D'après ce qu'on a vu dans le n° 57, et en vertu de la formule (13) du n° 59, on a

$$\Omega = -k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos 6 + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right);$$

$k$ désignant la conductibilité de la matière de A qui répond au point M, et $\alpha$, $6$, $\gamma$, étant les angles que fait le prolongement extérieur ON de la normale MO avec des parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$, menées par le point O. Mais cette formule suppose que dans toute l'étendue des échanges de chaleur entre les parties de C et celles de B, on a pu développer l'expression de la température en série convergente, ordonnée suivant les puissances des coordonnées dont l'origine est au point M; ce qui exige que dans toute cette étendue la température ne varie pas très rapidement; et pour satisfaire à cette condition, il faudra que la hauteur $h$ de C surpasse la ligne $l$ du n° 45, de toute l'épaisseur de la couche superficielle dans laquelle la température varie très rapidement, et qui a été désignée par $e$ dans le n° 18. Nous admettrons que cela puisse avoir lieu, sans que la distance $h$ ou MO du point M à la surface de A, cesse d'être extrêmement petite, comme nous l'avons supposée.

2°. Soient $M'$ et $M_{,}$ des points de $B'$ très voisins l'un de l'autre, et dont le premier appartient à la normale MO. Abaissons de $M_{,}$ la perpendiculaire $M_{,}O_{,}$ sur le plan tangent en O, et faisons

$$M_{,}O_{,} = \xi_{,}, \quad M'O = \xi'.$$

Menons aussi par les points $M_{,}$ et $M'$ des parallèles $M_{,}M''$ et $M'M_{,,}$ à ce plan tangent, qui coupent en $M''$ et $M_{,,}$ les perpendiculaires MO et $M_{,}O_{,}$. Soient $m'$, $m''$, $m_{,}$, $m_{,,}$, des parties matérielles de grandeur insensible, qui répondent à ces quatre points $M'$, $M''$, $M_{,}$, $M_{,,}$; soient $u'$, $u''$, $u_{,}$, $u_{,,}$, leurs températures au bout du temps $t$. Les points $M'$ et $M_{,,}$ étant très rapprochés l'un de l'autre, et pouvant être considérés comme également éloignés de la surface de A, on aura, à très peu près, $u' = u_{,,}$; il en sera de même à l'égard des points $M''$ et $M_{,}$, pour lesquels on aura aussi $u'' = u_{,}$. Si donc on suppose, de plus, les masses $m'$ et $m_{,,}$ égales, ainsi que $m''$ et $m_{,}$, tout sera semblable dans le couple $m_{,}$ et $m'$, et dans le couple $m_{,,}$ et $m''$; par conséquent, l'échange de chaleur entre $m_{,}$ et $m'$ sera le même qu'entre $m''$ et $m_{,,}$, soit qu'il ait lieu directement, soit qu'il se fasse par une réflexion intérieure sur la surface de A. Il suit de là que si la chaleur de $m'$ est augmentée par l'échange avec $m_{,}$, la chaleur de $m_{,,}$ sera augmentée de la même quantité par l'échange avec $m''$, et, conséquemment, celle de $m''$ éprouvera en même temps une diminution égale à cette augmentation. Ainsi, les variations de chaleur de $m'$ et $m''$, provenant des échanges avec $m_{,}$ et $m_{,,}$, étant toujours égales et de signes contraires, la chaleur de C n'en sera point altérée; et comme cette conclusion convient également à tous les couples de parties matérielles de C et $B'$, il en résulte que la quantité $\Delta$, provenant de tous les échanges entre C et $B'$, sera égale à zéro.

3°. Après avoir tiré la droite $M_{,,}O$, menons par le point $M'$ une parallèle $M'O'$ à cette ligne, qui rencontre au point $O'$ la surface de A, et soit $\omega'$ l'élément de cette surface qui répond à $O'$. La chaleur émise au dehors par la partie $m_{,,}$ à travers l'élément $\omega$, correspondant au point O, sera égale à celle qui émane de $m'$ à travers le second élément $\omega'$; car il est évident que tout est semblable dans les deux cas; les parties $m_{,,}$ et $m'$ étant celles que l'on a considérées tout à l'heure,

qui sont égales et également éloignées de la surface, et les distances M′O′ et $M_{\prime\prime}O$ pouvant être regardées comme égales, vu que le point O′ ne s'écarte pas sensiblement du plan tangent en O. La même chose ayant lieu pour toutes les parties de C et de B′, prises deux à deux, on en conclut que la chaleur émise au dehors par toutes les parties de B′, à travers un seul élément $\omega$ de la surface de A, est équivalente à la chaleur émise à travers tous les élémens de cette surface, par une seule portion C de B′; et comme cette conclusion convient aussi aux quantités de chaleur qui traversent la surface de A, de dehors en dedans, il s'ensuit que le flux total de chaleur qui a lieu à chaque instant à travers l'élément $\omega$, est égal à celui que l'on a désigné plus haut par $\Gamma\omega dt$; égalité pareille à celle de deux semblables quantités, à laquelle le calcul nous a conduits dans les n$^{os}$ 57 et 58.

(67). Dans ce flux de chaleur à travers $\omega$, on comprend ici, non-seulement la chaleur rayonnante proprement dite, qui traverse cet élément suivant toutes les directions du dedans au dehors et du dehors en dedans, mais encore la chaleur communiquée ou enlevée à A à travers ce même élément, par la couche d'air très mince en contact avec ce corps (n° 39). La valeur complète de $\Gamma$ dépendra de diverses circonstances qui auront lieu autour de A, ainsi qu'on l'a vu dans les chapitres II et III; mais on pourra toujours la représenter par

$$\Gamma = p(u - \zeta);$$

$p$ étant un coefficient positif, et $\zeta$ une température positive ou négative, qui sera la valeur de $u$ pour laquelle le flux de chaleur serait nul. Sans la définir autrement, nous l'appellerons, en général, *la température extérieure*. Elle pourra varier avec la position du point O auquel $\Gamma$ se rapporte; elle pourra aussi varier avec le temps; en sorte que $\zeta$ sera une fonction de $t$ et des trois coordonnées de ce point O, qui devra être donnée dans chaque exemple. Il en sera de même à l'égard du coefficient $p$, qui variera d'un point à un autre avec l'état de la surface, et qui pourra aussi dépendre des températures $u$ et $\zeta$: dans chaque cas, ce coefficient devra être donné en fonction de $u$, de $\zeta$ et des trois coordonnées du point O; mais si les températures $u$ et $\zeta$ ne sont pas très élevées, on pourra supposer que la valeur $p$ en est indépendante.

Cela posé, si l'on substitue cette valeur de Γ et celle de Ω du numéro précédent, dans l'équation (1), et qu'on y fasse $\Delta = 0$, nous aurons

$$k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos 6 + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right) + p(u - \zeta) = 0, \quad (2)$$

pour l'équation relative à la surface qu'il s'agissait d'obtenir.

Rigoureusement, elle appartient, d'après la manière dont elle a été formée, au point M de A et non au point O de sa surface même; mais après que l'on aura déterminé la valeur de $u$ en fonction des coordonnées $x$, $y$, $z$, et du temps $t$, qui satisfait à l'équation (7) du n° 49, relative aux points intérieurs de A, on pourra en employant cette valeur dans l'équation (2), y mettre pour $x$, $y$, $z$, les coordonnées de O au lieu de celles de M, à cause de l'extrême proximité de ces deux points.

(68). Il faut aussi remarquer que quand on place le corps A dans un milieu dont la température est plus grande ou plus petite que celle des points voisins de sa surface, l'équation (2) n'a pas lieu dans les premiers momens de l'échauffement ou du refroidissement de ce corps; car à cette époque, les températures de tous les points sont données tout-à-fait arbitrairement, et par conséquent, la valeur initiale de $u$, en fonction de $x$, $y$, $z$, ne satisfait pas, en général, à l'équation (2). Cependant la quantité Δ est toujours nulle, d'après la démonstration du n° 66; ce sont donc les flux de chaleur Γ et Ω, relatifs aux deux extrémités de C, qui ne sont pas égaux pendant un certain intervalle de temps; ce qui exige que la vitesse des variations de température soit d'abord extrêmement grande, dans l'étendue de ce cylindre, dont on a supposé la longueur extrêmement petite. Or, on peut admettre qu'en vertu de cette grande vitesse, le cylindre C parvient bientôt à un état où les deux flux extrêmes de chaleur sont égaux et où l'équation (2) commence, par conséquent, à exister. On peut aussi supposer que pendant l'intervalle de temps, sans doute très court, mais nécessaire pour que cette égalité s'établisse, les températures des points intérieurs de A ne changent pas sensiblement; d'où il résulte que si l'on compte le temps $t$ à partir de la fin de cet intervalle, on pourra, sans erreur sensible, prendre pour la valeur de $u$ qui répond

à $t = 0$, l'expression initiale et donnée de $u$ en fonction de $x$, $y$, $z$. C'est sur cette supposition qu'est fondée, dans chaque question particulière, la détermination au moyen de l'état initial de A, des constantes ou des fonctions arbitraires contenues dans la valeur de $u$ en fonction de $t$, $x$, $y$, $z$, qui satisfait à l'équation (7) du n° 49 et à l'équation (2), quoique celle-ci n'ait pas lieu pour cet état même.

Cette équation (2) est encore susceptible d'une autre restriction. A quelque époque que ce soit, elle n'est point applicable à un point O, pour lequel ou près duquel la courbure de la surface de A est extrêmement grande, de sorte qu'entre les points O et O', par exemple, les rayons de courbure soient extrêmement petits, et comparables à la distance MO; car alors les distances M'O' et M''O ne seraient plus sensiblement égales, et les points M' et $M_{\prime\prime}$, $M_{\prime}$ et M'', également éloignés du plan tangent en O, ne pourraient plus être regardés comme également éloignés de la surface; ce qui met en défaut la démonstration du n° 66 et ne permet plus d'admettre l'équation (2) qui en était la conséquence. Il en résulte que si A est un polyèdre, un cylindre, ou un cône, on ne pourra pas supposer que l'équation (2) ait lieu près de ses arêtes, du contour de sa base, ou de son sommet, et l'on ne devra l'employer qu'à des distances de ces parties saillantes, plus grandes que la ligne désignée précédemment par $h$.

(69). L'équation générale relative à la surface d'un corps de forme quelconque, c'est-à-dire l'équation (2), sous les restrictions qu'on vient d'expliquer, a été démontrée, pour la première fois, dans mes Mémoires sur *la Distribution de la Chaleur dans les corps solides*. Auparavant, on l'avait donnée pour l'extrémité d'une barre, et pour une surface sphérique dans le cas particulier où la température de la sphère est la même en tout sens, à égale distance du centre; puis on l'avait étendue, par induction, à un corps de forme quelconque, échauffé aussi d'une manière quelconque. Les géomètres qui ont ensuite cherché à la démontrer généralement, ont pris pour l'expression du flux de chaleur à travers chaque élément de la surface extérieure, celle que l'on a trouvée pour l'élément d'une surface située dans l'intérieur, et qui dépend de l'accroissement de la température dans le sens normal à cette surface et dans une épaisseur infiniment petite, divisé par cette épaisseur (n° 52); expression qu'ils ont égalée immé-

diatement au flux de chaleur donné par l'expérience et supposé proportionnel à la différence des températures extérieure et intérieure; ce qui les a dispensés d'avoir égard au cylindre normal que j'ai désigné par C. Mais l'expression du flux de chaleur qui dépend du coefficient différentiel de la température ne convient qu'à un élément de surface intérieure, et nullement à la surface extérieure; car elle suppose que ce flux provient des échanges entre deux parties contiguës du corps A, dans une étendue où sa matière et sa température sont très peu variables, tandis que le flux de chaleur à travers un élément de la surface extérieure, résulte des échanges entre les molécules de ce corps et celles du milieu dans lequel il est placé, ou même celles d'autres corps plus ou moins éloignés. Le flux extérieur n'a pas d'autre expression que celle qui dépend de la différence de grandeur finie, entre les deux températures, l'une extérieure et l'autre intérieure; et pour former l'équation du mouvement de la chaleur à la surface d'un corps de forme quelconque, il faut prouver, comme je l'ai fait par l'intermédiaire du cylindre normal C, que ce flux est constamment égal à celui qui a lieu à l'extrémité intérieure de ce cylindre, sauf l'exception relative aux températures initiales et aux premiers momens du refroidissement.

(70). Si le corps A est formé de deux parties juxtaposées, solides ou liquides, le flux de chaleur à travers chaque élément de leur surface de séparation, proviendra des échanges entre leurs molécules très voisines de cet élément; et il en résultera, pour le mouvement de la chaleur, de chaque partie dans l'autre, une équation analogue à la précédente; ce qui fournira deux équations relatives à cette surface, que l'on obtiendra de la manière suivante.

Appelons B et B' ces deux parties de A; appelons aussi M un point de B, M' un point de B', O un point de la surface de séparation, situés, tous les trois, sur une normale en O à cette surface. Supposons chacune des distances MO et M'O plus grande que l'étendue du rayonnement intérieur dans la partie de A à laquelle elle appartient, augmentée de l'épaisseur de la couche superficielle de la même partie, où la température peut varier très rapidement. Au bout du temps $t$, soient $u$ et $u'$ les températures qui répondent aux points M et M'. Nous pourrons représenter le flux de chaleur qui a lieu pendant l'ins-

tant $dt$, à travers l'élément $\omega$ de la surface de séparation de B et B', correspondant au point O, par $q(u-u')\,\omega dt$, de B dans B', et conséquemment, par $-q(u-u')\,\omega dt$, de B' dans B; le coefficient $q$ étant une quantité positive, dépendante de la matière de B et de celle de B', qui pourra aussi être une fonction symétrique de $u$ et $u'$.

Cela posé, l'équation (1) et les démonstrations du n° 66 s'appliqueront, d'une part, à B et au cylindre normal dont la base est $\omega$ et la hauteur MO, et d'une autre part, à B' et au cylindre normal, qui a la même base $\omega$ et M'O pour hauteur; et l'on en conclura ces deux équations :

$$\left.\begin{aligned} k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos 6+\frac{du}{dz}\cos\gamma\right)+q(u-u')=0,\\ k'\left(\frac{du'}{dx}\cos\alpha+\frac{du'}{dy}\cos 6+\frac{du'}{dz}\cos\gamma\right)+q(u'-u)=0,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

qui sont celles qu'il s'agissait d'obtenir. Les quantités $k$ et $k'$ sont ici les mesures de la conductibilité des matières de B et de B' aux points M et M'; les angles $\alpha$, $6$, $\gamma$, sont ceux que fait la partie M'O de la normale MOM', avec des parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$, menées par le point O : les valeurs de $u$ et $u'$ en fonctions de $t$ et des coordonnées d'un point quelconque, se déduiront de l'équation (7) du n° 49, appliquée successivement à B et à B', et l'on y mettra ensuite pour ces coordonnées $x$, $y$, $z$, celles du point O de la surface de séparation.

Ces équations (3) se déduisent l'une de l'autre, comme cela doit être, par la permutation des lettres $u$ et $u'$, $k$ et $k'$, et en changeant les angles $\alpha$, $6$, $\gamma$, dans leurs supplémens. Quand les parties B et B' auxquelles elles se rapportent, sont de la même matière, on aura $k'=k$; on fera aussi $u'=u$, dans la partie multipliée par $k$ ou $k'$; et l'on prendra toujours, pour la partie $q(u-u')$, le flux de chaleur rapporté aux unités de temps et de surface, à travers l'élément $\omega$ de la surface de B; ce qui réduira ces deux équations à une seule, qui coïncidera, comme cela devait aussi arriver, avec l'équation (13) du n° 59, relative à un point intérieur de A. Si ce corps se réduit à sa partie B, et qu'on remplace B' par le milieu extérieur dans lequel A est placé, on supprimera la seconde équation (3), et l'on mettra dans la première $p$ et $\zeta$ à la place de $q$ et $u'$, ce qui

la fera coïncider avec l'équation (2) qui répond à la surface extérieure.

Dans tous les cas, on se souviendra que ces équations (3) n'ont pas lieu pour les températures initiales et données arbitrairement, de B et B'; elles n'existent qu'après un intervalle de temps qu'on suppose très court, et dont on pourra faire abstraction dans les usages auxquels on les emploiera. On n'oubliera pas non plus qu'elles ne sont point applicables aux points de la surface de séparation de B et B', s'il en existe, pour lesquels ou près desquels la courbure est extrêmement petite, de sorte que les rayons de courbure y soient très petits et comparables à l'étendue du rayonnement intérieur; elles n'ont lieu qu'à des distances de ces points particuliers, plus grandes que cette même étendue.

# CHAPITRE VI.

*Digression sur les intégrales des équations aux différences partielles.*

(71). Les équations du mouvement de la chaleur dans l'intérieur et à la surface des corps étant maintenant démontrées dans toute leur généralité, il convient, avant de les appliquer à des problèmes particuliers, d'exposer les principes communs aux solutions de tous ces problèmes, et généralement de toutes les questions de Physique et de Mécanique, qui conduisent à des équations aux différences partielles. Ces principes essentiels sont relatifs aux intégrales de ces équations, aux diverses formes dont elles sont susceptibles, et à la manière d'exprimer les fonctions arbitraires qu'elles renferment; ils se trouvent déjà dans plusieurs de mes mémoires, et dans mon *Traité de Mécanique;* je vais les réunir avec quelques développemens dans ce chapitre et dans les deux suivans.

L'intégrale d'une équation différentielle d'un ordre quelconque $n$ doit contenir, pour être complète, un nombre $n$ de constantes arbitraires.

En effet, soient $t$ la variable indépendante et $u$ la fonction de $t$, qui doit être déterminée par une semblable équation. Représentons cette équation par $L=0$, de sorte que $L$ soit une fonction donnée de $t$, $u$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, ...., $\frac{d^nu}{dt^n}$. Si l'on désigne par $h$ une valeur particulière de $t$, et que l'on fasse

$$u=H,\ \frac{du}{dt}=H',\quad \frac{d^2u}{dt^2}=H'',\quad \frac{d^3u}{dt^3}=H''',\ \text{etc.},$$

pour cette valeur $t=h$, le développement de $u$ suivant les puis-

sances de $t-h$ sera, d'après le théorème de Taylor,

$$u = H + H'(t-h) + \frac{1}{1.2}H''(t-h)^2 + \frac{1}{1.2.3}H'''(t-h)^3 + \text{etc.} \quad (1)$$

Or, si l'on fait $t=h$ dans la suite infinie d'équations

$$L=0,\ \frac{dL}{dt}=0,\ \frac{d^2L}{dt^2}=0,\ \frac{d^3L}{dt^3}=0, \text{ etc.},$$

on en tirera les valeurs de tous les coefficiens de la série (1), à partir de $H^{(n)}$ inclusivement, en fonctions des $n$ premiers $H, H', H'', \ldots H^{(n-1)}$, qui resteront indéterminés : la première $L=0$ donnera la valeur de $H^{(n)}$; on substituera cette valeur dans la seconde équation $\frac{dL}{dt}=0$, d'où l'on tirera ensuite la valeur de $H^{(n+1)}$; on mettra ces valeurs de $H^{(n)}$ et $H^{(n+1)}$ dans la troisième équation $\frac{d^2L}{dt^2}=0$, puis on en déduira la valeur de $H^{(n+2)}$; et ainsi de suite. La valeur de $u$ exprimée par la série (1) renfermera donc finalement $n$ constantes indéterminées et indépendantes entre elles; par conséquent, l'intégrale complète de l'équation $L=0$, sous quelque forme qu'on l'obtienne, devra contenir, pour répondre à la généralité de cette quantité $u$, un pareil nombre $n$ de constantes arbitraires. Réciproquement, si $I=0$ est une équation donnée entre $t$ et $u$, contenant en outre un nombre $n$ de constantes arbitraires, on pourra toujours éliminer ces $n$ constantes entre l'équation $I=0$ et les $n$ premières équations différentielles qui s'en déduisent ; ce qui conduira à une équation différentielle de l'ordre $n$ dont $I=0$ sera l'intégrale complète.

Non-seulement la série (1) fait connaître, comme on voit, le degré de généralité de la quantité $u$ déterminée par l'équation $L=0$, mais elle peut aussi, par un procédé semblable à la méthode des quadratures, servir à déterminer les valeurs numériques de $u$ qui répondent à toutes celles de $t$, lorsque les valeurs de $u$ et de ses $n-1$ premiers coefficiens différentiels sont données pour une valeur particulière $t=h$. On prendra d'abord pour $\delta$ une fraction très petite, positive ou négative, et telle que la série (1) soit convergente pour $t=h+\delta$; cette série et ses différentielles feront connaître les valeurs

de $u$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, etc., qui répondent à $t = h + \delta$; au moyen de ces valeurs, la même série fera connaître celles de $u$ et de ses coefficiens différentiels qui répondent à $t = h + \delta + \delta'$, en y mettant $h + \delta$ et $h + \delta + \delta'$ au lieu de $h$ et $t$, et supposant $\delta'$ une très petite fraction qui rende encore cette série convergente; et ainsi de de suite. En définitive les valeurs numériques de $u$ dépendront de celles de H, H', H'',... $H^{(n-1)}$, qui seront arbitraires; et l'usage de la série (1) ne peut laisser aucun doute sur le théorème qu'il s'agissait de démontrer, puisque cette série sera toujours rendue convergente, en donnant des valeurs assez petites à la différence $t - h$.

Lorsqu'on passe aux équatoins aux différences partielles, les constantes arbitraires sont remplacées par des fonctions arbitraires; mais le théorème précédent n'a plus lieu, et leur nombre ne peut plus être déterminé *à priori*. Au-delà du premier ordre, l'intégrale complète d'une équation aux différences partielles peut renfermer un nombre de fonctions arbitraires moindre que celui qui marque l'ordre de l'équation donnée, c'est-à-dire, moindre que 2, 3, 4,..... quoique cette équation contienne des différences partielles du 2e, 3e, 4e..... ordre. Dans le petit nombre de cas où l'intégrale complète peut s'obtenir sous forme finie, sans le secours des intégrales définies, je ne connais aucun exemple de l'abaissement du nombre des fonctions arbitraires et indépendantes entre elles, au-dessous du nombre qui marque l'ordre de l'équation donnée; toutefois, il serait difficile de démontrer qu'un tel abaissement ne puisse jamais avoir lieu. Mais quand l'intégrale complète d'une équation aux différences partielles de l'ordre $n$ est exprimée par des séries, et lors même que l'on parvient à réduire ces séries à des intégrales définies, le nombre des fonctions arbitraires peut s'abaisser au-dessous de $n$, et il peut être différent selon la forme des séries ou des intégrales définies par lesquelles on exprime son intégrale.

En général, soit $u$ une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes $t$, $x$, $y$, $z$, etc., qui doit satisfaire à une équation aux différences partielles de l'ordre $n$, représentée par $L = 0$. Quelle que soit la valeur inconnue de $u$, on peut la concevoir développée suivant les puissances ascendantes de l'une de ces variables, diminuée

d'une valeur particulière de cette même variable; car si l'on appelle $h$ une valeur particulière de $t$, par exemple, et que l'on mette $h+t-h$ au lieu de $t$ dans la fonction $u$, on pourra toujours la développer par le théorème de Taylor, ou autrement, en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $t-h$. Plus généralement, si l'on prend pour $\theta$ une quantité dépendante d'une ou de plusieurs des variables $t$, $x$, $y$, $z$, etc., on pourra supposer la valeur de $u$ développée suivant les puissances ascendantes de $\theta$. Soit donc

$$u = P\theta^{\alpha} + Q\theta^{\beta} + R\theta^{\gamma} + \text{etc.}; \qquad (2)$$

les coefficiens P, Q, R, etc., étant des fonctions inconnues dont chacune dépend d'une variable indépendante de moins que $u$, et les exposans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., formant une suite croissante de quantités constantes. Cela posé, si l'on substitue cette valeur de $u$ dans l'équation $L=0$, que l'on ordonne son premier membre suivant les puissances de $\theta$, et que l'on égale ensuite séparément à zéro le coefficient de chacun des termes de la série qui en résultera, on aura ainsi une suite infinie d'équations différentielles ou aux différences partielles, dont chacune renfermera une variable indépendante de moins que $L=0$; et si l'on parvient à obtenir les valeurs les plus générales de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., P, Q, R, etc., qui satisfont à cette suite d'équations, la série (2) sera aussi la valeur la plus générale de $u$ qui satisfera à l'équation donnée $L=0$. Selon la quantité $\theta$ que l'on choisira, on aura ainsi différentes expressions de $u$ en séries qui seront, sous des formes équivalentes, l'intégrale complète de $L=0$, de telle sorte que si cette intégrale était connue sous forme finie, chacune de ces séries en serait un développement qui pourrait la remplacer.

Or, l'équation $L=0$ restant la même, les coefficiens P, Q, R, etc., déterminés de la manière la plus générale, pourront néanmoins contenir des nombres inégaux de fonctions arbitraires, selon que la série (2) sera ordonnée suivant les puissances de telle ou telle variable $\theta$. Généralement, il y aura telle valeur de $\theta$ pour laquelle le nombre de ces fonctions sera égal à $n$, et telle autre pour laquelle il sera moindre d'une ou de plusieurs unités; et si l'équation $L=0$ est linéaire, il pourra même arriver que toutes les fonctions arbitraires disparais-

sent de la série (2), qui ne renfermera plus alors que des constantes arbitraires, et n'en sera pas moins l'intégrale complète de cette équation $L=0$. Cette forme singulière de l'intégrale complète, sans aucune fonction arbitraire, d'une équation linéaire aux différences partielles, mérite une attention toute particulière, à cause des nombreux usages qu'on en pourra faire pour la résolution des problèmes; son caractère distinctif consiste en ce que tous les termes de la série (2) se déterminent, dans ce cas, indépendamment les uns des autres, et satisfont séparément à l'équation $L=0$, de manière que la valeur générale de l'inconnue $u$ est la somme d'un nombre infini de valeurs particulières.

Nous allons maintenant appliquer ces considérations générales à des exemples propres à montrer les diverses circonstances que peut présenter la série (2), et comment on peut la réduire à des intégrales définies, dans beaucoup de cas où l'intégrale de l'équation $L=0$ ne peut pas s'exprimer sous forme finie sans leur secours. Toutefois, relativement à cette réduction, je renverrai, pour de plus grands détails, à deux mémoires que j'ai publiés sur ce sujet, l'un sur l'intégration des équations linéaires à coefficiens constans (*), l'autre sur celle des équations linéaires à coefficiens variables (**).

(72). Je prends pour premier exemple l'équation linéaire et du second ordre

$$\frac{du}{dt}=a\frac{d^2u}{dx^2}, \qquad (3)$$

dans laquelle $a$ est une constante donnée.

Soit $h$ une constante à laquelle on n'attribue aucune valeur déterminée; faisons d'abord $\theta=t-h$, et considérons les coefficiens de la série (2) comme des fonctions de $x$. En la substituant dans les deux membres de l'équation (3), nous aurons

$$\alpha P(t-h)^{\alpha-1}+6Q(t-h)^{6-1}+\gamma R(t-h)^{\gamma-1}+\text{etc.}=$$
$$a\frac{d^2P}{dx^2}(t-h)^{\alpha}+a\frac{d^2Q}{dx^2}(t-h)^{6}+\text{etc.}$$

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* tome III.
(**) *Journal de l'École Polytechnique,* 19e cahier.

Les exposans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., formant par hypothèse une suite croissante, il faut, pour que ces deux séries puissent être identiques, que l'on ait d'abord

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 2,\ \text{etc.},$$

et pour qu'elles le soient effectivement, il faut que l'on ait ensuite

$$Q = a\,\frac{d^2P}{dx^2},\ 2R = a\,\frac{d^2Q}{dx^2},\ 3S = a\,\frac{d^2R}{dx^2},\ \text{etc.}$$

Le premier coefficient P demeurera indéterminé; tous les autres s'exprimeront au moyen de celui-là; et en mettant une fonction arbitraire $\varphi x$ à la place de P, la série (2) deviendra

$$u = \varphi x + a(t-h)\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \frac{a^2(t-h)^2}{1.2}\frac{d^4\varphi x}{dx^4} + \text{etc.};\quad (4)$$

résultat que l'on peut aussi déduire de la série (1), combinée avec l'équation (2), et que l'on peut regarder comme la valeur la plus générale de $u$ tant que l'on n'y détermine pas la constante $h$, puisque alors la valeur quelconque de $u$ est certainement développable, en vertu du théorème de Taylor, suivant les puissances entières et positives de la différence $t-h$.

Il est bon d'observer qu'il n'en serait plus de même si l'on donnait à $h$ une valeur déterminée, si l'on faisait $h=0$, par exemple, c'est-à-dire, si l'on supposait la valeur de $u$ développée suivant les puissances croissantes de $t$. En effet, toute fonction d'une variable $t$ n'est pas développable suivant ses puissances ascendantes: il y a des fonctions qui ne peuvent se développer que suivant les puissances descendantes de la variable; et la fonction $u$ étant inconnue, elle peut être de cette espèce. Par conséquent, si l'on faisait $h=0$ dans l'équation résultant de la substitution de la série (2) dans l'équation (3), il faudrait supposer successivement croissante et décroissante la suite des exposans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc.; on en conclurait deux systèmes différens de valeurs de ces exposans et des coefficiens P, Q, R, etc.; et pour avoir la valeur la plus générale de $u$, on devrait prendre la somme des deux expressions correspondantes de la série (2). La même remarque s'applique à tous les cas semblables, et en parti-

culier, à la valeur suivante de $u$, dans laquelle on devra aussi laisser la constante $h$ indéterminée pour que cette valeur conserve toute sa généralité.

Soit actuellement $\theta = x - h$. Les coefficiens de la série (4) étant alors des fonctions de $t$, si on les substitue dans l'équation (3), on aura

$$\frac{dP}{dt}(x-h)^{\alpha} + \frac{dQ}{dt}(x-h)^{\beta} + \frac{dR}{dt}(x-h)^{\gamma} + \text{etc.} =$$
$$a\alpha(\alpha-1)P(x-h)^{\alpha-2} + a\beta(\beta-1)Q(x-h)^{\beta-2} + a\gamma(\gamma-1)R(x-h)^{\gamma-2} + \text{etc.}$$

Puisque les exposans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc., forment une suite croissante, il faut, pour que ces deux séries puissent être identiques, que le premier terme de la seconde disparaisse, ce qui exige que l'on ait $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Dans le cas de $\alpha = 0$, il faudra que les autres exposans $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc., soient les nombres pairs 2, 4, 6, etc., et dans le cas de $\alpha = 1$, qu'ils soient les nombres impairs 3, 5, 7, etc. Ensuite on aura, dans le premier cas,

$$1.2.a\,Q = \frac{dP}{dt}, \quad 3.4.a\,R = \frac{dQ}{dt}, \quad 5.6.a\,S = \frac{dR}{dt}, \text{ etc.},$$

et, dans le second,

$$2.3.aQ = \frac{dP}{dt}, \quad 4.5.aR = \frac{dQ}{dt}, \quad 6.7.aS = \frac{dR}{dt}, \text{ etc.}$$

La formule (1) donnera donc pour $u$ deux séries, dont l'une procédera suivant les puissances paires de $x-h$, et l'autre suivant les puissances impaires. Dans chacune d'elles le premier coefficient P restera indéterminé; tous les autres s'exprimeront au moyen de P; et en désignant celui-ci par $\varphi t$ dans la première série, par $\Psi t$ dans la seconde, et prenant pour $u$ la somme des deux séries, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} u = \varphi t + \dfrac{(x-h)^2}{1.2.a}\dfrac{d\varphi t}{dt} + \dfrac{(x-h)^4}{1.2.3.4.a^2}\dfrac{d^2\varphi t}{dt^2} + \text{etc.} \\ +(x-h)\Psi t + \dfrac{(x-h)^3}{1.2.3.a}\dfrac{d\Psi t}{dt} + \dfrac{(x-h)^5}{1.2.3.4.5.a^2}\dfrac{d^2\Psi t}{dt^2} + \text{etc.}; \end{array}\right\} \quad (5)$$

ce qui sera la valeur la plus générale de $u$, que l'on pourrait aussi déduire de la série (1).

Désignons par $e$ la base des logarithmes népériens, et faisons enfin

$\theta = e^{x}$. En considérant les coefficiens de la série (2) comme des fonctions de $t$, et la substituant dans l'équation (3), on aura

$$\frac{dP}{dt}e^{\alpha x} + \frac{dQ}{dt}e^{\beta x} + \frac{dR}{dt}e^{\gamma x} + \text{etc.} =$$
$$a\alpha^2 P e^{\alpha x} + a\beta^2 Q e^{\beta x} + a\gamma^2 R e^{\gamma x} + \text{etc.}$$

Or, pour que les deux membres de cette équation soient identiques, il est nécessaire et il suffit qu'on ait

$$\frac{dP}{dt} = a\alpha^2 P,\ \frac{dQ}{dt} = a\beta^2 Q,\ \frac{dR}{dt} = a\gamma^2 R,\ \text{etc.};$$

en sorte que tous les termes de la série (2) se détermineront indépendamment les uns des autres et formeront autant de valeurs particulières de $u$, qui satisferont isolément à l'équation (3), ainsi qu'on l'a dit plus haut. Les exposans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., resteront indéterminés; en désignant par A, B, C, etc., des constantes arbitraires, on aura

$$P = Ae^{a\alpha^2 t},\ Q = Be^{a\beta^2 t},\ R = Ce^{a\gamma^2 t},\ \text{etc.};$$

et la valeur générale de $u$ sera

$$u = Ae^{a\alpha^2 t}e^{\alpha x} + Be^{a\beta^2 t}e^{\beta x} + Ce^{a\gamma^2 t}e^{\gamma x} + \text{etc.} \qquad (6)$$

On obtiendrait la même expression de $u$ en prenant $\theta = e^{t}$ dans la série (2), considérant alors ses coefficiens comme des fonctions de $x$, et changeant dans le résultat les constantes arbitraires $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., en $a\alpha^2$, $a\beta^2$, $a\gamma^2$, etc. Ces constantes pourront être réelles ou imaginaires, aussi bien que les coefficiens A, B, C, etc., de sorte que la formule (6) est une série d'exponentielles, de sinus et de cosinus. Si l'on veut, on peut aussi écrire la valeur de $u$ sous cette forme:

$$\begin{aligned} u = {} & Ae^{-a\alpha^2 t}\cos \alpha x + A'e^{-a\alpha'^2 t}\sin \alpha' x \\ & + Be^{-a\beta^2 t}\cos \beta x + B'e^{-a\beta'^2 t}\sin \beta' x \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

dans laquelle les coefficiens A, A′, B, B′, etc., et les exposans $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$, etc., sont des constantes réelles ou imaginaires, ce qui fait que

cette expression de $u$ ne diffère pas essentiellement de la précédente. Dans tous les cas, chaque terme de la valeur de $u$ est une intégrale particulière de l'équation (3), et son intégrale complète est la somme d'un nombre infini de ces intégrales particulières.

(73) Voilà donc les trois séries (4), (5), (6), qui expriment également, mais sous des formes différentes, l'intégrale complète de l'équation (3). La première contient une seule fonction arbitraire $\varphi x$, la seconde en contient deux $\psi t$ et $\Upsilon t$, et la troisième ne renferme que des constantes arbitraires en nombre infini et formant deux suites différentes A, B, C, etc., et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc. Puisque ces valeurs de $u$ ont toutes trois le même degré de généralité, il s'ensuit qu'elles doivent être équivalentes, et que chacune d'elles doit pouvoir se transformer dans les deux autres; ce qu'on peut en effet vérifier de la manière suivante.

Quelle que soit la fonction arbitraire $\varphi x$, on peut la développer suivant les puissances entières et positives de $x-h$. Soit donc

$$\varphi x = \text{A} + \text{B}(x-h) + \frac{\text{C}(x-h)^2}{1.2} + \frac{\text{D}(x-h)^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

A, B, C, D, etc., désignant des constantes arbitraires. Nous aurons

$$\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = \text{C} + \text{D}(x-h) + \frac{\text{E}(x-h)^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^4\varphi x}{dx^4} = \text{E} + \frac{\text{F}(x-h)}{1.2} + \text{etc.},$$

etc.;

au moyen de quoi la série (4) deviendra

$$\begin{aligned}u = {} & \text{A} + \text{C}a(t-h) + \frac{\text{E}a^2(t-h)^2}{1.2} + \text{etc.} \\ & + \left[\text{B} + \text{D}a(t-h) + \frac{\text{F}a^2(t-h)^2}{1.2} + \text{etc.}\right]x \\ & + [\text{C} + \text{E}a(t-h) + \text{etc.}]\frac{x^2}{1.2} \\ & + [\text{D} + \text{F}a(t-h) + \text{etc.}]\frac{x^3}{1.2.3} \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Or, si l'on fait

$$A + Ca(t-h) + \frac{Ea^2(t-h)^2}{1.2} + \text{etc.} = \psi t,$$

$$B + Da(t-h) + \frac{Fa^2(t-h)^2}{1.2} + \text{etc.} = \Psi t,$$

$\psi t$ et $\Psi t$ seront deux fonctions arbitraires et indépendantes l'une de l'autre; on en déduira

$$C + Ea(t-h) + \text{etc.} = \frac{d\psi t}{dt},$$

$$D + Fa(t-h) + \text{etc.} = \frac{d\Psi t}{dt},$$

etc.;

et la valeur précédente de $u$ coïncidera avec la série (5). Réciproquement on transformera de même cette série (5) dans la série (4).

En développant la série (6) suivant les puissances de $t-h$, et remplaçant, pour abréger, $Ae^{a\alpha^2 h}$, $Be^{a6^2 h}$, $Ce^{a\gamma^2 h}$, etc., par d'autres constantes arbitraires $A'$, $B'$, $C'$, etc., on a

$$\begin{aligned} u = {} & A'e^{\alpha x} + B'e^{6x} + C'e^{\gamma x} + \text{etc.} \\ & + (A'\alpha^2 e^{\alpha x} + B'6^2 e^{6x} + C'\gamma^2 e^{\gamma x} + \text{etc.})\, a(t-h) \\ & + (A'\alpha^4 e^{\alpha x} + B'6^4 e^{6x} + C'\gamma^4 e^{\gamma x} + \text{etc.})\, \frac{a^2(t-h)^2}{1.2} \\ & + \text{etc.}; \end{aligned}$$

et si nous faisons

$$A'e^{\alpha x} + B'e^{6x} + C'e^{\gamma x} + \text{etc.} = \phi x,$$

$\phi x$ sera une fonction arbitraire de $x$; il en résultera

$$A'\alpha^2 e^{\alpha x} + B'6^2 e^{6x} + C'\gamma^2 e^{\gamma x} + \text{etc.} = \frac{d^2\phi x}{dx^2},$$

$$A'\alpha^4 e^{\alpha x} + B'6^4 e^{6x} + C'\gamma^4 e^{\gamma x} + \text{etc.} = \frac{d^4\phi x}{dx^4},$$

etc.;

ce qui fera coïncider la valeur précédente de $u$ avec la série (4). On

fera coïncider semblablement la série (6) avec la série (5), en développant la première suivant les puissances de $x-h$.

Il n'y a pas de doute que l'expression précédente de $\varphi x$ en séries d'exponentielles réelles ou imaginaires ne puisse représenter une fonction quelconque de $x$. Elle peut représenter, par exemple, la puissance quelconque $x^m$; car, en désignant par $\varepsilon$ une constante infiniment petite, on a

$$x^m = \left(\frac{e^{\varepsilon x}-1}{\varepsilon}\right)^m;$$

quantité développable par la formule du binome en une série d'exponentielles.

(74). Maintenant il s'agit de réduire à des intégrales définies la série (6), et ensuite les séries (4) et (5); transformations qu'on effectuera au moyen de formules connues dont je rappellerai cependant les démonstrations.

Appelons $k$ la valeur de l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}d\omega$. En changeant successivement $\omega$ en $x$ et $y$, nous aurons

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = k,\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = k,$$

et, par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx . \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = k^2.$$

Or, si l'on considère la surface de révolution dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires,

$$z = e^{-x^2-y^2},$$

l'intégrale double qui exprime la valeur de $k^2$ sera évidemment le volume compris entre cette surface et le plan des $x$ et $y$ prolongé à l'infini en tous sens. Mais on peut aussi décomposer ce même volume en tranches cylindriques et infiniment minces, dont l'axe commun est celui des $z$; le rayon d'une tranche quelconque étant $r$, son volume sera le produit de sa base $2\pi rdr$ et de sa hauteur $e^{-r^2}$; le

volume total sera donc l'intégrale de ce produit prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \infty$; en l'égalant à $k^2$, on aura donc

$$k^2 = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \pi;$$

et il en résultera

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \sqrt{\pi},$$

pour la valeur de $k$ ou de l'intégrale donnée.

Quelle que soit la constante $\alpha$, réelle ou imaginaire, les limites de cette intégrale ne changeront pas, si l'on y met $\omega - \alpha\sqrt{at}$ à la place de $\omega$; on aura donc aussi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 + 2\alpha\omega\sqrt{at} - \alpha^2 at} d\omega = \sqrt{\pi};$$

d'où l'on tire

$$e^{\alpha^2 at} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} e^{2\alpha\omega\sqrt{at}} d\omega.$$

On exprimera de même les autres exponentielles relatives à $t$, qui sont comprises dans l'équation (6); laquelle deviendra, en conséquence,

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[ A e^{\alpha(x + 2\omega\sqrt{at})} + B e^{\mathcal{C}(x + 2\omega\sqrt{at})} + C e^{\gamma(x + 2\omega\sqrt{at})} + \text{etc.} \Big] e^{-\omega^2} d\omega.$$

Mais si l'on désigne par $\varphi x$ une fonction arbitraire de $x$, et que l'on fasse

$$A e^{\alpha x} + B e^{\mathcal{C} x} + C e^{\gamma x} + \text{etc.} = \varphi x,$$

on aura, en même temps,

$$A e^{\alpha(x + 2\omega\sqrt{at})} + B e^{\mathcal{C}(x + 2\omega\sqrt{at})} + C e^{\gamma(x + 2\omega\sqrt{at})} + \text{etc.} = \varphi(x + 2\omega\sqrt{at}),$$

et il en résultera

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\omega\sqrt{at}) e^{-\omega^2} d\omega. \qquad (7)$$

Cette équation est, sous forme finie et la plus simple, l'intégrale complète de l'équation (3). Elle ne renferme, comme on voit, qu'une seule fonction arbitraire, qui se déterminera immédiatement d'après la valeur de $u$ relative à $t=0$. Toutefois cette forme de l'intégrale complète suppose que cette valeur de $u$, qui sera celle de $\varphi x$, croisse avec la variable $x$ dans un moindre rapport que $e^{x^2}$, et que le produit $e^{-x^2}\varphi x$ s'évanouisse pour $x=\pm\infty$, sans quoi la quantité comprise sous le signe $\int$ croîtrait indéfiniment avec $\omega$ pour toutes les valeurs de $t$ différentes de zéro, et l'intégrale définie, dont les limites sont $\omega=\pm\infty$, aurait généralement une valeur infinie, ce qui serait inadmissible. Avec cette restriction, il est facile de vérifier que l'équation (7) satisfait à l'équation (3).

En effet, si nous faisons, pour un moment,

$$\frac{d\varphi x}{dx}=\varphi' x, \quad \frac{d^2\varphi x}{dx^2}=\varphi'' x,$$

nous déduirons de l'équation (7)

$$\frac{du}{dt}=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(x+2\omega\sqrt{at})\,e^{-\omega^2}\frac{\omega d\omega}{\sqrt{at}},$$

$$a\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi''(x+2\omega\sqrt{at})\,e^{-\omega^2}d\omega;$$

en intégrant par partie, et supposant que le produit de $e^{-\omega^2}$ et $\varphi'(x+2\omega\sqrt{at})$ s'évanouisse aux deux limites, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(x+2\omega\sqrt{at})\,e^{-\omega^2}\frac{\omega d\omega}{\sqrt{at}}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi''(x+2\omega\sqrt{at})\,e^{-\omega^2}d\omega;$$

ce qui fait coïncider la valeur de $\frac{du}{dt}$ avec celle de $a\frac{d^2u}{dx^2}$, et satisfait par conséquent à l'équation (3).

(75). Si l'on désigne par $g$ une constante positive, et que l'on mette $\sqrt{g}\,\omega$ et $\sqrt{g}\,d\omega$ à la place de $\omega$ et $d\omega$ dans l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2}d\omega$, ses limites ne seront pas changées; et en divisant par $\sqrt{g}$, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-g\omega^2}d\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{g}}.$$

En différentiant $n$ fois de suite par rapport à $g$, et faisant ensuite $g = 1$, on en déduit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} \omega^{2n} d\omega = \frac{1.3.5..2n-1}{2^n} \sqrt{\pi};$$

d'ailleurs on a évidemment

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} \omega^{2n+1} d\omega = 0;$$

et au moyen de ces deux dernières équations, la formule (4) peut s'écrire ainsi :

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi x + 2\omega \sqrt{a(t-h)} \frac{d\varphi x}{dt} + \frac{[2\omega \sqrt{a(t-h)}]^2}{1.2} \frac{d^2\varphi x}{dx^2} \right.$$
$$\left. + \frac{[2\omega\sqrt{a(t-h)}]^3}{1.2.3} \frac{d^3\varphi x}{dx^3} + \frac{[2\omega\sqrt{a(t-h)}]^4}{1.2.3.4} \frac{d^4\varphi x}{dx^4} + \text{etc.} \right\} e^{-\omega^2} d\omega.$$

Or, en vertu du théorème de Taylor, cette expression est, sous forme finie,

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[x + 2\omega \sqrt{a(t-h)}] e^{-\omega^2} d\omega.$$

Si l'on veut que la fonction arbitraire $\varphi x$ soit la valeur de $u$ qui répond à $t = 0$, on fera $h = 0$, et cette formule coïncidera avec l'équation (7), déduite de la série (6).

On peut mettre ce résultat sous une autre forme, en désignant par $\omega'$ une nouvelle variable, et faisant

$$x + 2\omega \sqrt{a(t-h)} = \omega';$$

on aura alors

$$\omega = \frac{\omega' - x}{2\sqrt{a(t-h)}}, \quad d\omega = \frac{d\omega'}{2\sqrt{a(t-h)}},$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-h)}} \int \varphi\omega' e^{-\frac{(\omega'-x)^2}{4a(t-h)}} d\omega'.$$

Les limites de cette intégrale seront indéterminées; chacun de ses

élémens, divisé par $\sqrt{t-h}$, satisfera séparément à l'équation (3); et l'on pourra aussi remplacer cette valeur de $u$ par la série

$$u = \frac{Ae^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a(t-h)}}}{\sqrt{t-h}} + \frac{A'e^{-\frac{(\alpha'-x)^2}{4a(t-h')}}}{\sqrt{t-h'}} + \text{etc.},$$

dans laquelle A, A′, etc., $\alpha$, $\alpha'$, etc., $h$, $h'$, etc., sont des constantes arbitraires, et qui représente en série d'une forme particulière l'intégrale complète de l'équation (3).

La série (5) conduit aussi à une intégrale de l'équation (3) sous forme finie, mais beaucoup moins simple que la précédente.

Cette série se compose de deux parties dont l'une dépend de la fonction $\psi t$, et l'autre de la fonction $\Psi t$. Le terme général de la première partie peut être mis sous la forme

$$\frac{2^n}{1.3.5\ldots 2n-1} \; \frac{\left[\frac{(x-h)^2}{4a}\right]^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n\psi t}{dt^n};$$

par une suite d'intégrations par partie, on a

$$\frac{2^n}{1.3.5\ldots 2n-1} = \gamma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\omega\sqrt{-1}}\,d\omega}{(c+\omega\sqrt{-1})^{n+\frac{1}{2}}},$$

en désignant par $c$ une constante réelle, qui ne soit pas nulle, et faisant pour abréger

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\omega\sqrt{-1}}\,d\omega}{\sqrt{c+\omega\sqrt{-1}}} = \frac{1}{\gamma};$$

ce terme général deviendra donc

$$\frac{\gamma}{1.2.3\ldots n}\left[\frac{(x-h)^2}{4a}\right]^n\frac{d^n\psi t}{dt^n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\omega\sqrt{-1}}}{(c+\omega\sqrt{-1})^{n+\frac{1}{2}}};$$

et d'après le théorème de Taylor, on en conclura, pour la première partie de la série (1),

$$\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left[t+\frac{(x-h)^2}{4a(c+\omega\sqrt{-1})}\right]\frac{e^{\omega\sqrt{-1}}\,d\omega}{\sqrt{c+\omega\sqrt{-1}}}.$$

La seconde partie de cette même série se déduit de la première, en différentiant celle-ci par rapport à $x$, multipliant par $a$, et mettant $\Psi t$ au lieu de $\frac{d\psi t}{dt}$; en ajoutant donc l'une à l'autre ces deux parties de la série (5), on aura

$$u = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left[ t + \frac{(x-h)^2}{4a(c+\omega\sqrt{-1})} \right] \frac{e^{\omega\sqrt{-1}}\, d\omega}{\sqrt{c+\omega\sqrt{-1}}}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\gamma(x-h) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \left[ t + \frac{(x-h)^2}{4a(c+\omega\sqrt{-1})} \right] \frac{e^{\omega\sqrt{-1}}\, d\omega}{(c+\omega\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}},$$

pour l'intégrale complète et sous forme finie de l'équation (3), à laquelle on peut en effet vérifier que cette valeur de $u$ satisfait. Les deux fonctions arbitraires $\psi t$ et $\Psi t$ qu'elle renferme sont les valeurs de $u$ et $\frac{du}{dx}$ qui répondent à $x = h$.

(76). Le procédé qui nous a conduit à la série (6) et ensuite à l'intégrale de l'équation (3) donnée par la formule (7), peut s'étendre sans difficulté à l'équation

$$\frac{du}{dt} = a\,\frac{d^2u}{dx^2} + b\,\frac{d^2u}{dy^2} + c\,\frac{d^2u}{dz^2} + \text{etc.},$$

qui contient un nombre quelconque de variables indépendantes $t$, $x$, $y$, $z$, etc., et dans laquelle $a$, $b$, $c$, etc., sont des coefficiens constans.

En développant d'abord, comme précédemment, la valeur de $u$ suivant les puissances de $e^x$, développant ensuite le coefficient de chaque terme suivant les puissances de $e^y$, puis le coefficient de chaque terme de ce second développement suivant les puissances de $e^z$, etc., l'inconnue $u$ se trouvera développée suivant les puissances et les produits des exponentielles $e^x$, $e^y$, $e^z$, etc., et l'on pourra représenter par

$$Te^{\alpha x}\, e^{\beta y}\, e^{\gamma z}\ \text{etc.};$$

un terme quelconque de cette série; T étant une fonction de $t$, et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., des quantités constantes. Si l'on substitue cette série à la place de $u$ dans les deux membres de l'équation donnée, on

trouvera que chacun de ses termes doit satisfaire séparément à cette équation, que les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., resteront indéterminées, et que l'on aura

$$\frac{dT}{dt} = T(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \text{etc.}),$$

pour déterminer le coefficient T d'un terme quelconque. En désignant par A une constante arbitraire, la valeur de T tirée de cette équation sera

$$T = Ae^{(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \text{etc.})t};$$

par conséquent la valeur de $u$ en série aura pour expression

$$u = \Sigma Ae^{a\alpha^2 t}e^{b\beta^2 t}e^{c\gamma^2 t} \text{ etc. } e^{\alpha x}e^{\beta y}e^{\gamma z} \text{ etc.};$$

$\Sigma$ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, de A, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc.

Si l'on représente par $h$, $h'$, $h''$, etc., des constantes quelconques, on pourra, si l'on veut, sans augmenter la généralité de la valeur de $u$, remplacer le coefficient A par $Ae^{-a\alpha^2 h}e^{-b\beta^2 h'}e^{-c\gamma^2 h''}$, etc. Alors en faisant subir la transformation du n° 74 à chacune des exponentielles $e^{a\alpha^2(t-h)}$, $e^{b\beta^2(t-h')}$, $e^{c\gamma^2(t-h'')}$, etc., et comprenant dans A les diviseurs $\sqrt{\pi}$, il en résultera

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\left\{\Sigma Ae^{\alpha[x+2\omega\sqrt{a(t-h)}]+\beta[y+2\omega'\sqrt{b(t-h')}]+\text{etc.}}\right\}e^{-\omega^2-\omega'^2-\text{etc.}}d\omega d\omega' \text{ etc.}$$

Or, si nous faisons

$$\Sigma Ae^{\alpha x}e^{\beta y}e^{\gamma z} \text{ etc.} = \varphi(x, y, z, \text{etc.}),$$

$\varphi$ sera une fonction arbitraire; par le changement des variables, on en conclura

$$\Sigma Ae^{\alpha[x+2\omega\sqrt{a(t-h)}]+\beta[y+2\omega\sqrt{b(t-h')}]+\gamma[z+2\omega\sqrt{c(t-h'')}]+\text{etc.}}$$
$$= \varphi(x + 2\omega\sqrt{a(t-h)}, y + 2\omega\sqrt{b(t-h')}, z + 2\omega\sqrt{c(t-h'')}, \text{etc.});$$

on aura donc finalement

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\varphi(x+2\omega\sqrt{a(t-h)},\ y+2\omega'\sqrt{b(t-h')},\ \text{etc.})\,e^{-\omega^2-\omega'^2-\text{etc.}}\,d\omega d\omega' \text{ etc.},$$

pour l'intégrale complète sous forme finie de l'équation donnée. Elle ne contient, comme on voit qu'une seule fonction arbitraire; laquelle est relative à autant de variables indépendantes, moins une, qu'il s'en trouve dans l'équation donnée. Pour que cette fonction puisse se déterminer d'après la valeur de $u$ qui répond à une valeur donnée de $t$, il faudra prendre toutes les constantes $h$, $h'$, $h''$, etc., égales entre elles et à cette valeur de $t$; la fonction $\varphi(x, y, z,$ etc.), sera la valeur correspondante de $u$, divisée par une certaine puissance de $\sqrt{\pi}$.

Si l'on considère, du moins dans une première approximation, la chaleur spécifique $c$ et la conductibilité $k$ comme des quantités constantes, et qu'on fasse $\frac{k}{c} = a^2$, l'équation (7) du n° 49 deviendra

$$\frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Son intégrale complète sous forme finie sera donc comprise dans la formule précédente. Pour que la fonction arbitraire qu'elle renferme s'exprime immédiatement au moyen de la température initiale, on y supprimera les constantes $h$, $h'$, $h''$; cette intégrale sera alors

$$u = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2a\omega\sqrt{t},\ y+2a\omega'\sqrt{t},\ z+2a\omega''\sqrt{t})\,e^{-\omega^2-\omega'^2-\omega''^2}\,d\omega d\omega' d\omega'';$$

$\varphi(x, y, z)$ désignant la valeur de $u$ qui répond à $t = 0$.

(77). Prenons encore pour exemple l'équation

$$\frac{d^2u}{dtdx} = au, \qquad (8)$$

du second ordre comme l'équation (3), mais d'une forme différente, et dans laquelle $a$ est toujours une constante donnée.

Je désigne, comme précédemment, par $h$ une constante à laquelle je n'attribue aucune valeur particulière; je fais $\theta = t - h$ dans la série (2) dont les coefficiens seront alors des fonctions de $x$; en la

substituant dans l'équation (8), on aura

$$\alpha \frac{dP}{dx}(t-h)^{\alpha-1} + 6\frac{dQ}{dx}(t-h)^{6-1} + \gamma\frac{dR}{dx}(t-h)^{\gamma-1} + \text{etc.}$$

$$= aP(t-h)^{\alpha} + aQ(t-h)^{6} + aR(t-h)^{\gamma} + \text{etc.}$$

Les exposans $\alpha$, $6$, $\gamma$, etc., formant par hypothèse une suite croissante, il faut, pour que ces deux séries puissent être identiques, que $\alpha$ soit zéro et que $6$, $\gamma$, $\delta$, etc., soient la suite des nombres naturels 1, 2, 3, etc. Cela étant, il faut qu'on ait, en outre,

$$\frac{dQ}{dx} = aP, \quad 2\frac{dR}{dx} = aQ, \quad 3\frac{dS}{dx} = aR, \text{ etc.}$$

Le premier coefficient P restera une fonction arbitraire de $x$ que je représenterai par $fx$. Tous les autres coefficiens Q, R, S, etc., se déduiront de P par des intégrations successives, et il en résultera

$$u = fx + a(t-h)\int fx dx + \frac{a^2(t-h)^2}{1.2}\int\int fx dx^2 + \frac{a^3(t-h)^3}{1.2.3}\int\int\int fx dx^3 + \text{etc.},$$

pour l'intégrale complète de l'équation (8), en série ordonnée suivant les puissances de $t-h$.

Elle ne contient explicitement qu'une seule fonction arbitraire $fx$; mais la suite des intégrales $\int fx dx$, $\int\int fx dx^2$, $\int\int\int fx dx^3$, etc., renferme des constantes arbitraires en nombre infini, qui équivalent à une seconde fonction arbitraire.

En effet, désignons par $k$ une constante quelconque, comme la constante $h$; par A, B, C, D, etc., des constantes arbitraires, et par $\varphi x$ une fonction arbitraire; faisons

$$\int \varphi x dx = \varphi_1 x, \quad \int \varphi_1 x dx = \varphi_2 x, \quad \int \varphi_2 x dx = \varphi_3 x, \text{ etc.};$$

et supposons que toutes ces intégrales $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$, etc., s'évanouissent pour $x = k$. Sans restreindre la généralité de la valeur précédente de $u$, nous pourrons faire

$$fx = A + \varphi_1 x,$$
$$\int fx dx = B + A(x-k) + \varphi_2 x,$$

$$\iint fx dx^2 = C + B(x-k) + \frac{A(x-k)^2}{1.2} + \varphi_3 x,$$

$$\iiint fx dx^3 = D + C(x-k) + \frac{B(x-k)^2}{1.2} + \frac{A(x-k)^3}{1.2.3} + \varphi_4 x,$$

etc.;

au moyen de quoi cette valeur de $u$ pourra s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} u = A\Big[1 &+ a(x-k)(t-h) + \frac{a^2(x-k)^2(t-h)^2}{1.2\,.\,1.2} + \frac{a^3(x-k)^3(t-h)^3}{1.2.3\,.\,1.2.3} + \text{etc.}\Big] \\ &+ \varphi_1 x + a(t-h)\varphi_2 x + \frac{a^2(t-h)^2}{1.2}\varphi_3 x + \frac{a^3(t-h)^3}{1.2.3}\varphi_4 x + \text{etc.} \\ &+ Ba(t-h) + \frac{Ca^2(t-h)^2}{1.2} + \frac{Da^3(t-h)^3}{1.2.3} + \frac{Ea^4(t-h)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \\ &+ a(x-k)\left[\frac{Ba(t-h)^2}{1.2} + \frac{Ca^2(t-h)^3}{1.2.3} + \frac{Da^3(t-h)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right] \\ &+ \frac{a^2(x-k)^2}{1.2}\left[\frac{Ba(t-h)^3}{1.2.3} + \frac{Ca^2(t-h)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right] \\ &+ \frac{a^3(x-k)^3}{1.2.3}\left[\frac{Ba(t-h)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right] \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Je fais actuellement

$$Ba + Ca^2(t-h) + \frac{Da^3(t-h)^2}{1.2} + \frac{Ea^4(t-h)^3}{1.2.3} + \text{etc.} = \psi t;$$

de sorte que $\psi t$ soit une fonction arbitraire de $t$. Je fais aussi

$$\int \psi t dt = \psi_1 t, \quad \int \psi_1 dt = \psi_2 t, \quad \int \psi_2 t dt = \psi_3 t, \text{ etc.};$$

et je suppose que ces intégrales successives $\psi_1 t$, $\psi_2 t$, $\psi_3 t$, etc., soient toutes nulles pour $t = h$. Il en résultera

$$\begin{aligned} &Ba(t-h) + \frac{Ca^2(t-h)^2}{1.2} + \frac{Da^3(t-h)^3}{1.2.3} + \frac{Ea^4(t-h)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} = \psi_1 t, \\ &\frac{Ba(t-h)^2}{1.2} + \frac{Ca^2(t-h)^3}{1.2.3} + \frac{Da^3(t-h)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} = \psi_2 t \\ &\frac{Ba(t-h)^3}{1.2.3} + \frac{Ca^2(t-h)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} = \psi_3 t, \\ &\frac{Ba(t-h)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} = \psi_4 t, \end{aligned}$$

etc.;

et la valeur de $u$ deviendra, en conséquence,

$$u=A\left[1+a(x-k)(t-h)+\frac{a^2(x-k)^2(t-h)^2}{1.2\;.\;1.2}+\frac{a^3(x-k)^3(t-h)^3}{1.2.3\;.\;1.2.3}+\text{etc.}\right]$$
$$+\varphi_1 x+a(t-h)\varphi_2 x+\frac{a^2(t-h)^2}{1.2}\varphi_3 x+\frac{a^3(t-h)^3}{1.2.3}\varphi_4 x+\text{etc.} \qquad (9)$$
$$+\psi_1 t+a(x-k)\psi_2 t+\frac{a^2(x-k)^2}{1.2}\psi_3 t+\frac{a^3(x-k)^3}{1.2.3}\psi_4 t+\text{etc.}$$

Cette intégrale complète de l'équation (8) est semblable par rapport à $t$ et $x$; ce qui devait être, puisque l'équation donnée contient semblablement ces deux variables indépendantes. Elle procède suivant les intégrales successives des fonctions arbitraires, tandis que l'intégrale complète de l'équation (3) procédait suivant leurs différentielles. Indépendamment des deux fonctions arbitraires $\varphi x$ et $\psi t$, contenues sous les signes $\int$, elle renferme la constante arbitraire A, qui représente, d'après cette équation (9), la valeur de $u$ correspondante à $t=h$ et $x=k$, et qu'il faut conserver, pour que les constantes $h$ et $k$ puissent être choisies à volonté. En supposant qu'on a $u=\Phi x$ quand $t=h$, et $u=\Psi t$ quand $x=k$, on aura, en vertu de cette même équation,

$$A=\Phi h=\Psi k, \quad \varphi_1 x=\Phi x-A, \quad \psi_1 t=\Psi t-A,$$

et, par conséquent,

$$\varphi x=\frac{d\Phi x}{dx}, \quad \psi t=\frac{d\Psi t}{dt};$$

ce qui fera connaître toutes les quantités arbitraires que renferme le second membre de l'équation (9).

On peut aussi exprimer en série d'exponentielles l'intégrale complète de l'équation (8), pour laquelle on trouve, sans difficulté,

$$u=Ae^{\alpha t}e^{\frac{ax}{\alpha}}+Be^{\mathcal{C}t}e^{\frac{ax}{\mathcal{C}}}+Ce^{\gamma t}e^{\frac{ax}{\gamma}}+\text{etc.};$$

A, B, C, etc., $\alpha$, $\mathcal{C}$, $\gamma$, etc., étant deux séries de constantes arbitraires, réelles ou imaginaires.

(78). Pour obtenir sous forme finie l'intégrale de cette même équa-

tion (8), j'observe que l'on a généralement

$$\varphi_n x = \frac{1}{1.2.3...(n-1)} \int_k^x (x-\omega)^n \varphi\omega d\omega,$$
$$\psi_n t = \frac{1}{1.2.3...(n-1)} \int_h^t (t-\omega)^n \psi\omega d\omega.$$

En effet, $n$ étant un nombre entier et positif, on a, en intégrant $n$ fois de suite par partie,

$$\int (x-\omega)^{n-1} \varphi\omega d\omega = (x-\omega)^{n-1} \varphi_1\omega + (n-1)(x-\omega)^{n-2} \varphi_2\omega$$
$$+ (n-1)(n-2).(x-\omega)^{n-3} \varphi_3\omega + \ldots + (n-1)(n-2)\ldots 2.1.\varphi_n\omega;$$

à la limite $\omega = k$, tous les termes du second membre de cette équation s'évanouissent par hypothèse; à la limite $\omega = x$, tous ces termes, moins le dernier, s'évanouissent également; d'où l'on conclut la valeur précédente de $\varphi_n x$; et l'on aura de même celle de $\psi_n t$.

De cette manière, l'équation (9) deviendra

$$u = A\left[1 + a(x-k)(t-h) + \frac{a^2(x-k)^2(t-h)^2}{1.2\ .\ 1.2} + \frac{a^3(x-k)^3(t-h)^3}{1.2.3\ .\ 1.2.3} + \text{etc.}\right]$$
$$+ \int_k^x \left[1 + a(t-h)(x-\omega) + \frac{a^2(t-h)^2(x-\omega)^2}{1.2\ .\ 1.2} + \frac{a^3(t-h)^3(x-\omega)^3}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.}\right] \varphi\omega d\omega,$$
$$+ \int_h^t \left[1 + a(x-k)(t-\omega) + \frac{a^2(x-k)^2(t-\omega)^2}{1.2\ .\ 1.2} + \frac{a^3(x-k)^3(t-\omega)^3}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.}\right] \psi\omega d\omega;$$

et si l'on fait

$$1 - \theta + \frac{\theta^2}{1.2\ .\ 1.2} - \frac{\theta^3}{1.2.3\ .\ 1.2.3} + \text{etc.} = y,$$

il ne restera plus qu'à exprimer la valeur de $y$ sous forme finie en fonction de $\theta$ : les valeurs des trois séries contenues dans l'expression de $u$ se déduiront de celle de $y$, en y faisant successivement

$$\theta = a(x-k)(h-t),\quad \theta = (x-\omega)(h-t),\quad \theta = (t-\omega)(k-x).$$

Or, $i$ étant un nombre entier et positif, on a, en intégrant par partie,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2i} a da = (2i-1) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2i-2} a \cos^2 a da;$$

d'où l'on conclut

$$2i\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2i}\alpha d\alpha=(2i-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2i-2}\alpha d\alpha,$$

et par suite

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2i}\alpha d\alpha=\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2.4\ldots\ldots 2i}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

On aura donc

$$\frac{\pi}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots i}=\frac{2^{2i+1}}{1.2.3.4\ldots 2i}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2i}\alpha d\alpha,$$

et, par conséquent,

$$y=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1-\frac{2^2\theta}{1.2}\sin^2\alpha+\frac{2^4\theta^2}{1.2.3.4}\sin^4\alpha-\frac{2^6\theta^3}{1.2.3.4.5.6}\sin^6\alpha+\text{etc.}\right)d\alpha,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$y=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(2\sqrt{\theta}\sin^2\alpha)d\alpha.$$

D'après cette valeur de $y$ et celle de $u$ qui en résulte, l'intégrale complète sous forme finie de l'équation (8) sera

$$\begin{aligned}u=&\frac{2}{\pi}A\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\left[2\sqrt{(x-k)(h-t)}\sin^2\alpha\right]d\alpha\\&+\frac{2}{\pi}\int_k^x\left\{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\left[2\sqrt{(x-\omega)(h-t)}\sin^2\alpha\right]d\alpha\right\}\varphi\omega d\omega\\&+\frac{2}{\pi}\int_h^t\left\{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\left[2\sqrt{(t-\omega)(k-x)}\sin^2\alpha\right]d\alpha\right\}\psi\omega d\omega.\end{aligned}$$

Elle dépend, comme on voit, d'intégrales définies doubles, au lieu que celle de l'équation (3) ne dépendait que d'intégrales définies simples.

(79). Je prends pour dernier exemple l'équation linéaire et à coefficiens variables

$$\frac{du}{dt}=a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{mu}{x^2}\right),\qquad(10)$$

dans laquelle $a$ et $m$ sont des constantes données, et que je choisis parce qu'elle se présente dans les problèmes relatifs à la distribution

de la chaleur dans l'intérieur des corps, ainsi qu'on le verra par la suite.

Si l'on fait $\theta = e^{a^2 t}$ dans la série (2), et qu'on la substitue ensuite dans les deux membres de cette équation (10), on trouve que tous les termes de cette série doivent satisfaire séparément à cette équation, que tous les exposans $\alpha$, $6$, $\gamma$, etc., restent arbitraires, et que le coefficient P du terme quelconque correspondant à l'exposant $\alpha$, est déterminé par l'équation

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{m}{x^2}P = \alpha P. \qquad (11)$$

Son intégrale complète renfermera deux constantes arbitraires; et quand on l'aura obtenue, celle de l'équation (10) sera

$$u = \Sigma P e^{a^2 \alpha t};$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, de ces deux constantes et de $\alpha$.

Quelle que soit la valeur de P, on peut la représenter par

$$P = Ax^p + A_1 x^{p'} + A_2 x^{p''} + \text{etc.};$$

en désignant par A, $A_1$, $A_2$, etc., $p$, $p'$, $p''$, etc , des coefficiens et des exposans indépendans de $x$, et sans décider d'avance si $p$, $p'$, $p''$, etc., forment une suite croissante ou décroissante. En substituant cette valeur de $u$ dans les deux membres de l'équation (10), il vient

$$\begin{aligned} &A[p(p-1)-m]x^{p-2} + A_1[p'(p'-1)-m]x^{p'-2} \\ &+ A_2[p''(p''-1)-m]x^{p''-2} + \text{etc.}, \\ &= \alpha A x^p + \alpha A_1 x^{p'} + \alpha A_2 x^{p''} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, il est aisé de voir que ces deux séries ne peuvent être identiques, à moins que le premier terme de la première ne disparaisse, ce qui exige que l'on ait

$$p(p-1) - m = 0, \qquad (12)$$

et que les exposans $p$, $p'$, $p''$, etc., ne forment une suite croissante par

des différences constantes et égales à 2; de sorte qu'on ait aussi

$$p' = p + 2, \quad p'' = p + 4, \quad p''' = p + 6, \text{ etc.}$$

Cela étant, le premier coefficient A restera indéterminé, et tous les autres se déduiront de celui-là, au moyen de cette suite d'équations

$$A_1[(p+2)(p+1)-m] = A\alpha,$$
$$A_2[(p+4)(p+3)-m] = A_1\alpha,$$
$$A_3[(p+6)(p+5)-m] = A_2\alpha,$$
etc.

L'équation (12) donnera deux valeurs de $p$ que je représenterai par $p$ et $q$; en les employant successivement, on aura deux valeurs de P, dont chacune renfermera une constante arbitraire; et en faisant la somme de ces deux valeurs, on aura l'intégrale complète de l'équation (11), savoir :

$$\begin{aligned} P = {} & x^{p}(A + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 + \text{etc.}) \\ & + x^{q}(B + B_1x^2 + B_2x^4 + B_3x^6 + \text{etc.}). \end{aligned}$$

On désigne ici par A et B les deux constantes arbitraires; $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc., sont les quantités déterminées par les équations précédentes, et $B_1$, $B_2$, $B_3$, etc., ce que deviennent ces quantités lorsqu'on y met B et $q$ à la place de A et $p$; les premières auront A et les secondes B pour facteur commun.

Cette valeur de P, et par suite celle de $u$, s'expriment par des intégrales définies, de la manière suivante.

(80). Je mets $p(p-1)$ à la place de $m$ dans l'équation qui a lieu entre deux coefficiens consécutifs $A_n$ et $A_{n-1}$, c'est-à-dire, dans la $n^{ième}$ équation de la série précédente; il en résulte

$$2n(2n+2p-1)A_n = \alpha A_{n-1}. \qquad (13)$$

En intégrant par partie, on a

$$\int \cos^{2n}\omega \sin^{2p-1}\omega d\omega = \frac{1}{2p}\cos^{2n-1}\omega \sin^{2p}\omega + \frac{2n-1}{2p}\int \cos^{2n-2}\omega \sin^{2p+1}\alpha d\omega.$$

Si $p$ est une quantité positive, ou bien si cette quantité est composée

d'une partie réelle et d'une partie imaginaire et que sa partie réelle soit positive, le terme compris hors du signe $\int$ s'évanouira pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \pi$; on aura donc

$$\int_0^\pi \cos^{2n} \omega \sin^{2p-1} \omega d\omega = \frac{2n-1}{2p} \int_0^\pi \cos^{2n-2} \omega \sin^{2p+1} \omega d\omega ;$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\pi \cos^{2n} \omega \sin^{2p-1} \omega d\omega = \frac{2n-1}{2n+2p-1} \int_0^\pi \cos^{2n-2} \omega \sin^{2p-1} \omega d\omega.$$

Par conséquent, A étant une constante arbitraire, on pourra prendre

$$A_n = \frac{A\alpha^n}{1.2.3\ldots 2n-1.2n} \int_0^\pi \cos^{2n} \omega \sin^{2p-1} \omega d\omega,$$

pour l'intégrale complète de l'équation (13) aux différences finies; car, en vertu des deux équations précédentes, on aura

$$2n(2n+2p-1)A_n = \frac{A\alpha^n}{1.2.3\ldots 2n-3.2n-2} \int_0^\pi \cos^{2n-2}\omega \sin^{2p-1} \omega d\omega ;$$

et en mettant $n-1$ au lieu de $n$ dans l'expression de $A_n$, et multipliant par $\alpha$, on aura aussi

$$\alpha A_{n-1} = \frac{A\alpha^n}{1.2.3\ldots 2n-3.2n-2} \int_0^\pi \cos^{2n-2}\omega \sin^{2p-1}\omega d\omega ;$$

ce qui rend identique l'équation (13).

On conclut de là

$$A + A_1 x^2 + A_2 x^4 \ldots + A_n x^{2n} + \text{etc.} =$$
$$A\int_0^\pi \left(1 + \frac{\alpha x^2}{1.2}\cos^2 \omega + \frac{\alpha^2 x^4}{1.2.3.4}\cos^4 \omega + \text{etc.}\right) \sin^{2p-1} \omega d\omega.$$

Comme on a évidemment

$$\int_0^\pi \cos^{2n-1} \omega \sin^{2p-1} \omega d\omega = 0,$$

on peut, si l'on veut, changer cette dernière série en celle-ci :

$$A\int_0^{\pi}\Big(1 + x\sqrt{a}\cos\omega + \frac{ax^2}{1.2}\cos^2\omega + \frac{x^3 a\sqrt{a}}{1.2.3}\cos^3\omega$$
$$+ \frac{a^2x^4}{1.2.3.4}\cos^4\omega + \text{etc.}\Big)\sin^{2p-1}\omega d\omega,$$

dont la valeur est

$$A\int_0^{\pi} e^{x\sqrt{a}\cos\omega}\sin^{2p-1}\omega d\omega.$$

Par le changement de A et $p$ en B et $q$, cette valeur deviendra celle de la seconde série contenue dans l'expression de P. Nous aurons donc

$$P = Ax^p\int_0^{\pi} e^{x\sqrt{a}\cos\omega}\sin^{2p-1}\omega d\omega + Bx^q\int_0^{\pi} e^{x\sqrt{a}\cos\omega}\sin^{2q-1}\omega d\omega, \quad (14)$$

pour l'intégrale complète et sous forme finie de l'équation (11), dans le cas où les deux racines $p$ et $q$ de l'équation (12) sont positives, ou, plus généralement, de la forme $p' \pm q'\sqrt{-1}$, en désignant par $p'$ et $q'$ des quantités réelles dont la première est positive.

Dans le cas particulier où l'on a $m = -\frac{1}{4}$, les deux racines $p$ et $q$ sont égales; on a $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$; mais pour éviter que les deux termes de la formule (14) se réduisent à un seul, on désignera par $\delta$ une quantité infiniment petite, et l'on fera d'abord $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2} + \delta$. En développant suivant les puissances de $\delta$, on aura

$$x^q \sin^{2q-1}\omega = x^{\frac{1}{2}}[1 + \delta\log(x\sin^2\omega) + \text{etc.}];$$

si donc on fait

$$A + B = A', \quad B\delta = B',$$

et qu'on supprime ensuite tous les termes multipliés par $\delta$, on aura

$$P = A'x^{\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} e^{x\sqrt{a}\cos\omega}d\omega + B'x^{\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} e^{x\sqrt{a}\cos\omega}\log(x\sin^2\omega)d\omega,$$

pour l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{1}{4x^2}P = aP.$$

En mettant, pour plus de commodité, $a^2$ à la place de $a$, la valeur de $u$ correspondante à l'expression générale de P, sera

$$u = x^p \Sigma A e^{a^2\alpha^2 t}\int_0^\pi e^{x\alpha\cos\omega}\sin^{2p-1}\omega d\omega$$
$$+ x^q \Sigma B e^{a^2\alpha^2 t}\int_0^\pi e^{x\alpha\cos\omega}\sin^{2q-1}\omega d\omega.$$

En faisant subir à l'exponentielle $e^{a^2\alpha^2 t}$ la même transformation que dans le n° 74, cette valeur de $u$ deviendra

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^p \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi \left[\Sigma A e^{(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t})\alpha}\right] e^{-\omega'^2}\sin^{2p-1}\omega d\omega' d\omega$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^q \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi \left[\Sigma B e^{(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t})\alpha}\right] e^{-\omega'^2}\sin^{2q-1}\omega d\omega' d\omega.$$

Or, en désignant par $\varphi x$ et $\psi x$ des fonctions arbitraires de $x$, on peut supposer qu'on ait

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Sigma A e^{\alpha x} = \varphi x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Sigma B e^{\alpha x} = \psi x;$$

on aura en même temps

$$\Sigma A e^{(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t})\alpha} = \varphi(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t}),$$
$$\Sigma B e^{(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t})\alpha} = \psi(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t});$$

par conséquent, l'intégrale complète et sous forme finie de l'équation (10), sera

$$u = x^p \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi \varphi(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t})\, e^{-\omega'^2}\sin^{2p-1}\omega d\omega' d\omega$$
$$+ x^q \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi \psi(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t})\, e^{-\omega'^2}\sin^{2q-1}\omega d\omega' d\omega.$$

Dans le cas de $p = q = \frac{1}{2}$, cette intégrale deviendra

$$u = x^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi \Phi(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t})\, e^{-\omega'^2} d\omega' d\omega$$
$$+ x^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\pi \Psi(x\cos\omega + 2a\omega'\sqrt{t})\, e^{-\omega'^2}\log(x\sin^2\omega)\, d\omega' d\omega,$$

et sera celle de l'équation

$$\frac{du}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{u}{4x^2}\right).$$

Ces intégrales complètes renferment deux fonctions arbitraires, $\varphi$ et $\psi$ dans la première, $\Phi$ et $\Psi$ dans la seconde; mais si on les développe suivant les puissances de $\sqrt{t}$, on trouvera que tous les coefficiens des puissances impaires sont zéro, et que les deux fonctions arbitraires se réduisent à une seule et même fonction dans tous les coefficiens des puissances paires. L'intégrale de l'équation (10), semblable sous ce rapport à celle de l'équation (3), ne doit effectivement contenir qu'une seule fonction arbitraire, lorsqu'on la développe suivant les puissances de la variable $t$.

(81). La somme des deux racines $p$ et $q$ de l'équation (12) étant égale à l'unité, une racine au moins, ou sa partie réelle, est toujours positive. Si l'autre racine est négative, la partie correspondante de la formule (14) n'aura plus lieu, et l'intégrale complète de l'équation (11) prendra une forme différente et plus compliquée. Ce cas se présentera, comme on le verra par la suite, dans les usages que nous ferons de la valeur de P; mais nous aurons seulement besoin de connaître la partie de cette valeur qui répond à la racine positive de l'équation (12). En effet, $q$ étant sa racine négative, le premier terme et quelques-uns des termes suivans auront pour facteur une puissance négative de $x$ dans la seconde série que contient la valeur de P du n° 79; et comme cette série est ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x$, il s'ensuit que sa véritable valeur sera infinie pour $x = 0$, à moins que ces termes ne soient supprimés. Or, dans les problèmes où nous ferons usage de la valeur de P, il faudra qu'elle ne devienne pas infinie pour $x = 0$; il faudra donc que le premier terme de cette seconde série disparaisse; ce qui exige que la constante arbitraire B soit égale à zéro, et ce qui fait disparaître la série entière.

Ainsi, dans ces problèmes, la valeur de P se réduira à la partie correspondante à la racine positive $p$ de l'équation (12), et sera simplement

$$P = x^p (A + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots + A_n x^{2n} + \text{etc.}).$$

De plus, la constante $\alpha$ contenue dans l'équation (11) sera une quantité négative; en remplaçant donc $\alpha$ par $-\alpha^2$, cette équation deviendra

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{m}{x^2}P + \alpha^2 P = 0; \qquad (15)$$

et en mettant aussi $-\alpha^2$ au lieu de $\alpha$ dans l'expression des coefficiens $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, etc., on aura

$$P = A\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{\alpha^2 x^2 \cos^2\omega}{1.2} + \frac{\alpha^4 x^4 \cos^4\omega}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right)\sin^{2p-1}\omega d\omega,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$P = Ax^p\int_0^{\pi}\cos(\alpha x\cos\omega)\sin^{2p-1}\omega d\omega. \qquad (16)$$

Cette valeur de P résulte également de la première partie de la formule (14), en y mettant $-\alpha^2$ à la place de $\alpha$, et observant qu'on a

$$e^{-\alpha\cos\omega\sqrt{-1}} = \cos(\alpha x\cos\omega) + \sin(\alpha x\cos\omega)\sqrt{-1};$$

d'où il suit

$$P = Ax^p\int_0^{\pi}\cos(\alpha x\cos\omega)\sin^{2p-1}\omega d\omega$$
$$+ A\sqrt{-1}\,x^p\int_0^{\pi}\sin(\alpha x\sin\omega)\sin^{2p-1}\omega d\omega;$$

quantité qui se réduit à la formule (16), parce que cette dernière intégrale est nulle, comme étant composée d'élémens qui sont deux à deux égaux et de signes contraires.

La formule (16) est une intégrale particulière de l'équation (15), assujettie à la condition spéciale de ne pas devenir infinie pour $x = 0$, et qui suffira pour résoudre les problèmes auxquels nous l'appliquerons par la suite. On vérifie aisément qu'elle satisfait à l'équation (15). En effet, à cause de $p(p-1) = m$, on en déduit

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{m}{x^2}P + \alpha^2 P = A\alpha^2 x^p\int_0^{\pi}\cos(\alpha x\cos\omega)\sin^{2p+1}\omega d\omega$$
$$- 2pA\alpha x^{p-1}\int_0^{\pi}\sin(\alpha x\cos\omega)\sin^{2p-1}\omega\cos\omega d\omega;$$

or, en intégrant par partie et observant que par hypothèse l'exposant $2p$ est positif, on a

$$\int_0^\pi \sin(ax\cos\omega)\sin^{2p-1}\omega\cos\omega d\omega = \frac{ax}{2p}\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin^{2p+1}\omega d\omega;$$

ce qui réduit à zéro le second membre de l'équation précédente.

(82). Si $i$ désigne un nombre entier et positif, et que l'on ait $m = i(i+1)$, les deux racines de l'équation (12) seront $p = i+1$ et $q = -i$. La formule (16), relative à la racine positive, sera donc

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}x^{i+1}\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin^{2i+1}\omega d\omega; \qquad (17)$$

or, la valeur de cette dernière intégrale s'obtient sous forme finie; en sorte que, dans ce cas, la quantité P s'exprime sous cette forme, sans le secours des intégrales définies.

En intégrant deux fois de suite par partie, et observant que les termes compris hors du signe $\int$ s'évanouissent aux deux limites $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, tant que $i$ surpasse l'unité, on a effectivement,

$$\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin^{2i+1}\omega d\omega = \frac{2i}{a^2x^2}\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin^{2i-1}\omega d\omega$$
$$- \frac{4i(i-1)}{a^2x^2}\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin^{2i-3}\omega\cos^2\omega d\omega,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin^{2i+1}\omega d\omega = \frac{2i(2i-1)}{a^2x^2}\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin^{2i-1}\omega d\omega$$
$$- \frac{4i(i-1)}{a^2x^2}\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin^{2i-3}\omega d\omega;$$

équation d'après laquelle on déterminera successivement les valeurs de l'intégrale dont il s'agit, qui répondent à $i = 2, = 3, = 4$, etc., au moyen de celles qui ont lieu pour $i = 0$ et $i = 1$. Quant à celles-ci, on a immédiatement

$$\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin\omega d\omega = \frac{2}{ax}\sin ax;$$

et par le procédé de l'intégration par partie, on trouve

$$\int_0^\pi \cos(\alpha x \cos\omega)\sin^3\omega d\omega = \frac{4}{\alpha^3 x^3}(\sin \alpha x - \alpha x \cos \alpha x).$$

Pour $i=2$, on aura ensuite

$$\int_0^\pi \cos(\alpha x \cos\omega)\sin^5\omega d\omega = \frac{16}{\alpha^5 x^5}(3\sin \alpha x - 3\alpha x\cos \alpha x - \alpha^2 x^2 \sin\alpha x);$$

et de même pour $i=3$, $=4$, etc. Ces expressions se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ quand $x=0$; par la règle ordinaire, leurs véritables valeurs sont

$$\int_0^\pi \sin\omega d\omega = 2, \quad \int_0^\pi \sin^3\omega d\omega = \frac{4}{3}, \quad \int_0^\pi \sin^5\omega d\omega = \frac{16}{15}, \text{ etc.}$$

Mais de cette manière on parviendrait difficilement à l'expression de la formule (17) relative à un nombre quelconque $i$. Pour l'obtenir je fais

$$P = e^{\alpha x\sqrt{-1}}(Cx^{-i} + C_1 x^{-i+1} + C_2 x^{-i+2} + \ldots + C_n x^{-i+n} + C_{n+1} x^{-i+n+1} + \text{etc.});$$

C, $C_1$, $C_2$, etc., étant des coefficiens indépendans de $x$, je substitue cette valeur de P dans le premier membre de l'équation

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{i(i+1)}{x^2}P + \alpha^2 P = 0; \qquad (18)$$

et après avoir supprimé le facteur $e^{\alpha x\sqrt{-1}}$, commun à tous les termes, j'égale séparément à zéro le coefficient de chaque puissance de $x$. Il en résulte, entre les deux coefficiens consécutifs $C_n$ et $C_{n+1}$, l'équation

$$(n+1)(2i-n)C_{n+1} + 2\alpha\sqrt{-1}(i-n)C_n = 0;$$

d'où l'on conclut que le coefficient C restera indéterminé, et que l'on aura, pour un autre coefficient quelconque,

$$C_n = \frac{(-2\alpha\sqrt{-1})^n C.i(i-1)(i-2)\ldots(i-n+1)}{1.2.3\ldots n.2i(2i-1)(2i-2)\ldots(2i-n+1)};$$

ce qui montre que pour $n=i+1$ et au-delà, tous les coefficiens

$C_{i+1}$, $C_{i+2}$, etc., seront zéro; en sorte que la valeur précédente de P sera composée d'un nombre de termes fini et égal à $i+1$.

En prenant successivement $\sqrt{-1}$ avec le signe $+$ et avec le signe $-$, on aura deux valeurs différentes de P, contenant chacune une constante arbitraire. Leur somme satisfera encore à l'équation (18), et en sera l'intégrale complète, savoir :

$$\begin{aligned}P = e^{ax\sqrt{-1}}\,C\Big[x^{-i} &+ \frac{(-2a\sqrt{-1})i}{2i}x^{-i+1} + \frac{(-2a\sqrt{-1})^2 i(i-1)}{1.2.2i.2i-1}x^{-i+2}\\ &+ \frac{(-2a\sqrt{-1})^3 i(i-1)(i-2)}{1.2.3.2i.2i-1.2i-2}x^{-i+3} + \text{etc.}\Big]\\ + e^{-ax\sqrt{-1}}\,C'\Big[x^{-i} &+ \frac{(2a\sqrt{-1})i}{2i}x^{-i+1} + \frac{(2a\sqrt{-1})^2 i(i-1)}{1.2.2i.2i-1}x^{-i+2}\\ &+ \frac{(2a\sqrt{-1})^3 i(i-1)(i-2)}{1.2.3.2i.2i-1.2i-2}x^{-i+3} + \text{etc.}\Big];\end{aligned}$$

C et C′ étant les deux constantes arbitraires. Ainsi, non-seulement la formule (17), qui n'est qu'une intégrale particulière de l'équation (18), mais aussi son intégrale complète, s'exprime sous forme finie, sans le secours des intégrales définies.

En faisant disparaître les imaginaires, remplaçant C et C′ par deux autres constantes arbitraires D et D′, et posant, pour abréger,

$$1 - \frac{2^2a^2i(i-1)x^2}{1.2.2i.2i-1} + \frac{2^4a^4i(i-1)(i-2)(i-3)x^4}{1.2.3.4.2i.2i-1.2i-2.2i-3} - \text{etc.} = X,$$

$$\frac{2aix}{2i} - \frac{2^3a^3i(i-1)(i-2)x^3}{1.2.3.2i.2i-1.2i-2} + \frac{2^5a^5i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)x^5}{1.2.3.4.5.2i.2i-1.2i-2.2i-3.2i-4} - \text{etc.} = X',$$

on aura, pour cette même intégrale complète,

$$\begin{aligned}P &= Dx^{-i}(X\sin ax - X'\cos ax)\\ &+ D'x^{-i}(X\cos ax + X'\sin ax).\end{aligned}$$

Pour en déduire la formule (17), il y faudra supprimer la partie qui devient infinie pour $x=0$. Or, quand la variable $x$ est infiniment petite, cette dernière valeur de P se réduit à $D'x^{-i}$, en négligeant toutes les quantités infinies d'un ordre inférieur à $x^{-i}$; pour que P ne soit pas une quantité infinie quand $x=0$, il faut donc qu'on ait $D'=0$; par conséquent, la formule (17) doit coïn-

cider avec la première partie de cette dernière formule; et si l'on fait $D = AE$, et qu'on divise par $x^{i+1}$, il faudra qu'on ait

$$\int_0^\pi \cos(ax\cos\omega)\sin^{2i+1}\omega d\omega = Ex^{-2i-1}(X\sin ax - X'\cos ax), \quad (19)$$

en déterminant convenablement la constante E.

Dans le cas de $x = 0$, le second membre de cette équation se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; par la règle ordinaire, on a

$$\int_0^\pi \sin^{2i+1}\omega d\omega = \frac{EF}{1.2.3\ldots 2i+1},$$

en désignant par F la valeur de

$$\frac{d^{2i+1}(X\sin ax - X'\cos ax)}{dx^{2i+1}},$$

qui répond à $x = 0$. En intégrant par partie, on a

$$\int_0^\pi \sin^{2i+1}\omega d\omega = 2i\int_0^\pi \sin^{2i-1}\omega\cos^2\omega d\omega;$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\pi \sin^{2i+1}\omega d\omega = \frac{2i}{2i+1}\int_0^\pi \sin^{2i-1}\omega d\omega,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^\pi \sin^{2i+1}\omega d\omega = \frac{2^i.1.2.3\ldots i}{1.3.5\ldots 2i+1}\int_0^\pi \sin\omega d\omega;$$

de là on conclut

$$2^{2i+1}(1.2.3\ldots.i)^2 = EF;$$

ce qui fera connaître la valeur de E d'après celle de F.

(83). Les problèmes relatifs aux petites vibrations des corps élastiques et des fluides, conduisent à des équations aux différences partielles linéaires, en même nombre que les inconnues qu'il s'agit de déterminer. Il en est de même à l'égard des équations relatives à la distribution de la chaleur dans l'intérieur des corps, lorsqu'on néglige, dans une première approximation, le carré de la température.

Chaque inconnue est une fonction du temps $t$ et des trois coordonnées $x$, $y$, $z$, du point M, auquel elle répond dans le système que l'on considère; et les équations de ces problèmes sont, en général, à quatre variables indépendantes. Si l'on excepte le terme indépendant des inconnues dans ces équations, c'est-à-dire, celui qu'on appelle le dernier terme dans les équations linéaires, et qu'on peut toujours faire disparaître, les coefficiens des autres termes ne renferment que les coordonnées $x$, $y$, $z$, et sont indépendans du temps $t$. Mais il y a entre les équations relatives aux petites vibrations et celles qui répondent à la distribution de la chaleur, une différence essentielle : les premières sont du second ordre par rapport au temps, et les dernières seulement du premier ordre. Il en résulte que les intégrales des premières équations doivent renfermer deux sortes de quantités relatives à l'état initial du système, savoir, les distances primitives de ses différens points à leurs positions d'équilibre, et leurs vitesses primitives; tandis que les intégrales complètes des équations relatives à la distribution de la chaleur ne doivent renfermer qu'une seule espèce de quantités arbitraires, qui sont les températures initiales des points du corps. En général, cette différence de forme entre ces deux sortes d'équations, en produit une très grande entre les lois de la communication de la chaleur et celles des petites vibrations; et, pour cette raison, il paraît au moins très difficile que les phénomènes qui peuvent résulter d'un rayonnement moléculaire soient également explicables en les attribuant aux oscillations d'un fluide stagnant. Néanmoins, les remarques suivantes sont communes aux problèmes de Mécanique et à ceux de Physique, qui dépendent des équations aux différences partielles.

(84). Appelons $u$ une inconnue qui doit être déterminée en fonction de $t$, $x$, $y$, $z$, par l'équation donnée $L = 0$, aux différences partielles, linéaire, délivrée de son dernier terme, qui ne contient pas le temps $t$ explicitement, et que nous supposerons, pour fixer les idées, du premier ordre par rapport à cette variable. En faisant $\theta = e^{-t}$ dans la série (2), et y mettant des constantes $\lambda^2$, $\mu^2$, $\nu^2$, etc., à la place de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., on aura

$$u = Pe^{-\lambda^2 t} + Qe^{-\mu^2 t} + Re^{-\nu^2 t} + \text{etc.} \qquad (20)$$

Si l'on substitue dans L cette série au lieu de $u$, il en résultera

$$L = (N\lambda^2 + O)e^{-\lambda^2 t} + (N'\mu^2 + O')e^{-\mu^2 t} + (N''\nu^2 + O'')e^{-\nu^2 t} + \text{etc.};$$

N et O étant des quantités qui ne contiendront que l'inconnue P, d'où se déduiront N' et O' en y mettant Q au lieu de P, puis N'' et O'' par la substitution de R à la place de Q, et ainsi de suite. Toutes les quantités contenues dans les coefficiens de cette série étant indépendantes de $t$, elle ne pourra être égale à zéro à moins que tous ces coefficiens ne soient séparément nuls; par conséquent, l'équation donnée $L = 0$ se décomposera en cette série d'équations

$$N\lambda^2 + O = 0, \quad N'\mu^2 + O' = 0, \quad N''\nu^2 + O'' = 0, \text{ etc.} \quad (21)$$

Les exposans $\lambda^2$, $\mu^2$, $\nu^2$, etc., resteront donc des constantes arbitraires; les coefficiens P, Q, R, etc., se détermineront indépendamment les uns des autres, au moyen de ces équations (21), qui sont toutes semblables; et tous les termes de la série (20), c'est-à-dire, de l'intégrale complète de l'équation $L = 0$, en série ordonnée suivant les puissances de $e^{-t}$, seront des intégrales particulières de cette même équation.

Les équations (21) seront linéaires, comme $L = 0$, par rapport à l'inconnue que chacune d'elles renfermera. Elles seront simplement des équations différentielles, si L ne contient qu'une seule des trois variables $x$, $y$, $z$; et alors la série (20) ne renfermera que des constantes arbitraires, savoir, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, etc., et les constantes qui seront introduites par l'intégration des équations (21). Quand elles seront aux différences partielles, on pourra souvent les traiter comme l'équation $L = 0$, et exprimer leurs intégrales complètes en séries d'intégrales particulières.

Ce dernier cas aura lieu, par exemple, quand $L = 0$ sera une équation à coefficiens constans. Si cette équation est de l'ordre quelconque $n$ par rapport à $t$, et contient un nombre quelconque d'autres variables indépendantes $x$, $y$, $z$, etc., on verra, comme dans le n° 76, que son intégrale complète pourra être représentée par

$$u = \Sigma A e^{\varpi t + \alpha x + \mathit{6} y + \text{etc.}} + \Sigma A' e^{\varpi' t + \alpha x + \mathit{6} y + \text{etc.}} + \text{etc.};$$

A, A', etc., $\alpha$, $\mathit{6}$, etc., désignant des constantes arbitraires;

$\varpi$, $\varpi'$, etc., les $n$ racines d'une équation algébrique dans laquelle entreront les constantes $\alpha$, $\beta$, etc.; et les sommes $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, de A, A', etc., $\alpha$, $\beta$, etc. En regardant A, A', etc., comme des fonctions arbitraires de $\alpha$, $\beta$, etc., et faisant croître $\alpha$, $\beta$, etc., par des degrés insensibles, on peut, si l'on veut, remplacer ces sommes par des intégrales dont les limites resteront indéterminées, et écrire, en conséquence,

$$u = \int\int \ldots f(\alpha, \beta, \text{etc.}) e^{\varpi t + \alpha x + \beta y + \text{etc.}} d\alpha d\beta \text{ etc.}$$
$$+ \int\int \ldots f'(\alpha, \beta, \text{etc.}) e^{\varpi' t + \alpha x + \beta y + \text{etc.}} d\alpha d\beta \text{ etc.}$$
$$+ \text{etc.};$$

mais cette autre expression de $u$ ne diffère pas réellement de la précédente. En effet, les fonctions $f$, $f'$, etc., étant arbitraires, et pouvant être discontinues, on peut partager les intégrales relatives à $\alpha$, $\beta$, etc., en des portions de grandeur finie, dont l'étendue soit cependant aussi resserrée qu'on voudra, de sorte que pour chaque portion d'intégrale, l'exponentielle comprise sous le signe $\int$ ne varie pas sensiblement; ce qui fera coïncider ces diverses portions de la dernière valeur de $u$ avec les termes des sommes $\Sigma$ contenues dans la précédente.

(85). Indépendamment des équations aux différences partielles qui conviennent à tous les points du système, il y a toujours, dans les divers problèmes de Physique et de Mécanique, d'autres équations qui n'ont lieu que pour les points extrêmes; par exemple, dans les questions relatives à la distribution de la chaleur, l'équation (2) du n° 67, relative à la surface du corps que l'on considère. Ces équations particulières serviront, dans chaque cas, à déterminer les valeurs d'une partie des quantités arbitraires que renfermera la série (20); les valeurs d'une autre partie se détermineront quelquefois par la condition que l'inconnue $u$ ne devienne infinie en aucun point du système, ainsi qu'on l'a vu précédemment (n° 81). Après ces diverses déterminations, les quantités arbitraires qui resteront encore dans l'expression de $u$, dépendront de l'état initial du système. Pour en obtenir les valeurs, j'ai suivi, dans un grand nombre de problèmes, de

natures très différentes, un procédé uniforme que je crois applicable à tous les cas, soit que la question ne présente qu'une seule inconnue, et ne conduise qu'à une seule équation $L = 0$, soit qu'on ait à déterminer plusieurs inconnues dépendantes d'un pareil nombre d'équations aux différences partielles, linéaires et simultanées. Je donnerai tout à l'heure une application de cette méthode générale à l'équation (7) du n° 49, combinée avec l'équation (2) du n° 67.

Cette même méthode a aussi l'avantage de servir, en même temps, à démontrer que dans les questions relatives à la distribution de la chaleur, les constantes $\lambda^2$, $\mu^2$, $\nu^2$, etc., contenues dans la série (21), sont toutes réelles et positives. Une d'elles, la première par exemple, peut être égale à zéro; et si cela est, la température $u$ s'approche indéfiniment d'une valeur invariable $u = P$. Chacun des termes de cette série, excepté le premier, décroît en progression géométrique; le temps croissant par des intervalles égaux. Si $\mu$ est la plus petite des constantes $\mu$, $\nu$, etc., le second terme décroît moins rapidement que tous les autres; en sorte qu'après un certain intervalle de temps, ceux-ci ont sensiblement disparu et la valeur de $u$ est réduite à

$$u = P + Qe^{-\mu^2 t}.$$

Il s'ensuit donc que quand un corps doit parvenir à un état permanent dans lequel les températures de tous ses points sont invariables, il y a un autre état qui précède celui-là, où ces températures varient suivant une progression géométrique, dont la raison est la même dans toute l'étendue de ce corps; le temps croissant toujours par des intervalles égaux. Telle est, en effet, la loi finale de la variation de température des corps qui s'échauffent ou se refroidissent, que l'on observe généralement.

Au contraire, dans les questions relatives aux petites oscillations, les exponentielles de la série (20) se changent en sinus et cosinus d'arcs proportionnels au temps, et la méthode générale que nous venons de citer sert encore à prouver que les coefficiens de cette variable sous les signes trigonométriques, sont aussi des quantités réelles. Ces démonstrations générales de la réalité des coefficiens du temps, soit dans les exponentielles, soit sous les sinus et cosinus, sont d'au-

tant plus importantes que ces coefficiens dépendent d'équations transcendantes, quelquefois très compliquées, et dont la forme, relative à chaque problème, ne permettrait pas toujours qu'on pût déterminer autrement la nature de leurs racines.

Après avoir déterminé toutes les quantités arbitraires que renferme la série (20), elle représentera, s'il s'agit d'un problème relatif à la distribution de la chaleur, la température à un instant quelconque et en un point quelconque du corps que l'on aura considéré. Chaque terme de cette série exprimera une valeur de la température à un instant quelconque qui répondrait à un état particulier du corps à l'époque d'où l'on compte le temps $t$. La somme de tous ses termes représentera cette même température correspondante à un état initial du corps donné arbitrairement; en sorte que la valeur de l'inconnue, dans le cas général, se trouvera décomposée en une somme de valeurs relatives à des cas particuliers; ce qui a lieu dans toutes les questions dépendantes d'un système d'équations linéaires, et tient à la forme de ces équations.

(86). Dans le problème de la distribution de la chaleur dans un corps de figure donnée, si l'on compte le temps $t$ à partir de l'état initial du corps, et que l'on représente, dans cet état, par $F(x, y, z)$ la température d'un point quelconque, il faudra que la série (20) coïncide avec cette fonction quand $t = 0$; il faudra donc qu'on ait

$$F(x, y, z) = P + Q + R + S + \text{etc.}; \qquad (22)$$

équation qui ne sera pas identique, et qui aura lieu seulement pour toutes les valeurs de $x, y, z$, relatives à des points du corps.

La fonction $F(x, y, z)$, tout-à-fait arbitraire, et qui peut être continue ou discontinue, se trouve donc ainsi développée en une série de quantités qui sont toutes de la même forme; et comme cette forme dépendra de la figure du corps et des conditions relatives à sa surface, il en résultera une infinité de développemens différens d'une même fonction, propres à en exprimer les valeurs dans une étendue déterminée par celle de chaque corps. Parmi ces développemens, il y en aura qui procéderont suivant les sinus ou cosinus des multiples des variables, d'autres suivant les sinus ou cosinus de ces variables multipliées par les racines d'une équation transcen-

dante, d'autres suivant des fonctions transcendantes d'un ordre plus élevé, qui ne pourront même s'exprimer, sous forme finie, que par des intégrales définies. Chaque développement devra être considéré comme une formule d'interpolation, applicable à une étendue limitée des valeurs de la fonction donnée $F(x, y, z)$; et quoiqu'on ne puisse pas toujours démontrer directement ces diverses formules, il ne pourra cependant rester aucun doute sur leur exactitude. En effet, la formule (20) représente certainement, d'après les considérations précédentes, la valeur la plus générale de $u$ qui puisse satisfaire à l'équation $L = 0$; par hypothèse, on a déterminé les quantités arbitraires que cette série renferme, au moyen des autres conditions du problème qui a conduit à l'équation $L = 0$, et d'après l'état initial du système : si ces conditions ne sont point incompatibles, et que le problème soit susceptible d'une solution, il faut donc qu'après cette détermination la série (20) exprime la valeur de $u$ à un instant quelconque et en un point quelconque du système; par conséquent, en faisant $t = 0$ dans cette série, elle devra représenter les valeurs initiales de $u$ dans l'étendue où elles auront concouru à la former; ou, autrement dit, l'équation (22) devra être regardée comme une conséquence rigoureuse de la solution complète du problème. On verra par la suite que cette équation se vérifie, effectivement, toutes les fois que l'on peut obtenir, *à priori*, la valeur de la série qui forme son second membre.

(87). La manière de résoudre, par des séries d'exponentielles réelles ou imaginaires, les questions qui dépendent des équations aux différences partielles, a d'abord été employée par D. Bernouilli, dans la solution du problème des cordes vibrantes, à laquelle il a été conduit par son principe de la coexistence des petites oscillations, dont ce mode de solution était, en effet, la conséquence. Cette même méthode a ensuite été employée par D. Bernouilli et par Euler pour déterminer les vibrations transversales des verges élastiques. Mais si les solutions de ces deux problèmes étaient suffisantes pour faire connaître et comparer entre eux les différens sons que les verges et les cordes peuvent faire entendre, elles étaient incomplètes sous le rapport de l'analyse; il y manquait la détermination des coefficiens des séries d'après l'état initial de la ligne vibrante; ce qui pouvait aussi laisser quelque

doute sur la généralité du résultat. Lagrange, en considérant sous le même point de vue la question des cordes vibrantes, a montré le premier comment on peut exprimer ces coefficiens par des intégrales définies, quel que soit l'état initial de la corde que l'on suppose donné arbitrairement, et comment cette solution du problème coïncide alors avec celle que l'on déduit de l'intégrale ordinaire, c'est-à-dire, de l'intégrale complète que D'Alembert avait précédemment donnée, et dans laquelle l'inconnue est exprimée, sous forme finie, au moyen de deux fonctions arbitraires. Le mouvement longitudinal d'une ligne d'air et le mouvement transversal d'une corde tendue, dépendant l'un et l'autre d'une même équation aux différences partielles, l'analyse de Lagrange s'appliquait également à ces deux questions; et c'est de cette manière qu'il a déterminé les différens sons des instrumens à vent, quel que soit l'ébranlement primitif de la colonne d'air, ainsi que les lois de la propagation et de la réflexion du son sur une ligne donnée (*); ce qui l'a conduit à trouver que la vitesse du son ne dépend ni de l'ébranlement primitif, ni du mode de vibrations des molécules d'air qui résulte de cet ébranlement, de sorte qu'elle est effectivement égale à celle que Newton avait déduite, long-temps auparavant, d'une hypothèse particulière sur les lois de ces vibrations. Dix ans avant que les premières recherches de Lagrange sur la théorie du son aient été publiées, Euler s'était aussi occupé de la propagation du mouvement dans une série de points matériels rangés en ligne droite (**). Son analyse présente une grande analogie avec celle de Lagrange; mais il s'est borné à considérer un nombre fini de points matériels; et, faute d'avoir appliqué ses formules au cas où ce nombre indéterminé devient infini, ce qu'il regardait comme une très grande difficulté, il n'a pas déterminé, comme Lagrange, la valeur numérique de la vitesse du son, et a seulement fait voir qu'elle devait être constante et proportionnelle à la racine carrée du rapport de l'élasticité à la densité.

Cette méthode, dont le caractère spécial est d'exprimer la valeur

---

(*) *Mémoires de Turin*, années 1759 et 1760.
(**) *Mémoires de Pétersbourg*, année 1750.

générale de l'inconnue par une somme de ses valeurs particulières, a aussi été employée par Laplace dans la théorie *du flux et du reflux*; et, comme on l'a dit dans le préambule de cet ouvrage, c'est la même analyse dont il avait fait usage anciennement dans cette théorie, qu'il a appliquée depuis au problème de la distribution de la chaleur dans une sphère primitivement échauffée d'une manière quelconque. Fourier s'est servi de la même méthode pour déterminer la distribution de la chaleur dans une armille, dans une sphère dont tous les points, également éloignés du centre, ont la même température, dans un cylindre à base circulaire, indéfiniment prolongé et dont tous les points, situés à la même distance de l'axe, ont une égale température, dans un prisme rectangulaire parvenu à un état permanent, et enfin dans un cube dont les six faces rayonnent également.

On est conduit naturellement à la méthode dont il s'agit, en considérant d'abord, dans chaque problème, un système composé d'un nombre fini et indéterminé de points matériels, et supposant ensuite que ce nombre devient infini. Dans le cas d'un nombre fini, la solution du problème dépend d'un pareil nombre d'équations différentielles simultanées; l'inconnue relative à un point quelconque s'exprime alors par un nombre de valeurs particulières dépendant du nombre et de l'ordre de ces équations. On détermine toutes les constantes arbitraires que ces valeurs renferment, d'après l'état initial de tous les points du système; et il ne reste plus qu'à supposer infini le nombre de ces points. L'expression générale de l'inconnue se modifie dans le passage du fini indéterminé à l'infini; mais il ne peut s'élever aucun doute sur l'exactitude et la généralité du résultat définitif auquel on parvient par ce procédé : on en trouve l'exposition complète et des applications diverses dans le chapitre de la *Mécanique analytique*, relatif aux petites oscillations d'un système de corps.

Mais si ce procédé a pu jeter un grand jour, à l'origine du calcul aux différences partielles, sur les solutions des problèmes qui dépendent de ce calcul, on ne peut pas nier qu'il ne donne lieu à de très longs calculs, et qu'il n'exige, le plus souvent, que l'on résolve un problème plus compliqué que celui qui est

proposé; car il est, en général, plus long et plus pénible de résoudre complètement une question relative à un nombre indéterminé de points matériels, que la même question dans laquelle on suppose immédiatement ce nombre infini. Dans l'état actuel de la science, ce sera donc l'équation aux différences partielles à laquelle on est conduit par un problème de Physique ou de Mécanique, que l'on devra considérer directement. Pour intégrer cette équation, et satisfaire aux autres conditions de chaque problème relatif à la distribution de la chaleur, je suivrai, dans cet ouvrage, la méthode dont je viens d'exposer les principes, et que j'ai appliquée à diverses questions de Mécanique, qu'il eût été au moins très difficile de résoudre sans y recourir. Je me suis aussi servi de cette méthode avec avantage dans une question relative à la surface dont l'aire est un *minimum*, c'est-à-dire dans un problème de Géométrie dépendant d'une équation aux différences partielles; et je l'ai également employée dans une autre question dépendante d'une équation aux différences mêlées; ce qui m'a conduit à la démonstration que je crois la plus directe, du théorème de Jean Bernouilli sur les développées successives des courbes planes (*).

(88). J'ajouterai encore quelques mots sur la méthode d'intégration dont nous parlons. Pour qu'on puisse l'employer avec confiance, il suffit d'avoir prouvé préalablement, comme nous l'avons fait, que l'inconnue $u$ du problème, qui est la température dans chaque question relative à la distribution de la chaleur, peut être exprimée, quelle qu'elle soit, par la série (20); l'équation (22) est alors une conséquence nécessaire de la solution complète du problème. Mais, réciproquement, si l'on a démontré *à priori* que la série (22) peut représenter dans toute l'étendue du corps que l'on considère, la fonction $F(x, y, z)$ donnée arbitrairement, la série (20) satisfera alors à l'état initial de ce corps et à toutes les conditions du problème; par conséquent, si l'on admet qu'il ne soit susceptible, par sa nature, que d'une seule solution, elle sera donnée dans toute sa généralité par la série (20). Ainsi, les solutions de Fourier, que je viens de citer,

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 18e cahier, page 431.

peuvent être regardées comme complètes dans les cas où il a été démontré que la valeur de l'inconnue qui répond à $t=0$ peut représenter une fonction quelconque; mais elles ne sont pas entièrement satisfaisantes, lorsque cette démonstration n'a pas eu lieu; et, par exemple, si on lit attentivement la solution relative à la sphère, on verra sans peine que rien ne prouve, dans cette solution, que la série d'une forme particulière qui exprime la valeur de l'inconnue correspondante à $t=0$, puisse exprimer une fonction arbitraire de la distance au centre.

Non-seulement l'intégration en série de valeurs particulières de l'inconnue est indispensable lorsque l'équation du problème n'est point intégrable sous forme finie, mais même dans le petit nombre de cas où cette forme est possible, et où les quantités contenues sous les fonctions arbitraires ne sont pas réelles pour toutes les valeurs des variables. Si, par exemple, l'équation d'un problème est

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{d^2u}{dx^2}=0,$$

son intégrale complète sera

$$u=f(x+t\sqrt{-1})+F(x-t\sqrt{-1});$$

$f$ et F désignant deux fonctions arbitraires, dont on déterminera les valeurs d'après celles de $u$ et $\frac{du}{dt}$ qui répondent à $t=0$. Les fonctions $fx$ et $Fx$ seront alors des quantités réelles pour toutes les valeurs de $x$ qui répondent à des points du système. Si elles sont continues et qu'on en ait l'expression analytique, les imaginaires disparaîtront de la formule précédente; mais si elles sont discontinues, ce qui a lieu dans la plupart des problèmes, on n'en pourra pas conclure les valeurs de $f(x+t\sqrt{-1})$ et $F(x+t\sqrt{-1})$, et la solution précédente deviendra illusoire. Au contraire, l'intégrale en série d'exponentielles, savoir,

$$u=\Sigma(A\cos ax+B\sin ax)e^{a^2t},$$

dans laquelle la somme $\Sigma$ s'étend à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, des constantes $a$, A, B; cette intégrale, disons-nous,

est toujours applicable, sans que les valeurs de $u$ et $\frac{du}{dt}$ qui répondent à $t=0$, soient assujetties à la loi de continuité.

Une *fonction discontinue* est, comme on sait, une fonction dont la forme ou l'expression analytique change dans l'étendue des valeurs de la variable, de sorte que si l'on prend cette variable et cette fonction pour l'abscisse et l'ordonnée courantes d'une courbe, cette ligne brisée sera un assemblage de portions de droites qui ne sont pas dans une même direction, ou de portions de courbes de natures différentes. Dans la suite de cet ouvrage, les fonctions arbitraires que nous considérerons, pourront être des fonctions discontinues; mais aux points où elles changeront de forme, il faudra toujours qu'elles n'aient qu'une seule valeur : la ligne brisée qui représente une telle fonction aura une seule ordonnée en chacun des points de jonction de deux parties contiguës; elle pourra avoir deux tangentes différentes et deux rayons de courbure différens, appartenant à ces deux parties.

(89). Appliquons maintenant, comme nous l'avons dit plus haut, les considérations générales qu'on vient d'exposer, aux équations (7) et (2) des n^os 49 et 67, c'est-à-dire à l'équation

$$c\frac{du}{dt}=\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}+\frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy}+\frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}, \qquad (23)$$

commune à tous les points du corps A que l'on considère, et à l'équation

$$k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\mathcal{C}+\frac{du}{dz}\cos\gamma\right)+pu=0, \qquad (24)$$

qui n'appartient qu'aux points de sa surface. On suppose nulle la température extérieure $\zeta$; on verra par la suite comment on la ferait disparaître de l'équation relative à la surface, si elle n'était pas zéro. Pour que ces équations soient toutes deux linéaires par rapport à la température $u$, nous regarderons comme indépendantes de cette inconnue, la chaleur spécifique $c$, la conductibilité $k$ et le coefficient $p$; en sorte que $c$, $k$, $p$, seront des quantités constantes, ou plus généralement, des fonctions données de $x$, $y$, $z$.

En substituant la série (20) à la place de $u$ dans ces deux équations, on voit que le coefficient P d'un terme quelconque devra satisfaire à l'équation

$$\lambda^2 Pc + \frac{d.k\frac{dP}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{dP}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{dP}{dz}}{dz} = 0, \qquad (25)$$

pour toutes les valeurs de $x, y, z$, et à l'équation

$$k\left(\frac{dP}{dx}\cos\alpha + \frac{dP}{dy}\cos6 + \frac{dP}{dz}\cos\gamma\right) + pP = 0, \qquad (26)$$

pour toutes les valeurs de ces coordonnées qui répondent aux points de la surface de A.

Cela posé, je multiplie les deux membres de l'équation (23) par $Pdxdydz$, puis je les intègre, et j'étends les intégrales à tous les points de A; il en résulte

$$\frac{dv}{dt} = \iiint P\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}dxdydz + \iiint P\frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy}dxdydz + \iiint P\frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}dxdydz,$$

en faisant, pour abréger,

$$\iiint P\,cudxdydz = v,$$

et observant que les quantités P et $c$ étant indépendantes de $t$, on a

$$\iiint Pc\frac{du}{dt}dxdydz = \frac{dv}{dt}.$$

Pour fixer les idées, je suppose l'axe des $x$ vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, et le corps A situé au-dessous du plan horizontal des $y$ et $z$. Je conçois un cylindre vertical tangent à la surface de A; la ligne de contact divisera cette surface en deux parties, l'une inférieure que j'appellerai $S_{,}$, l'autre supérieure que je désignerai par $S'$. En intégrant deux fois de suite par rapport à $x$, on aura alors

$$\int P \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}dx = \left(Pk\frac{du}{dx}\right) - \left[Pk\frac{du}{dx}\right] - \int k\frac{dP}{dx}\frac{du}{dx}dx,$$

$$\int k\frac{dP}{dx}\frac{du}{dx}dx = \left(uk\frac{dP}{dx}\right) - \left[uk\frac{dP}{dx}\right] - \int u\frac{d.k\frac{dP}{dx}}{dx}dx;$$

les quantités comprises entre des parenthèses appartenant aux points de $S_{,}$, et celles qui sont renfermées entre des crochets, aux points de $S'$. De plus, on aura, comme dans le n° 61,

$$dydz = \pm \cos \alpha ds;$$

$ds$ étant l'élément différentiel de la surface de A, et en prenant le signe + pour tous les points de $S_{,}$ et le signe — pour tous ceux de $S'$. Comme dans ce même numéro, chaque couple d'intégrales doubles relatives à $S'$ et à $S_{,}$ se réduira à une seule intégrale qui devra s'étendre à tous les élémens $ds$ de la surface de A; et de cette manière on aura

$$\iiint P\frac{d.k\frac{dP}{dx}}{dx}dxdydz = \int Pk\frac{du}{dx}\cos\alpha ds - \int uk\frac{dP}{dx}\cos\alpha ds + \iiint u\frac{d.k\frac{dP}{dx}}{dx}dxdydz.$$

On trouvera de même

$$\iiint P\frac{d.k\frac{dP}{dy}}{dy}dxdydz = \int Pk\frac{du}{dy}\cos 6 ds - \int uk\frac{dP}{dy}\cos 6 ds + \iiint u\frac{d.k\frac{dP}{dy}}{dy}dxdydz,$$

$$\iiint P\frac{d.k\frac{dP}{dz}}{dz}dxdydz = \int Pk\frac{du}{dz}\cos\gamma ds - \int uk\frac{dP}{dz}\cos\gamma ds + \iiint u\frac{d.k\frac{dP}{dz}}{dz}dxdydz;$$

et la quantité $\frac{du}{dt}$ devant être égale à la somme des premiers membres

de ces trois équations, il en résultera

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = &\int \mathrm{P}k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right)ds \\ &- \int uk\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\cos\alpha + \frac{d\mathrm{P}}{dy}\cos\beta + \frac{d\mathrm{P}}{dz}\cos\gamma\right)ds \\ &+ \iiint\left(\frac{d.k\frac{d\mathrm{P}}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{d\mathrm{P}}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{d\mathrm{P}}{dz}}{dz}\right)udxdydz. \end{aligned} \quad (27)$$

Or, en vertu des équations (24), (25), (26), cette dernière valeur de $\frac{dv}{dt}$ se réduit à

$$\frac{dv}{dt} = -\int \mathrm{P}puds + \int up\mathrm{P}ds - \iiint \lambda^2 \mathrm{P}cudxdydz;$$

et puisque les deux intégrales relatives à $ds$ s'étendent l'une et l'autre à la surface entière de A, et que $\lambda^2$ est une quantité constante, cette dernière équation sera simplement

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda^2 v.$$

En intégrant, on aura donc

$$v = \mathrm{C}e^{-\lambda^2 t};$$

C étant la constante arbitraire. Pour la déterminer, je suppose, comme plus haut, qu'on ait

$$u = \mathrm{F}(x, y, z),$$

quand $t = 0$; d'où l'on conclut

$$\mathrm{C} = \iiint \mathrm{P}c\mathrm{F}(x, y, z)\, dxdydz.$$

En remettant pour $v$ l'intégrale triple que cette lettre représente, on aura donc, à un instant quelconque,

$$\iiint \mathrm{P}cudxdydz = e^{-\lambda^2 t} \iiint \mathrm{P}c\mathrm{F}(x, y, z)\, dxdydz. \quad (28)$$

Nous verrons tout à l'heure l'usage que l'on peut faire de cette équation remarquable. Observons auparavant que si nous faisons

$P = 1$ dans l'équation (27), qui a lieu pour une quantité P quelconque que l'on n'a point encore assujettie aux équations (25) et (26), nous aurons

$$\frac{d.}{dt}\iiint cudxdydz = \int k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\mathcal{E} + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right)ds.$$

Or, en ne supposant pas zéro la température extérieure $\zeta$, on a, à cause de l'équation relative à la surface (n° 67),

$$k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\mathcal{E} + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right) = -p(u-\zeta);$$

si donc on différentie par rapport à $t$, dans le premier membre de l'équation précédente, avant d'intégrer par rapport à $x$, $y$, $z$, ce qui est permis, et que l'on multiplie par $dt$, il en résultera

$$\iiint \frac{d.cu}{dt}dtdxdydz = \int p(\zeta - u)\,dtds;$$

équation évidente, puisque son premier membre est la somme des augmentations de chaleur de tous les points de A pendant l'instant $dt$, et que le second exprime la somme des quantités de chaleur qui viennent du dehors et traversent tous les élémens de sa surface pendant cet instant, moins la somme des quantités de chaleur émises au dehors à travers tous ces élémens et pendant ce même instant. Cette équation est celle qu'il a suffi d'employer dans le chapitre III, pour déterminer les lois du refroidissement des corps qui ont la même température dans toute leur étendue. Il était bon de montrer comment elle se déduit des équations générales du mouvement de la chaleur.

(90). Actuellement substituons, dans le premier membre de l'équation (28), la série (20) à la place de $u$. Il en résultera une série ordonnée par rapport aux exponentielles relatives à $t$; et pour que cette série soit identique avec le second membre de cette équation, il faudra qu'elle se réduise au terme correspondant à l'exponentielle $e^{-\lambda'^{2}t}$. Les coefficiens de tous les autres termes devront donc être égaux à zéro, et celui de cette exponentielle devra être égal au coefficient de $e^{-\lambda'^{2}t}$ dans ce second membre; par conséquent, si $\lambda_{,}^{2}$ est une cons-

tante différente de $\lambda^2$, et que $P_{,}$ soit le coefficient de $e^{-\lambda_{,}^2 t}$ dans la série (20), il faudra qu'on ait généralement

$$\iiint PP_{,} c dx dy dz = 0; \qquad (29)$$

mais dans le cas de $\lambda_{,}^2 = \lambda^2$, on aura, en particulier,

$$\iiint P^2 c dx dy dz = \iiint P c F(x, y, z) dx dy dz; \qquad (30)$$

les intégrales s'étendant toujours au volume entier du corps A.

Cette équation (30) est celle dont on fera usage dans chaque cas, pour déterminer, d'après l'état initial de A, les constantes arbitraires qui resteront encore dans les coefficiens de la série (20), après qu'elle aura été astreinte à satisfaire à toutes les autres conditions du problème. L'équation (29) va servir à démontrer que les constantes $\lambda$, $\mu$, $\nu$, etc., contenues dans les exponentielles suivant lesquelles cette même série (20) est ordonnée, sont toujours des quantités réelles.

En effet, dans chaque problème, ces constantes seront les racines d'une équation transcendante que je désignerai par $\Delta = 0$, et dans laquelle $\Delta$ ne renfermera explicitement aucune quantité imaginaire. Supposons qu'une des racines de cette équation puisse être imaginaire; prenons-la pour la constante $\lambda$, et soit

$$\lambda = g + g'\sqrt{-1};$$

$g$ et $g'$ étant des quantités réelles. Cette équation $\Delta = 0$ admettra une seconde racine imaginaire qui ne différera de la première que par le signe de $\sqrt{-1}$; je la prends pour $\lambda_{,}$, de sorte qu'on ait

$$\lambda_{,} = g - g'\sqrt{-1}.$$

Les coefficiens P et $P_{,}$ qui répondent à ces deux racines, se déduiront aussi l'un de l'autre par le changement du signe de $\sqrt{-1}$; en sorte que si l'on fait

$$P = G + G'\sqrt{-1},$$

on aura, en même temps,

$$P_{,} = G - G'\sqrt{-1};$$

G et G′ étant des quantités réelles. En substituant ces valeurs de P et $P_{,}$ dans l'équation (29), il en résultera

$$\int\int\int (G^2 + G'^2)\, c\, dx dy dz = 0.$$

Or, la chaleur spécifique $c$, et par suite tous les élémens de cette intégrale étant des quantités positives, leur somme ne peut être nulle, à moins que chaque élément ne soit zéro isolément; on aura donc

$$G^2 + G'^2 = 0;$$

équation qui se partage nécessairement en deux autres, savoir :

$$G = 0, \quad G' = 0.$$

Par conséquent, l'équation $\Delta = 0$ n'a pas de racines imaginaires, ou, ce qui revient au même, si elle en a, elles n'entreront pas dans la série (20), et les constantes $\lambda$, $\mu$, $\nu$, etc., contenues dans cette série, seront toutes réelles; ce qu'il s'agissait de démontrer. Dans quelques cas, la réalité des racines de l'équation $\Delta = 0$ peut se déduire de sa forme particulière; mais le plus souvent cela serait impossible.

(91). Si le corps A est formé, comme dans le n° 70, de deux parties juxtaposées B et B′, et que les notations précédentes se rapportent à la partie B, l'intégrale triple que renfermera le second membre de l'équation (27), aura toujours $-\int\int\int \lambda^2 P c u dx dy dz$ pour valeur; chacune des intégrales doubles contenues dans ce second membre se composera de deux parties, l'une relative à la surface extérieure de B, l'autre correspondante à sa surface contiguë à B′; les premières parties des deux intégrales doubles se détruiront comme précédemment, et l'équation (27) deviendra

$$\frac{d.}{dt}\int\int\int P c u dx dy dz = \int k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos 6 + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right) ds \\ - \lambda^2 \int\int\int P c u dx dy dz;$$

l'intégrale relative à $ds$ s'étendant à tous les élémens de la surface commune à B et B′, et les intégrales triples à tous les points de B.

Relativement à B′, je désignerai, comme dans le n° cité, par

$k'$, $c'$, $u'$, ce que deviennent les quantités $k$, $c$, $u$; je représenterai aussi par

$$u' = P'e^{-\lambda^2 t} + Q'e^{-\mu^2 t} + R'e^{-\nu^2 t} + \text{etc.},$$

la valeur de $u'$ en série d'exponentielles; $P'$, $Q'$, $R'$, etc., étant des coefficiens indépendans de $t$, et $\lambda$, $\mu$, $\nu$, etc., désignant, comme dans la série (20), toutes les constantes possibles. Par rapport à cette partie $B'$ de $A$, on aura de même

$$\frac{d.}{dt}\iiint P'c'u'dxdydz = -\int k'\left(\frac{du'}{dx}\cos\alpha + \frac{du'}{dy}\cos\beta + \frac{du'}{dz}\cos\gamma\right)ds$$
$$- \lambda^2 \iiint P'c'u'dxdydz;$$

l'intégrale relative à $ds$ s'étendant à tous les élémens de la portion de surface de $B'$ contiguë à $B$, et les intégrales triples, à tous les points de $B'$. Dans cette équation et dans celle qui répond à $B$, les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, contenus sous les intégrales relatives à $ds$, se rapportent à la même partie de la normale à cet élément, c'est-à-dire à la partie comprise dans l'intérieur de $B'$; et c'est pour cela que ces intégrales ont des signes contraires dans les deux équations.

En vertu des équations (3) du n° 70, on a

$$k\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right) = q(u' - u);$$
$$k'\left(\frac{du'}{dx}\cos\alpha + \frac{du'}{dy}\cos\beta + \frac{du'}{dz}\cos\gamma\right) = q(u' - u);$$

Si donc on ajoute les deux équations qu'on vient de former, on aura

$$\frac{d.}{dt}\iiint Pcudxdydz + \frac{d.}{dt}\iiint P'c'u'dxdydz = \int q(u' - u)\,ds$$
$$- \int q(u' - u)\,ds - \lambda^2 \iiint Pcudxdydz - \lambda^2 \iiint P'c'u'dxdydz;$$

et comme les deux intégrales relatives à $ds$ ont les mêmes limites et se détruisent, cette équation se réduit à

$$\frac{d.}{dt}\left(\iiint Pcudxdydz + \iiint P'c'u'dxdydz\right) =$$
$$- \lambda^2\left(\iiint Pcudxdydz + \iiint P'c'u'dxdydz\right);$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\int\int\int \text{P}cudxdydz + \int\int\int \text{P}'c'u'dxdydz = \text{C}e^{-\lambda^2 t}; \qquad (31)$$

C étant une constante arbitraire. On la déterminera en supposant qu'on ait

$$u = \text{F}(x, y, z), \quad u' = \text{F}'(x, y, z),$$

quand $t = 0$; F et F′ désignant des fonctions données arbitrairement dans toute l'étendue de B et B′. Il en résultera

$$\text{C} = \int\int\int \text{P}c\text{F}(x, y, z)dxdydz + \int\int\int \text{P}'c'\text{F}'(x, y, z)\,dxdydz.$$

Par la substitution de cette valeur de C et des valeurs de $u$ et $u'$ en série d'exponentielles, dans l'équation (31), on en déduira deux autres : l'une

$$\int\int\int \text{P}^2cdxdydz + \int\int\int \text{P}'^2c'dxdydz$$
$$= \int\int\int \text{P}c\text{F}(x, y, z)\,dxdydz + \int\int\int \text{P}'c'\text{F}'(x, y, z)\,dxdydz,$$

qui servira à déterminer, d'après l'état initial de B et B′, une partie des constantes arbitraires que renferment les coefficiens de ces séries; l'autre

$$\int\int\int \text{PP}_{,}cdxdydz + \int\int\int \text{P}'\text{P}_{,}'c'dxdydz = 0,$$

dans laquelle $\text{P}_{,}$ et $\text{P}_{,}'$ sont ce que deviennent les coefficiens P et P, relativement à l'exponentielle $e^{-\lambda_{,}^2 t}$, distincte de $e^{-\lambda^2 t}$ à laquelle P et P′ se rapportent. Cette dernière équation servira, comme dans le numéro précédent, à démontrer la réalité de toutes les constantes $\lambda$, $\mu$, $\nu$, etc.

En prenant, comme dans le nº 89, l'unité pour P, et supposant que $\zeta$ soit la température extérieure, on aura aussi

$$\int\int\int \frac{d.cu}{dt}\,dtdxdydz = \int p(\zeta - u)dtds - \int q(u - u')dtds;$$

la première intégrale relative à $ds$ s'étendant à tous les élémens de la surface extérieure de B, la seconde à tous les élémens de sa surface contiguë à B′, et l'intégrale triple à son volume entier. Il en résulte que l'augmentation de chaleur de B, pendant l'instant $dt$, est égale

à l'excès de la chaleur extérieure sur la chaleur intérieure qui traverse pendant cet instant la portion extérieure de la surface de B, moins l'excès de la chaleur qui passe de B en B' sur celle qui va de B' en B pendant ce même instant $dt$, à travers la portion de surface commune à B et B'. Relativement à B', on aura de même

$$\iiint \frac{d.c'u'}{dt} dtdxdydz = \int p'(\zeta - u')dtds - \int q(u' - u)dtds;$$

et en ajoutant ces deux équations, il vient

$$\iiint \frac{d.cu}{dt} dtdxdydz + \iiint \frac{d.c'u'}{dt} dtdxdydz$$
$$= \int p(\zeta - u)dtds + \int p'(\zeta - u')dtds,$$

équation évidente en elle-même, comme l'équation semblable que l'on a trouvée dans le n° 89.

Si le corps A était formé de trois ou d'un plus grand nombre de parties différentes, on obtiendrait sans difficulté des équations semblables aux précédentes, qui sont communes à tous les corps de forme et de nature quelconques, et dont on fera le même usage dans tous les problèmes.

---

# CHAPITRE VII.

*Digression sur la manière d'exprimer les fonctions arbitraires par des séries de quantités périodiques.*

(92). D'après la forme d'une fonction donnée X, si l'on voit qu'elle peut se développer en une série de sinus des multiples de la variable $x$, on fera

$$X = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \ldots + A_n \sin nx + \text{etc}; \quad (1)$$

$A_1$, $A_2$, $A_3$, etc., étant des coefficiens indépendans de $x$. En différentiant cette équation par rapport à $x$, une ou plusieurs fois, et combinant entre elles les équations qui en résulteront, on parviendra quelquefois à éliminer la fonction X; on obtiendra de cette manière une équation dont les deux membres seront ordonnés suivant les sinus ou les cosinus des multiples de $x$; et en égalant de part et d'autre les coefficiens des termes semblables, on formera une série d'équations qui serviront à déterminer successivement tous les coefficiens $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc., à l'exception de la première ou de plusieurs des premières de ces inconnues qui resteront indéterminées, et dont il faudra trouver les valeurs par le développement direct de X. Mais on pourra aussi exprimer immédiatement le coefficient général $A_n$ en fonction de l'indice $n$ et au moyen d'une intégrale définie.

Pour cela, j'observe que l'on a

$$\int_0^\pi \sin nx \sin n'x \, dx = 0,$$

tant que les nombres entiers $n$ et $n'$ sont inégaux, et

$$\int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

dans le cas de $n' = n$. C'est, en effet, ce qu'il est facile de vérifier. Cela étant, je multiplie les deux membres de l'équation (1) par $\sin nx dx$, puis je les intégre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; tous les termes du second membre disparaissent, excepté celui qui répond au coefficient $A_n$; et l'on en conclut

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi X \sin nx dx.$$

De même, si l'on sait, d'après la forme de cette fonction donnée X, qu'elle est développable en une série de cosinus des multiples de $x$, on fera

$$X = B_0 + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \ldots + B_n \cos nx + \text{etc.}; \quad (2)$$

$B_0$, $B_1$, $B_2$, etc., étant des coefficiens indépendans de $x$, que l'on pourra quelquefois déterminer par l'élimination de la fonction X, ainsi qu'il a été dit plus haut. Mais $n$ et $n'$ étant des nombres entiers différens, on a aussi

$$\int_0^\pi \cos nx \cos n'x \, dx = 0;$$

dans le cas de $n' = n$, on a

$$\int_0^\pi \cos^2 nx \, dx = \tfrac{1}{2}\pi,$$

excepté si $n = 0$, auquel cas la valeur de cette dernière intégrale est double et égale à $\pi$; de là on conclut

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi X \cos nx dx, \qquad B_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi X dx.$$

En employant $x'$ et $X'$ au lieu de $x$ et X, dans les valeurs de $A_n$, $B_n$, $B_0$, les séries (1) et (2) pourront s'écrire sous cette forme

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2}{\pi}\Sigma\left(\int_0^\pi X' \sin nx' dx'\right)\sin nx, \\ X &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi X' dx' + \frac{2}{\pi}\Sigma\left(\int_0^\pi X' \cos nx' dx'\right)\cos nx; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

les sommes $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs du nombre $n$, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$.

Ces séries (1) et (2) ont l'avantage d'être toujours convergentes. En effet, en intégrant deux fois de suite par partie, on a

$$\int X \sin nx dx = -\frac{1}{n} X \cos nx + \frac{1}{n^2}\frac{dX}{dx}\sin nx - \frac{1}{n^2}\int \frac{d^2X}{dx^2}\sin nx dx;$$

$$\int X \cos nx dx = \frac{1}{n} X \sin nx + \frac{1}{n^2}\frac{dX}{dx}\cos nx - \frac{1}{n^2}\int \frac{d^2X}{dx^2}\cos nx dx.$$

Or, l'équation (1) suppose que $X$ est zéro aux deux limites $x=0$ et $x=\pi$; en différentiant l'équation (2), on voit qu'elle suppose que $\frac{dX}{dx}$ s'évanouit pour ces mêmes valeurs de $x$: à ces deux limites les termes compris hors du signe $\int$ seront donc nuls, et l'on aura simplement

$$\int_0^\pi X \sin nx dx = -\frac{1}{n^2}\int_0^\pi \frac{d^2X}{dx^2}\sin nx dx$$

$$\int_0^\pi X \cos nx dx = -\frac{1}{n^2}\int_0^\pi \frac{d^2X}{dx^2}\cos nx dx.$$

Mais si l'on appelle H la plus grande valeur de $\frac{d^2X}{dx^2}$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, y compris ces limites, on aura évidemment

$$\int_0^\pi \frac{d^2X}{dx^2}\sin nx dx < \pi H,$$

$$\int_0^\pi \frac{d^2X}{dx^2}\cos nx dx < \pi H,$$

abstraction faite du signe. D'après les expressions de $A_n$ et $B_n$, on aura donc aussi, en grandeur absolue,

$$A_n < \frac{2}{n^2}H, \quad B_n < \frac{2}{n^2}H;$$

en sorte que les coefficiens des termes successifs des séries (1) et (2) décroîtront plus rapidement que $\frac{1}{n^2}$; ce qui suffit pour que ces séries soient convergentes; car on sait que la série

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \text{etc.},$$

converge continuellement vers une valeur finie et égale à $\frac{1}{6}\pi^2$; donc toute série dont les termes décroissent plus rapidement que suivant la raison inverse des carrés des nombres naturels, converge aussi, à plus forte raison, vers une valeur finie. Par le procédé de l'intégration par partie, on peut aussi montrer que la première équation (3) résulte de la seconde; en différentiant celle-ci par rapport à $x$, on a d'abord

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{2n}{\pi}\,\Sigma\left(\int_0^\pi X' \cos nx'dx'\right)\sin nx;$$

en intégrant par partie, on a aussi

$$n\int_0^\pi X' \cos nx'dx' = -\int_0^\pi \frac{dX'}{dx'}\sin nx'dx';$$

au moyen de quoi, et en mettant X et X' au lieu de $\frac{dX}{dx}$ et $\frac{dX'}{dx'}$, l'équation précédente se change dans la première équation (3).

Maintenant, si $fx$ est une fonction arbitraire, elle pourra encore être exprimée, comme on le verra tout à l'heure, par les formules (3) dans lesquelles on mettra $fx'$ au lieu de X', et par beaucoup d'autres formules de la même nature, mais seulement dans une étendue limitée des valeurs de $x$; tandis que les équations (3) ont lieu pour toutes les valeurs de $x$, relativement à certaines fonctions X. De plus, il est important d'observer que ces diverses expressions de $fx$ dépendent d'une analyse différente de celle qui nous a conduits aux équations (3); car la détermination des coefficiens des séries (1) et (2) indépendamment les uns des autres, suppose essentiellement que l'on sache, d'après la forme des fonctions X, qu'elles sont développables suivant les sinus ou les cosinus des multiples de $x$; en sorte que le procédé de l'intégration ne soit plus qu'un moyen abrégé pour trouver directement un coefficient quelconque. D'Alembert a employé le premier ce procédé pour déterminer les coefficiens du développement d'une fonction donnée; et c'est Lagrange qui a donné le

premier une formule propre à exprimer, dans une étendue limitée, une fonction arbitraire par une série de quantités périodiques; deux choses distinctes l'une de l'autre, comme nous venons de le dire, et dont la seconde va nous occuper exclusivement.

(93). En désignant par $e$ la base des logarithmes népériens, par $\alpha$ et $p$ un angle et une quantité quelconques, on a

$$\frac{1}{1-pe^{\alpha\sqrt{-1}}}+\frac{1}{1-pe^{-\alpha\sqrt{-1}}}=\frac{2(1-p\cos\alpha)}{1-2p\cos\alpha+p^2},$$

comme on le voit en réduisant au même dénominateur, et ayant égard à l'expression de $\cos\alpha$ en exponentielles imaginaires. Si $p$ est moindre que l'unité, abstraction faite du signe, on a aussi, en série convergente,

$$\frac{1}{1-p}=1+p+p^2+p^3+\text{etc.}$$

En mettant successivement $pe^{\alpha\sqrt{-1}}$ et $pe^{-\alpha\sqrt{-1}}$ à la place de $p$, et faisant la somme des résultats, on aura donc, d'après l'équation précédente,

$$\frac{1-p\cos\alpha}{1-2p\cos\alpha+p^2}=1+p\cos\alpha+p^2\cos 2\alpha+p^3\cos 3\alpha+\text{etc.},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1-p^2}{1-2p\cos\alpha+p^2}=1+2p\cos\alpha+2p^2\cos 2\alpha+2p^3\cos 3\alpha+\text{etc.}$$

L'angle $\alpha$ étant réel, il sera nécessaire et il suffira pour que cette série soit convergente, et que l'on puisse en faire usage, que l'on ait $p<1$, abstraction faite du signe, ainsi qu'on l'a supposé.

Cela posé, soit $fx$ la fonction arbitraire que l'on veut exprimer par une série de quantités périodiques, dans l'étendue des valeurs de $x$, comprises depuis $x=-l$ jusqu'à $x=l$, en désignant par $l$ une quantité positive et donnée. Je mets $\frac{\pi(x-x')}{l}$ à la place de $\alpha$ dans l'équation précédente; je multiplie ses deux membres par $\frac{dx'}{2l}fx'$, et j'intègre depuis $x'=-l$ jusqu'à $x'=l$; il en résulte

$$\int_{-l}^{l} \frac{(1-p^2) fx' dx'}{2l\left[1 - 2p\cos\frac{\pi(x-x')}{l} + p^2\right]} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} fx' dx'$$
$$+ \frac{1}{l}\Sigma p^n \left[\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi(x-x')}{l} fx' dx'\right]; \quad (4)$$

$n$ étant un nombre entier et positif, et la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs de $n$, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$. Or, si l'on désigne par $g$ une quantité positive et infiniment petite, on pourra prendre $p=1-g$; et alors $fx$ sera la valeur de l'intégrale indiquée dans le premier membre, comme on va le prouver tout à l'heure. De plus, pour toutes les valeurs finies de $n$, on aura

$$p^n = (1-g)^n = 1;$$

pour des valeurs infinies de l'exposant $n$, la quantité $p^n$ pourra différer de l'unité; mais en intégrant par partie, comme dans le n° précédent, on verra que l'intégrale qui multiplie $p^n$ sous le signe $\Sigma$, s'évanouit quand $n=\infty$; en sorte que l'on pourra remplacer $p^n$ par l'unité, dans tous les termes de cette somme $\Sigma$. Par conséquent, nous aurons

$$fx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} fx' dx' + \frac{1}{l}\Sigma\left[\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi(x-x')}{l} fx' dx'\right], \quad (5)$$

pour l'expression demandée de $fx$.

Pour faire voir que dans le cas de $p=1-g$, l'intégrale qui forme le premier membre de l'équation (4) est égale à $fx$, tant que la quantité $x$ est comprise entre $-l$ et $+l$, j'observe que le coefficient de $dx'$ sous le signe $\int$ deviendra infiniment petit en même temps que $g$, excepté pour les valeurs de $x'$ qui rendent son dénominateur infiniment petit, c'est-à-dire pour les valeurs de $x'$ qui rendent $\cos\frac{\pi(x-x')}{l}$ infiniment peu différent de l'unité; mais la variable $x'$ étant comprise aussi bien que $x$ entre $-l$ et $+l$, ces valeurs de $x'$ se réduisent à celles qui diffèrent infiniment peu de $x$, en plus ou en moins; si donc on fait $x'=x+z$, il faudra considérer cette nouvelle variable $z$ comme infiniment petite, ainsi que la constante $g$; ce qui réduira le dénominateur du coefficient de $dx'$ à $g^2+\frac{\pi^2 z^2}{l^2}$, et l'intégrale en ques-

tion à

$$fx\int\frac{gldz}{g^2l^2+\pi^2z^2}.$$

Or, cette intégrale relative à $z$ étant infiniment petite à cause de $g$, pour toute valeur de $z$ qui ne l'est pas, il s'ensuit qu'on peut, sans crainte d'erreur, l'étendre maintenant depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$; ce qui donnera l'unité pour sa valeur, et $fx$ pour la valeur qu'il s'agissait d'obtenir.

(94). D'après cette démonstration de l'équation (5), elle subsistera pour toutes les valeurs de $x>-l$ et $<l$; mais elle n'aura lieu pour les valeurs extrêmes $x=\pm l$, que quand on aura $f(-l)=fl$; et, en général, son second membre sera égal à $\frac{1}{2}[fl+f(-l)]$ quand on y fera $x=\pm l$.

En effet, si nous faisons $x=l$ dans le premier membre de l'équation (4), la quantité $\cos\frac{\pi(l-x')}{l}$ sera infiniment peu différente de l'unité, pour $x'=l-z$ et pour $x'=-l+z$; la variable $z$ étant infiniment petite et positive, afin que $x'$ ne sorte pas des limites $\pm l$ de l'intégration; d'où l'on conclut que dans le cas de $p=1-g$, ce premier membre se composera de deux parties qui répondront à ces valeurs de $x'$, et dont la somme sera

$$[fl+f(-l)]\int\frac{gldz}{g^2l^2+\pi^2z^2}.$$

On pourra étendre cette intégrale depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$; elle sera alors égale à $\frac{1}{2}$; et comme on serait parvenu au même résultat, si l'on eût fait $x=-l$, au lieu de $x=l$, il s'ensuit qu'à la limite $p=1$, et pour les valeurs particulières $x=\pm l$, l'équation (4) deviendra

$$\frac{1}{2}\Big[fl+f(-l)\Big]=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}fx'dx'+\frac{1}{l}\Sigma(-1)^n\Big[\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x'}{l}fx'dx'\Big];\quad(6)$$

en observant qu'on a $\cos n\pi=(-1)^n$ et $\sin n\pi=0$. Donc, en comparant l'équation (5) à cette dernière, on voit que l'équation (5)

n'aura pas lieu pour ces valeurs extrêmes de $x$, à moins que l'on n'ait $fl = f(-l)$.

On reconnaîtra immédiatement la nécessité de cette restriction que l'on doit apporter à l'équation (5), en prenant pour exemple $fx = x^{2i+1}$, et supposant que $i$ soit un nombre entier et positif: tous les termes du second membre de l'équation (5) seront nuls pour $x = \pm l$, tandis que son premier membre sera égal à $(\pm l)^{2i+1}$, ce qui mettra cette équation en défaut; mais au contraire, l'équation (6) se vérifiera d'elle-même, puisque son premier membre $l^{2i+1} + (-l)^{2i+1}$ sera zéro comme le second.

Si l'on donnait à $x$, dans l'équation (4), une valeur qui tombât en dehors des limites $\pm l$, son premier membre serait zéro dans le cas de $p = 1 - g$; d'où il résulterait, à la limite $p = 1$, une formule distincte des équations (5) et (6), et qui sera comprise parmi celles que nous allons écrire. Observons aussi que l'angle $\alpha$ devant être réel pour que la série dont nous sommes partis soit convergente et qu'on en puisse faire usage, et cet angle ayant été remplacé par $\frac{\pi(x-x')}{l}$, on ne devra donner que des valeurs réelles à $x$, dans l'équation (5) et dans celles que nous allons en déduire.

(95). La fonction $fx$ est entièrement arbitraire; elle n'est point assujettie à la loi de continuité, et l'on pourra toujours calculer par les quadratures les intégrales indiquées dans les termes successifs des séries (5) et (6); ces séries seront toujours convergentes, comme on l'a vu plus haut, et comme on peut aussi s'en assurer en considérant les aires des courbes dont les ordonnées correspondantes à une abscisse quelconque $x'$, sont $\sin nx'fx'$ ou $\cos nx'fx'$.

On pourra, par exemple, supposer que $fx$ ait des valeurs quelconques dans une portion de l'étendue comprise depuis $x = -l$ jusqu'à $x = l$, et que cette fonction soit nulle dans le reste de cet intervalle. Ainsi $\lambda'$ étant $> \lambda$, et ces deux quantités étant $< l$, abstraction faite du signe, cette fonction aura, si l'on veut, des valeurs données arbitrairement depuis $x = \lambda$ jusqu'à $x = \lambda'$, et sera nulle, soit depuis $x = -l$ jusqu'à $x = \lambda$, soit depuis $x = \lambda'$ jusqu'à $x = l$. Alors, il suffira de prendre les intégrales relatives à $x'$, depuis $x' = \lambda$ jusqu'à $x' = \lambda'$; la formule (5) reproduira, dans cet inter-

valle, les valeurs quelconques de $fx$; et on la trouvera égale à zéro pour les valeurs de $x$ comprises, soit entre $\lambda'$ et $l$, soit entre $-l$ et $\lambda$. Mais il est important d'observer que pour les valeurs mêmes $x = \lambda$ et $x = \lambda'$, cette formule ne donnera que la moitié des valeurs correspondantes de $fx$.

En effet, lorsque dans la démonstration du nº 93, on fait $x' = x + z$, et que l'on considère $z$ comme une variable infiniment petite, positive ou négative, si l'on donne à $x$ la valeur particulière $x = \lambda$, la fonction $fx'$ sera nulle pour les valeurs négatives de $z$, et de même, si l'on fait $x = \lambda'$, cette fonction sera égale à zéro pour les valeurs positives de $z$; dans l'un et l'autre cas, la valeur de l'intégrale relative à $z$ sera donc réduite à moitié; par conséquent, le second membre de l'équation (5) sera égal à $\frac{1}{2} f\lambda$ pour $x = \lambda$, et à $\frac{1}{2} f\lambda'$ pour $x = \lambda'$; ce qu'il s'agissait de prouver.

En partant de ce principe, la formule (5) va nous en fournir plusieurs autres de la même nature, et qu'on pourrait aussi obtenir directement par l'analyse qui nous a conduits à cette équation (5).

(96). Supposons que la fonction $fx$ soit nulle pour les valeurs négatives de $x$, y compris $x = -l$; et réduisons, en conséquence, à zéro et $+l$ les limites des intégrales relatives à $x'$; l'équation (5) deviendra

$$fx = \frac{1}{2l}\int_0^l fx'dx' + \frac{1}{l}\Sigma\left[\int_0^l \cos\frac{n\pi(x-x')}{l} fx'dx'\right]. \quad (7)$$

De plus, si nous mettons dans cette équation (7), $-x$ à la place de $x$, et que nous regardions ensuite $x$ comme une quantité positive, son second membre aura zéro pour valeur; en sorte que l'on aura aussi

$$0 = \frac{1}{2l}\int_0^l fx'dx' + \frac{1}{l}\Sigma\left[\int_0^l \cos\frac{n\pi(x+x')}{l} fx'dx'\right]. \quad (8)$$

Ces deux équations auront lieu seulement pour les valeurs de $x$ positives et moindres que $l$; pour $x = 0$, leurs seconds membres seront égaux, l'un et l'autre, à la moitié de la valeur correspondante de $fx$; pour $x = l$, ils coïncideront également, et leur valeur com-

mune sera $\frac{1}{2} fl$; car pour $x = \pm l$, le second membre de l'équation (5) était égal à $\frac{1}{2} [fl + f(-l)]$; quantité qui se réduit à $\frac{1}{2} fl$, puisqu'on a $f(-l) = 0$ par hypothèse. L'inspection seule des formules (7) et (8) suffit pour montrer qu'elles doivent coïncider, soit quand $x = 0$, soit quand $x = l$; mais leurs valeurs communes et relatives à ces deux limites ne peuvent se déduire que des considérations qui précèdent.

Si l'on ajoute ces deux équations (7) et (8), on aura

$$fx = \frac{1}{l} \int_0^l fx' dx' + \frac{2}{l} \Sigma \left[ \int_0^l \cos \frac{n\pi x'}{l} fx' dx' \right] \cos \frac{n\pi x}{l}; \quad (9)$$

et cette nouvelle équation subsistera depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, y compris les valeurs extrêmes zéro et $l$, puisque pour chacune de ces valeurs les deux formules que l'on a ajoutées étaient, l'une et l'autre, égales à la moitié de la valeur correspondante de $fx$. Par la même raison, si l'on retranche l'équation (8) de l'équation (7), on aura une équation qui subsistera depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, mais dont le second membre sera nul à ces deux limites; cette équation sera

$$fx = \frac{2}{l} \Sigma \left[ \int_0^l \sin \frac{n\pi x'}{l} fx' dx' \right] \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10)$$

En prenant $l = \pi$, ces deux dernières formules coïncident, comme on voit, avec les équations (3); et elles auront lieu, comme ces équations, pour toutes les valeurs de $x$, lorsque la fonction $fx$ sera périodique, c'est-à-dire, lorsqu'elle reprendra la même valeur toutes les fois que la variable augmentera ou diminuera d'une quantité égale à $2\pi$.

On peut encore varier ces formules de beaucoup d'autres manières. Par exemple, dans celles qui n'ont lieu que pour des valeurs positives de $x$, on peut transporter l'origine des $x$ au milieu de l'intervalle pour lequel ces équations subsistent, et il en naîtra d'autres qui s'étendront également dans les deux sens des $x$ positifs ou négatifs. Ainsi, mettons dans l'équation (7), $2l$, $x + l$, $x' + l$, à la place de

$l$, $x$, $x'$, et conservons $fx$ et $fx'$ au lieu de $f(x+l)$ et $f(x'+l)$; nous aurons

$$fx = \frac{1}{4l}\int_{-l}^{l} fx'dx' + \frac{1}{2l}\Sigma\left[\int_{0}^{l}\cos\frac{n\pi(x-x')}{2l}fx'dx'\right]; \quad (11)$$

formule qui subsistera, comme l'équation (5), depuis $x=-l$ jusqu'à $x=+l$, mais qui en différera en ce qu'elle aura pour valeur $\frac{1}{2}f(\pm l)$ pour $x=\pm l$, tandis que pour ces valeurs extrêmes de $x$ la formule (5) est égale à $\frac{1}{2}[fl+f(-l)]$.

Si l'on divise la somme $\Sigma$ contenue dans cette formule (11), en deux parties, l'une relative aux nombres $n$ pairs, et l'autre relative aux nombres $n$ impairs, cette équation prendra la forme

$$fx = \frac{1}{4l}\int_{-l}^{l} fx'dx' + \frac{1}{2l}\Sigma\left[\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi(x-x')}{l}fx'dx'\right] + \frac{1}{2l}\Sigma\left[\int_{-l}^{l}\cos\frac{(2n-1)\pi(x-x')}{2l}fx'dx'\right];$$

les sommes $\Sigma$ s'étendant toujours à toutes les valeurs paires ou impaires de $n$, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$. Je multiplie cette dernière équation par 2, puis j'en retranche l'équation (5); il vient

$$fx = \frac{1}{l}\Sigma\left[\int_{-l}^{l}\cos\frac{(2n-1)\pi(x-x')}{2l}fx'dx'\right]; \quad (12)$$

équation qui subsistera toujours depuis $x=-l$ jusqu'à $x=+l$, mais dont le second membre sera égal, d'après les formules dont il résulte, à $\frac{1}{2}[fl-f(-l)]$ pour $x=l$, et à $\frac{1}{2}[f(-l)-fl]$ pour $x=-l$; en sorte que cette équation (12) n'aura lieu pour ces valeurs extrêmes de $x$, que quand on aura $f(-l)=-fl$.

Nous n'indiquerons pas ici d'autres combinaisons des formules précédentes, dont chacune, comme on l'a déjà dit, pourrait être démontrée directement par un moyen semblable à celui du n° 93.

(97). Quoique ces diverses équations ne soient pas identiques relativement à $x$, on pourra néanmoins les différentier par rapport à cette variable. Si $X=0$ est une de ces équations, il est évident que l'équa-

tion $\frac{dX}{dx} = 0$ devra subsister dans toute l'étendue des valeurs de $x$ pour lesquelles $X = 0$ avait lieu. Mais lors même que cette équation $X = 0$ avait lieu aux limites de cet intervalle, l'équation $\frac{dX}{dx} = 0$ n'aura aussi lieu à ces mêmes limites, qu'autant que de nouvelles conditions seront remplies; et dans le cas où $X = 0$ ne s'appliquera pas aux valeurs extrêmes de $x$, la valeur de $\frac{dfx}{dx}$ que l'on déduira de $\frac{dX}{dx} = 0$ sera toujours infinie pour ces valeurs particulières de la variable. C'est ce que l'on vérifiera de la manière suivante.

En différentiant l'équation (5) et faisant $\frac{dfx}{dx} = f'x$, on a

$$f'x = -\frac{1}{l}\Sigma\left[\int_{-l}^{l}\frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi(x-x')}{l}fx'dx'\right];$$

et si l'on intègre par partie sous le signe $\Sigma$, cette formule devient

$$f'x = -\frac{1}{l}[fl - f(-l)]\,\Sigma(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{1}{l}\Sigma\left[\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi(x-x')}{l}f'x'dx'\right].$$

Pour toutes les valeurs de $x > -l$ et $< l$, on a, comme on sait,

$$\Sigma(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l} = -\frac{1}{2};$$

pour ces mêmes valeurs, on aura donc

$$f'x = \frac{1}{2l}[fl - f(-l)] + \frac{1}{l}\Sigma\left[\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi(x-x')}{l}f'x'dx'\right];$$

ce qui est effectivement vrai, puisque cette formule coïncide avec l'équation (5) quand on met dans celle-ci $f'x$ au lieu de $fx$. Pour que l'équation (5) ait lieu aux limites $x = \pm l$, il est nécessaire que l'on ait $f(-l) = fl$; mais en supposant cette condition remplie, et comparant toujours cette dernière formule à l'équation (5), on voit qu'il faudra qu'on ait, en outre, $f'(-l) = f'l$ pour que cette formule convienne aux valeurs extrêmes $x = \pm l$. De plus, si la condi-

tion $f(-l)=fl$ n'est pas satisfaite, l'équation (5) n'aura pas lieu pour $x=\pm l$; et comme pour ces valeurs particulières de $x$, on a évidemment

$$\Sigma(-1)^n \cos\frac{n\pi\pi}{l}=\infty,$$

il s'ensuit que les valeurs correspondantes de $f'x$, c'est-à-dire les valeurs de $f'(\pm l)$, déduites de la formule (5) par la différentiation, seront infinies, ainsi qu'on l'a dit plus haut.

Si l'on différentie de même l'équation (9), qui subsiste sans condition, depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$ inclusivement, on aura

$$f'x=-\frac{2}{l}\Sigma\left[\int_0^l \frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x'}{l}fx'dx'\right]\sin\frac{n\pi x}{l},$$

quelles que soient les valeurs extrêmes $fl$ et $f(-l)$; on a aussi, en intégrant par partie,

$$\int_0^l \frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x'}{l}fx'dx'=-\int_0^l \sin\frac{n\pi x'}{l}f'x'dx';$$

nous aurons donc

$$f'x=\frac{2}{l}\Sigma\left[\int_0^l \sin\frac{n\pi x'}{l}f'x'dx'\right]\sin\frac{n\pi x}{l};$$

résultat exact en vertu de l'équation (10), dont il se déduit par la substitution de $f'x$ à la place de $fx$, mais qui n'aura lieu pour $x=0$ et $x=l$, qu'autant que $f'x$ s'évanouit à ces limites.

Toutes les autres formules du numéro précédent donneraient lieu à de semblables observations, que je crois superflu de développer davantage.

(98). On peut aussi intégrer par rapport à $x$ ces différentes formules, et représenter, de cette manière, les valeurs de $\int fxdx$, dans l'étendue des valeurs de $x$ pour lesquelles chacune de ces équations subsiste. En général, si la formule d'où l'on part a lieu seulement depuis $x=\lambda$ jusqu'à $x=\lambda'$, mais qu'elle ne subsiste pas pour les limites même $\lambda$ et $\lambda'$, on pourra néanmoins comprendre ces valeurs extrêmes de $x$ dans l'intégrale $\int fxdx$, pourvu seulement que les vraies valeurs de $f\lambda$ et $f\lambda'$, non plus que les valeurs fautives qui résulteraient de



Digitized by Google

la formule donnée, ne soient point infinies; car alors on peut, sans aucune erreur, faire abstraction ou tenir compte, à volonté, des élémens de cette intégrale qui répondent à $x=\lambda$ et $x=\lambda'$. C'est aussi pour cette raison que les valeurs de $f'x$, relatives à ces limites, deviennent toujours infinies, quand elles sont déduites d'une formule qui n'a pas lieu pour $x=\lambda$ et $x=\lambda'$; car si les valeurs de $f'\lambda$ et $f'\lambda'$ que l'on en déduit par la différentiation étaient des quantités finies, les valeurs de $f\lambda$ et $f\lambda'$ seraient comprises dans la formule, contre la supposition.

Vérifions, sur des exemples, ce qui est relatif à l'intégration des formules précédentes, et dans ce qui va suivre, désignons par $f_{,}x$ l'intégrale $\int fxdx$ prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $x=0$.

D'après l'équation (10), nous aurons

$$f_{,}x = -\frac{2}{l}\Sigma\left[\int_0^l \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x'}{l}fx'dx'\right]\left(\cos\frac{n\pi x}{l}-1\right);$$

et comme on a, en intégrant par partie,

$$\int_0^l \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x'}{l}fx'dx' = -\int_0^l \cos\frac{n\pi x'}{l}f_{,}x'dx',$$

il en résultera,

$$f_{,}x = \frac{2}{l}\Sigma\left[\int_0^l \cos\frac{n\pi x'}{l}f_{,}x'dx'\right]\cos\frac{n\pi x}{l} - \frac{2}{l}\Sigma\int_0^l \cos\frac{n\pi x'}{l}f_{,}x'dx'.$$

Or, en mettant $f_{,}x$ à la place de $fx$ dans l'équation (9), on a

$$f_{,}x = \frac{1}{l}\int_0^l f_{,}x'dx' + \frac{2}{l}\Sigma\left[\int_0^l \cos\frac{n\pi x'}{l}f_{,}x'dx'\right]\cos\frac{n\pi x}{l},$$

depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$ inclusivement; en faisant $x=0$ et observant qu'on a alors $f_{,}x=0$, on aura donc

$$0 = \frac{1}{l}\int_0^l f_{,}x'dx' + \frac{2}{l}\Sigma\int_0^l \frac{n\pi x'}{l}fx'dx';$$

et si l'on retranche cette équation de la précédente, on obtiendra l'expression de $f_{,}x$ qu'il s'agissait de vérifier. Cette expression devra convenir, comme l'équation (9), aux limites même $x=0$ et $x=l$,

quoique l'équation (10) d'où l'on est parti, n'y soit pas toujours applicable. Pour $x = 0$, cela est évident. Pour $x = l$, il en résultera, comme il est aisé de le voir,

$$f_{,}l = -\frac{4}{l}\Sigma\left[\int_0^l \cos\frac{(2n-1)\pi x'}{l} f_{,}x'dx'\right];$$

la somme $\Sigma$ s'étendant toujours à tous les nombres $n$ depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. Si donc on fait

$$l = 2l_{,}, \quad x' = x_{,} + l_{,}, \quad f_{,}(x_{,} + l_{,}) = \mathrm{F}x_{,},$$

et que l'on mette, en conséquence, $\mathrm{F}l_{,}$ au lieu de $f_{,}(2l_{,})$ ou $f_{,}l$, on aura

$$\mathrm{F}l_{,} = \frac{2}{l_{,}}\Sigma\left[\int_{-l_{,}}^{l_{,}} \cos\frac{(2n-1)\pi(l_{,}-x_{,})}{2l_{,}}\mathrm{F}x_{,}dx_{,}\right];$$

mais on a aussi $\mathrm{F}(-l_{,}) = 0$, en observant que $\mathrm{F}(-l_{,})$ est la valeur de $f_{,}x$ qui répond à $x = 0$, et qui est nulle par hypothèse; on aura donc enfin

$$\frac{1}{2}[\mathrm{F}l_{,} - \mathrm{F}(-l_{,})] = \frac{1}{l_{,}}\Sigma\left[\int_{-l_{,}}^{l_{,}} \cos\frac{(2n-1)\pi(l_{,}-x_{,})}{2l_{,}}\mathrm{F}x_{,}dx_{,}\right],$$

comme il résulte, en effet, de l'équation (12), en y mettant $x_{,}$, $l_{,}$, F, au lieu de $x'$, $l$, $f$, et y faisant $x = l_{,}$.

L'équation (9) donne, par l'intégration,

$$fx = \frac{x}{l}f_{,}l + \frac{2}{l}\Sigma\left[\int_0^l \frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x'}{l} fx'dx'\right]\sin\frac{n\pi x}{l};$$

en intégrant par partie, on a

$$\int_0^l \frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x'}{l} fx'dx' = \frac{l\cos n\pi}{n\pi}f_{,}l + \int_0^l \sin\frac{n\pi x'}{l} f_{,}x'dx';$$

à cause de $\cos n\pi = (-1)^n$, on aura donc

$$f_{,}x = \left[\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\Sigma\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]f_{,}l$$
$$+ \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{n\pi x'}{l} f_{,}x'dx'\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Cette équation est identique, soit pour $x = 0$, soit pour $x = l$. Elle est également vraie quand on suppose $x > 0$ et $< l$; car, d'après une formule connue, on a alors

$$\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \Sigma \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} = 0;$$

ce qui fait coïncider cette équation avec la formule (10), dans laquelle on mettra $f_{,}x$ au lieu de $fx$.

(99). Nous ne pousserons pas plus loin ces vérifications; mais nous ferons remarquer comment, dans ce dernier cas, la valeur extrême et tout-à-fait arbitraire $f_{,}l$, s'est trouvée comprise dans l'expression générale de $f_{,}x$ à l'aide d'un terme complémentaire, égal à cette valeur $f_{,}l$ pour $x = l$, et nul pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre zéro et $l$. Il en sera de même dans tous les cas; et généralement, si l'on veut représenter une fonction quelconque $fx$ depuis $x = \lambda$ jusqu'à $x = \lambda'$, y compris les limites $\lambda$ et $\lambda'$, par une formule qui ne convienne pas d'abord à ces valeurs extrêmes, on y parviendra toujours en ajoutant à cette formule certains termes qui ont des valeurs convenables pour $x = \lambda$ et pour $x = \lambda'$, et qui sont nuls pour toutes les valeurs intermédiaires de la variable. Il est important, dans les usages qu'on fait des séries de cette nature, d'avoir égard à ces termes complémentaires, auxquels on peut d'ailleurs donner une infinité de formes différentes.

Relativement à la formule (5), par exemple, on pourra prendre

$$\frac{1}{2}[fl - f(-l)]\left[\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \Sigma \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l}\right],$$

pour cette partie complémentaire; et en l'ajoutant au second membre de l'équation (5), qui se réduit à $\frac{1}{2}[fl + f(-l)]$ pour $x = \pm l$, cette équation ainsi modifiée conviendra à ces valeurs extrêmes de $x$, aussi bien qu'aux valeurs intermédiaires.

Quelles que soient les valeurs de $fx$ qui répondent à $x = 0$ et $x = l$, l'équation (10) conviendra pareillement à ces valeurs extrêmes de $x$ et aux valeurs intermédiaires, en ajoutant à son second membre la quantité

$$\left[\frac{l-x}{l} - \frac{2}{\pi}\Sigma\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]fo + \left[\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\Sigma\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]fl,$$

dont les deux parties sont nulles pour $x > o$ et $< l$, mais dont la première s'évanouit seulement à la limite $x = l$, et est égale à $fo$ pour $x = o$, tandis que la seconde s'évanouit quand $x = o$, et est égale à $fl$ lorsque $x = l$.

(100). Si la fonction $fx$ est telle, que les intégrales contenues sous les signes $\Sigma$ dans les formules précédentes puissent s'obtenir sous forme finie, il en résultera des séries dont la valeur exacte sera exprimée, dans chaque cas, par cette fonction. Cela aura lieu toutes les fois que l'on prendra pour $fx$ une exponentielle, un sinus, un cosinus, une puissance entière et positive; mais quoique ce moyen paraisse devoir être très fécond, il ne fait connaître cependant que des sommes de séries déjà déterminées, soit par Euler, soit par D. Bernouilli, en suivant d'autres méthodes, et que j'ai réunies et considérées sous différens points de vue dans mes mémoires sur le calcul intégral (*). Ces mêmes formules peuvent aussi servir à la transformation des séries, ainsi qu'on peut le voir dans ces mémoires.

Quant à la série $\Sigma(-1)^n \cos\frac{n\pi x}{l}$ que nous avons supposée plus haut égale à $-\frac{1}{2}$, elle est de l'espèce des séries périodiques qui ne sont ni convergentes ni divergentes, mais qu'on peut néanmoins employer en les considérant comme les limites de séries convergentes, c'est-à-dire en multipliant leurs termes par les puissances ascendantes d'une quantité infiniment peu différente de l'unité. Cette supposition revient donc à dire qu'à la limite où $q$ diffère infiniment peu de l'unité, on a

$$\Sigma(-1)^n q^n \cos\frac{n\pi x}{l} = -\frac{1}{2},$$

tant que $x$ diffère de $\pm l$. Cela résulte, en effet, de l'équation dont nous sommes partis, dans le n° 93, en y faisant $p = -q$ et $\alpha = \frac{\pi x}{l}$;

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 18ᵉ et 19ᵉ cahiers.

ce qui donne

$$1 - q\cos\frac{\pi x}{l} + q^2\cos\frac{2\pi x}{l} - q^3\cos\frac{3\pi x}{l} + \text{etc.} = \frac{1 + q\cos\frac{\pi x}{l}}{1 + 2q\cos\frac{\pi x}{l} + q^2};$$

équation qui coïncide avec la précédente, quand $q$ diffère infiniment peu de l'unité, et que l'on n'a pas $x = \pm l$, puisque alors on peut regarder son second membre comme égal à $\frac{1}{2}$. Si l'on a $x = \pm l$, ce second membre devient $\frac{1}{1-q}$, quelle que soit la quantité $q$, et, conséquemment, infini lorsque $q = 1$. Pour ces valeurs extrêmes de $x$ et à cette limite, la somme $\Sigma$ est donc aussi infinie; ce qui est évident.

En multipliant cette somme par $dx$, puis intégrant, et prenant l'intégrale de manière qu'elle soit zéro quand $x = 0$, il vient

$$\frac{l}{\pi}\Sigma\frac{(-1)^n q^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} = -\frac{1}{2}x,$$

à la limite où $q$ diffère infiniment peu de l'unité et quand la variable $x$ est comprise entre $\pm l$. Mais à cette limite et pour les valeurs extrêmes de $x$, la différentielle que l'on a intégrée n'étant point égale à $-\frac{1}{2}dx$, et le coefficient de $dx$ étant au contraire égal à l'infini, on ne peut pas comprendre dans l'intégrale les élémens qui répondent à $x = \pm l$; et c'est pour cela que cette dernière équation n'a pas lieu pour ces valeurs particulières de la variable. En remplaçant $q$ par l'unité, on aura ces deux équations

$$\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\Sigma\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} = 0,$$

$$\frac{l-x}{l} - \frac{2}{\pi}\Sigma\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} = 0,$$

dont la seconde se déduit de la première par le changement de $x$ en $l - x$, et qui sont celles que nous venons de supposer dans le numéro précédent.

(101). La formule (10) est celle que l'on doit à Lagrange, et de laquelle on peut facilement déduire toutes les autres, de même que nous les avons toutes déduites de la formule (5). On pourrait aussi

appliquer directement la démonstration de Lagrange à toutes les formules précédentes. Voici cette démonstration, à peu près telle que l'auteur l'a donnée (*).

Soit $m$ un nombre entier et positif, et désignons par $y$ cette fonction périodique

$$y = Y_1 \sin \pi x + Y_2 \sin 2\pi x + Y_3 \sin 3\pi x + \ldots + Y_m \sin m\pi x, \quad (13)$$

dans laquelle $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots Y_m$, sont des coefficiens indépendans de la variable $x$. Soit $fx$ une autre fonction donnée arbitrairement, continue ou discontinue, assujettie à la seule condition de devenir nulle, comme la précédente, pour $x = 0$ et pour $x = 1$. On propose d'abord de déterminer les $m$ coefficiens $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots Y_m$, de telle sorte que l'on ait $y = fx$ pour ces $m$ valeurs particulières de la variable

$$x = \frac{1}{m+1}, \quad x = \frac{2}{m+1}, \quad x = \frac{3}{m+1}, \ldots \; x = \frac{m}{m+1},$$

outre les valeurs extrêmes $x = 0$ et $x = 1$.

Pour cela, représentons par $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$, les $m$ valeurs correspondantes de $fx$; nous aurons, pour déterminer les coefficiens inconnus, ces $m$ équations :

$$y_1 = Y_1 \sin \frac{\pi}{m+1} + Y_2 \sin \frac{2\pi}{m+1} + Y_3 \sin \frac{3\pi}{m+1} \ldots\ldots + Y_m \sin \frac{m\pi}{m+1},$$

$$y_2 = Y_1 \sin \frac{2\pi}{m+1} + Y_2 \sin \frac{4\pi}{m+1} + Y_3 \sin \frac{6\pi}{m+1} \ldots\ldots + Y_m \sin \frac{2m\pi}{m+1},$$

$$y_3 = Y_1 \sin \frac{3\pi}{m+1} + Y_2 \sin \frac{6\pi}{m+1} + Y_3 \sin \frac{9\pi}{m+1} \ldots\ldots + Y_m \sin \frac{3m\pi}{m+1},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$y_m = Y_1 \sin \frac{m\pi}{m+1} + Y_2 \sin \frac{2m\pi}{m+1} + Y_3 \sin \frac{3m\pi}{m+1} \ldots\ldots + Y_m \sin \frac{m^2\pi}{m+1}.$$

Or, si l'on en veut déduire l'expression d'un coefficient quelconque $Y_n$, il faudra en prendre la somme, après les avoir multipliées respec-

(*) Tome III des anciens *Mémoires de Turin*, page 261.

tivement par

$$2\sin\frac{n\pi}{m+1},\quad 2\sin\frac{2n\pi}{m+1},\quad 2\sin\frac{3n\pi}{m+1},\ldots\ldots 2\sin\frac{mn\pi}{m+1};$$

il arrivera que tous les autres coefficiens disparaîtront de cette somme, qui ne contiendra que le coefficient $Y_n$ qu'on se propose de déterminer.

En effet, $n'$ étant un indice différent de $n$, le coefficient $Y_{n'}$ se trouvera multiplié par la somme

$$2\sin\frac{n'\pi}{m+1}\sin\frac{n\pi}{m+1}+2\sin\frac{2n'\pi}{m+1}\sin\frac{2n\pi}{m+1}+2\sin\frac{3n'\pi}{m+1}\sin\frac{3n\pi}{m+1}\cdot$$
$$\ldots\ldots+2\sin\frac{mn'\pi}{m+1}\sin\frac{mn\pi}{m+1};$$

laquelle est la différence de ces deux autres sommes:

$$1+\cos\frac{(n'-n)\pi}{m+1}+\cos\frac{2(n'-n)\pi}{m+1}+\cos\frac{3(n'-n)\pi}{m+1}\ldots+\cos\frac{m(n'-n)\pi}{m+1},$$
$$1+\cos\frac{(n'+n)\pi}{m+1}+\cos\frac{2(n'+n)\pi}{m+1}+\cos\frac{3(n'+n)\pi}{m+1}\ldots+\cos\frac{m(n'+n)\pi}{m+1},$$

dont les valeurs sont faciles à déterminer, comme on le verra tout-à-l'heure. Tant qu'on n'a pas $n'=n$, la valeur de la première somme est $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(n'-n)\pi$; celle de la seconde est toujours $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(n'+n)\pi$; en retranchant l'une de l'autre, et observant que $n$ et $n'$ sont des nombres entiers, on a zéro pour la différence; par conséquent, le coefficient quelconque $Y_{n'}$, différent de $Y_n$, n'entrera pas dans la somme des équations qu'on aura faite. Mais si l'on a $n'=n$, la première des deux sommes précédentes sera évidemment égale à $m+1$; la seconde aura pour valeur $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2n\pi$ ou zéro; le coefficient $Y_n$ aura donc $m+1$ pour facteur dans cette somme d'équations; et en la divisant par $m+1$, il en résultera

$$Y_n=\frac{2}{m+1}\left(y_1\sin\frac{n\pi}{m+1}+y_2\sin\frac{2n\pi}{m+1}+y_3\sin\frac{3n\pi}{m+1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+y_m\sin\frac{mn\pi}{m+1}\right).$$

Les coefficiens $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$,... $Y_m$, étant ainsi déterminés, la formule (13) coïncidera avec la fonction $fx$, pour toutes les valeurs

de $x$ contenues depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et qui sont des multiples exacts de la fraction $\frac{1}{m+1}$; et pour les autres valeurs de $x$ comprises dans le même intervalle, on devra la regarder comme une formule d'interpolation d'une espèce particulière, qui pourra servir à calculer les valeurs approchées de $fx$, quand la forme de cette fonction ne sera pas donnée. Si l'on construit deux courbes qui aient $x$ et $y$ pour leurs coordonnées courantes, dont l'une ait $y=fx$ pour équation, et l'autre l'équation (13), ces deux courbes couperont l'axe des abscisses $x$ aux points correspondans à $x=0$ et $x=1$, et dans l'intervalle compris entre ces deux points, elles auront un nombre $m$ de points communs, dont les projections sur l'axe des $x$ seront équidistantes. Ce résultat subsistera, quelque grand qu'on suppose le nombre $m$; à mesure que ce nombre augmentera, les points communs aux deux courbes se rapprocheront; et à la limite $m=\infty$, ces deux courbes coïncideront parfaitement dans toute la portion comprise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Or, à cette limite, la somme qui exprime la valeur de $Y_n$ se changera en une intégrale définie; et $n'$ étant un nombre entier et positif quelconque, si l'on fait

$$\frac{n'}{m+1}=x', \quad \frac{1}{m+1}=dx',$$

il en résultera

$$y_{n'}=fx', \quad Y_n=2\int_0^1 \sin n\pi x'.fx'dx';$$

en même temps la série (13) se prolongera depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$; et en remettant $fx$ à la place de $y$, on aura

$$fx=2\Sigma\left(\int_0^1 \sin n\pi x'.fx'dx'\right)\sin n\pi x;$$

résultat qui coïncide avec la formule (10), en prenant, dans celle-ci, $l$ pour unité.

Les valeurs des deux sommes que nous avons supposées connues s'obtiennent, en effet, sans difficulté. Je désigne par $i$ un nombre entier moindre que $2(m+1)$, pour lequel on pourra prendre succes-

sivement $n'-n$ et $n'+n$, et qui ne sera pas zéro. Soit alors

$$1+\cos\frac{i\pi}{m+1}+\cos\frac{2i\pi}{m+1}+\cos\frac{3i\pi}{m+1}+\ldots+\cos\frac{mi\pi}{m+1}=s.$$

En multipliant par $2\cos\frac{i\pi}{m+1}$, on aura

$$2s\cos\frac{i\pi}{m+1}=2\left(1+\cos\frac{i\pi}{m+1}+\cos\frac{2i\pi}{m+1}+\cos\frac{3i\pi}{m+1}\ldots+\cos\frac{mi\pi}{m+1}\right)$$
$$-1+\cos\frac{i\pi}{m+1}-\cos\frac{mi\pi}{m+1}+\cos i\pi;$$

et, à cause de

$$\cos\frac{mi\pi}{m+1}=\cos i\pi\cos\frac{i\pi}{m+1},$$

on en conclut

$$2\left(1-\cos\frac{i\pi}{m+1}\right)s=\left(1-\cos\frac{i\pi}{m+1}\right)(1-\cos i\pi).$$

Donc, en supprimant le facteur commun $1-\cos\frac{i\pi}{m+1}$, qui n'est pas nul, par hypothèse, on aura

$$s=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos i\pi;$$

ce qu'il s'agissait de trouver.

Au reste, la formule précédente et toutes celles que nous avons trouvées dans ce chapitre, sont comprises dans l'équation (22) du n° 86; mais cette équation comprend un grand nombre d'autres formules de la même nature, que l'on doit admettre comme la conséquence certaine de la solution générale de chaque problème, et qu'il serait à désirer que l'on parvînt à démontrer d'une manière plus directe. Malheureusement le mode de démonstration de Lagrange et celui du n° 93 ne paraissent pas pouvoir s'appliquer à ces autres formules, dans lesquelles la fonction arbitraire n'est point exprimée en série de sinus ou de cosinus des multiples 1, 2, 3, 4, etc., ou 1, 3, 5, 7, etc., de la variable, comme dans toutes les formules précédentes.

(102). Dans ces différentes formules, on peut supposer la quan-

tité $l$ aussi grande que l'on veut, et même infinie. Dans le cas de $l = \infty$, la formule (5) représentera la fonction $fx$ pour toutes les valeurs réelles de $x$, depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$; son premier terme s'évanouira; et si l'on fait

$$\frac{n\pi}{l} = \alpha, \quad \frac{\pi}{l} = d\alpha,$$

la somme $\Sigma$ qu'elle renferme se changera en une intégrale relative $\alpha$. Il en résultera cette autre formule

$$fx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos\alpha(x - x') fx' d\alpha\, dx', \qquad (14)$$

dont Fourier a enrichi l'Analyse, ou, du moins, qu'il a donnée le premier pour les cas où l'on a $fx = f(-x)$ ou $fx = -f(-x)$, et dont il était aisé de déduire la formule générale.

Tout ce que l'on a dit relativement à la formule (5) conviendra également à celle-ci. Ainsi, on pourra la différentier par rapport à $x$, ou l'intégrer après l'avoir multipliée par $dx$; on y pourra prendre pour $fx$ une fonction discontinue, qui ait des valeurs quelconques depuis $x = \lambda$ jusqu'à $x = \lambda'$, et qui soit nulle pour toutes les valeurs de $x$ non comprises entre ces limites. Dans ce cas, il suffira d'intégrer par rapport à $x'$, depuis $x' = \lambda$ jusqu'à $x' = \lambda'$; mais il ne faudra pas oublier que cette formule (14) ne donnera que la moitié des valeurs de $fx$, correspondantes à $x = \lambda$ et $x = \lambda'$, et que sa différentielle relative à $x$ et divisée par $dx$, deviendra infinie pour ces mêmes valeurs de la variable, à moins que l'on n'ait $f\lambda = 0$ et $f\lambda' = 0$.

Pour appliquer cette formule à une fonction donnée $fx$ qui croît indéfiniment avec la variable, on changera $fx$ en une fonction discontinue qui soit nulle en-deçà et au-delà de limites arbitraires, pourvu qu'elles comprennent les valeurs de $x$ pour lesquelles on voudra représenter celles de $fx$. Si l'on a, par exemple, $fx = x$, on ne pourra pas intégrer depuis $x' = -\infty$ jusqu'à $x' = \infty$, puisque ces limites rendraient l'intégrale indéterminée. On supposera donc que la fonction $fx'$ soit nulle pour $x' < \lambda$ et pour $x > \lambda'$; et l'on aura d'abord

$$\int_{\lambda}^{\lambda'} x' \cos \alpha (x - x') dx' = -\frac{\lambda'}{\alpha} \sin \alpha (x - \lambda') + \frac{\lambda}{\alpha} \sin \alpha (x - \lambda)$$
$$+ \frac{1}{\alpha^2} [\cos \alpha (x - \lambda') - 1] - \frac{1}{\alpha^2} [\cos \alpha (x - \lambda) - 1].$$

Or, d'après une formule connue, on a

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin h\alpha}{\alpha} d\alpha = \tfrac{1}{2}\pi, \ = -\tfrac{1}{2}\pi, \ = 0,$$

selon que la constante $h$ est positive, négative ou zéro; en multipliant par $dh$, intégrant ensuite et prenant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse avec $h$, on en conclut

$$\int_{0}^{\infty} (\cos h\alpha - 1) \frac{d\alpha}{\alpha^2} = -\tfrac{1}{2}\pi h, \ = +\tfrac{1}{2}\pi h, \ = 0.$$

Si donc on prend successivement $x - \lambda'$ et $x - \lambda$ pour la constante $h$, et que l'on suppose $x > \lambda$ et $< \lambda'$, il en résultera

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{\lambda}^{\lambda'} x' \cos \alpha(x - x')dx'\right]d\alpha = \tfrac{1}{2}\lambda' + \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}(x - \lambda')$$
$$+ \tfrac{1}{2}(x - \lambda) = x;$$

ce qui vérifie la formule (14), appliquée, de la manière que l'on a dite, à l'exemple donné. Dans le cas de $x < \lambda$ et $< \lambda'$, on aura de même

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{\lambda}^{\lambda'} x' \cos \alpha (x - x') dx'\right]d\alpha = \tfrac{1}{2}\lambda' - \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}(x - \lambda')$$
$$- \tfrac{1}{2}(x - \lambda) = 0;$$

et dans le cas de $x = \lambda$ et $< \lambda'$, on aura aussi

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{\lambda}^{\lambda'} x' \cos \alpha (\lambda - x') dx'\right]d\alpha = \tfrac{1}{2}\lambda' + \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda') = \tfrac{1}{2}\lambda.$$

On trouvera pareillement que la formule (14) se réduit à zéro dans le cas de $x > \lambda$ et $> \lambda'$, et à $\frac{1}{2}\lambda'$ dans le cas de $x > \lambda$ et $= \lambda'$. On sera de même obligé de changer les limites $\pm \infty$ en d'autres limites $\lambda$ et $\lambda'$ de grandeur finie, lorsque la fonction donnée $fx'$ sera une quantité périodique; et, généralement, on ne pourra employer les limites $\pm \infty$ dans l'intégration relative à $x'$, que quand cette fonction s'évanouira pour ces deux valeurs extrêmes de la variable.

Quoique l'équation (14) ait lieu pour toutes les valeurs réelles de

la variable, depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, elle n'est cependant pas identique, et ne subsiste pas, en général, pour des valeurs imaginaires de $x$. La série dont nous sommes partis dans le n° 93, n'était convergente et ne pouvait être employée que pour des valeurs réelles de l'angle $\alpha$; il s'ensuit que les formules qui en ont été déduites, et, conséquemment, la formule (14), ne sont aussi démontrées que pour des valeurs réelles de $x$; mais le cas des valeurs imaginaires ne devant pas se présenter dans la théorie de la chaleur, je renverrai sur ce point, relatif au degré de généralité et à la nature de la formule (14), à l'examen que j'en ai fait dans un mémoire déjà cité (*).

(103). Lorsque la fonction $fx'$ sera donnée, et que l'intégrale relative à $x'$ pourra s'obtenir sous forme finie, la formule (14) se trouvera réduite à une intégrale simple, relative à $\alpha$ et dont $fx$ sera la valeur; mais ce moyen ne fait connaître la valeur d'aucune intégrale qui n'ait pas déjà été déterminée par d'autres procédés. Si, au contraire, la fonction $fx$ est arbitraire, et qu'on veuille vérifier l'équation (14) dans toute sa généralité, il faudra d'abord effectuer l'intégration relative à $\alpha$; ce qui exige une attention particulière, attendu que les limites zéro et l'infini ne peuvent pas être changées comme celles de l'intégration par rapport à $x'$.

L'intégrale d'une quantité périodique qui s'étend à l'infini, doit toujours être considérée comme la limite d'une autre intégrale dont les élémens décroissent à mesure que la variable augmente, et sont nuls quand la variable est infinie; observation semblable à celle que nous avons déjà faite relativement aux séries infinies de quantités périodiques. Cela étant, on pourra considérer $\int_0^\infty \cos\alpha(x - x')\,d\alpha$ comme la limite de $\int_0^\infty e^{-g\alpha}\cos\alpha(x - x')\,d\alpha$, c'est-à-dire, comme la valeur de cette dernière intégrale qui a lieu quand on y suppose la constante $g$ infiniment petite et positive, et dans laquelle intégrale $e$ représente la base des logarithmes népériens. On parviendra, de cette manière, à une démonstration de la formule (14), tout-à-fait pareille à celle de la formule (5) qui a été donnée dans le n° 93.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 19ᵉ cahier, page 456.

Nous pouvons aussi prendre pour $\int_0^\infty \cos \alpha(x-x')\,dx'$, la valeur de $\int_0^\infty e^{-g\alpha^2} \cos \alpha\,(x-x')d\alpha$ correspondante à la constante $g$ infiniment petite et toujours positive; car d'après une formule connue, et qui se déduit de celle que l'on a déjà employée dans le n° 74, nous avons

$$\int^\infty e^{-g\alpha^2} \cos \alpha\,(x-x')\,d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{g}}\,e^{-\frac{(x-x')^2}{4g}},$$

quelle que soit la constante positive $g$; en appelant P le second membre de l'équation (14), nous aurons donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x')^2}{4g}} fx'\,\frac{dx'}{2\sqrt{g}},$$

à la limite où la constante $g$ est infiniment petite; et il s'agira de faire voir qu'à cette limite on a $P = fx$. Or, la quantité comprise sous le signe $\int$ s'évanouit avec $g$ pour toutes les valeurs de $x'$, excepté celles qui diffèrent infiniment peu de $x$. Si donc on fait $x' = x + z$, on pourra regarder $z$ comme une variable infiniment petite, positive ou négative; par conséquent, on aura

$$P = \frac{fx}{\sqrt{\pi}}\int e^{-\frac{z^2}{4g}}\,\frac{dz}{2\sqrt{g}};$$

mais, à cause que la quantité soumise à l'intégration s'évanouit avec $g$ pour toute valeur finie de $z$, il sera permis d'étendre maintenant cette intégrale depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$; et comme on a (n° 74)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4g}}\,\frac{dz}{2\sqrt{g}} = \sqrt{\pi},$$

il en résultera effectivement $P = fx$.

Au lieu de substituer à $\int_0^\infty \cos \alpha\,(x-x')\,d\alpha$ une autre intégrale dont la première soit la limite, on peut encore intégrer d'abord depuis $\alpha = 0$ jusqu'à une valeur indéterminée de $\alpha$, qu'on traitera

comme infinie dans l'intégration relative à $x'$. De cette manière, on aura

$$\int \cos \alpha (x - x')\, d\alpha = \frac{\sin \alpha (x - x')}{x - x'};$$

le second membre P de l'équation (14) sera donc

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (x - x')}{x - x'} fx'\, dx';$$

et si l'on y fait

$$x' = x + \frac{z}{\alpha}, \quad dx' = \frac{dz}{\alpha},$$

il deviendra

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} f\left(x + \frac{z}{\alpha}\right) dz.$$

Or, la constante $\alpha$ étant infinie, la fonction $f\left(x + \frac{z}{\alpha}\right)$ se réduit à $fx$, excepté pour les valeurs de $z$ qui sont elles-mêmes infinies, et auxquelles on peut ne pas avoir égard, parce que le facteur $\frac{\sin z}{z}$ rend aussi infiniment petite la partie de l'intégrale qui leur correspond. Donc en observant que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz$ est, comme on sait, égale à $\pi$, on aura $P = fx$; ce qui fournit encore une vérification de la formule (14). C'est ainsi qu'elle a été démontrée par Deflers, élève de l'École normale, mort il y a quelques années.

(104). Cette formule (14) s'étendra, sans aucune difficulté, aux fonctions de deux ou de plusieurs variables. Pour exprimer, de cette manière, la fonction $f(x, y)$ pour toutes les valeurs réelles de $x$ et $y$, on la mettra d'abord dans l'équation (14) à la place de $fx$; d'où il résultera

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \cos \alpha (x - x') f(x', y)\, dx'\, d\alpha.$$

D'après la même équation, on aura également

$$f(x', y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \cos \mathcal{E} (y - y') f(x', y')\, dy'\, d\mathcal{E};$$

et, de ces deux formules, on conclut

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cos\alpha(x-x')\cos\beta(y-y')f(x',y')dx'dy'd\alpha d\beta.$$

Une fonction de trois variables s'exprimera de même par une intégrale sextuple; et ainsi de suite.

La même chose aura lieu à l'égard des fonctions de plusieurs variables que l'on voudra seulement représenter dans une étendue limitée des valeurs de ces variables. D'après la formule (9), par exemple, nous aurons

$$f(x,y)=\frac{1}{l}\int_0^l f(x',y)\,dx'+\frac{2}{l}\Sigma\left[\int_0^l\cos\frac{n\pi x'}{l}f(x',y)dx'\right]\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$f(x',y)=\frac{1}{l'}\int_0^{l'} f(x',y')\,dy'+\frac{2}{l'}\Sigma\left[\int_0^{l'}\cos\frac{n'\pi y'}{l'}f(x',y')dy'\right]\cos\frac{n'\pi y}{l'};$$

d'où l'on conclura

$$\begin{aligned}f(x,y)=&\frac{1}{ll'}\int_0^l\int_0^{l'}f(x',y')dx'dy'\\&+\frac{2}{ll'}\Sigma\left[\int_0^l\int_0^{l'}\cos\frac{n\pi x'}{l}f(x',y')dx'dy'\right]\cos\frac{n\pi x}{l}\\&+\frac{2}{ll'}\Sigma\left[\int_0^l\int_0^{l'}\cos\frac{n'\pi y'}{l'}f(x',y')dx'dy'\right]\cos\frac{n'\pi y}{l'}\\&+\frac{4}{ll'}\Sigma\Sigma\left[\int_0^l\int_0^{l'}\cos\frac{n\pi x'}{l}\cos\frac{n'\pi y'}{l'}f(x',y')dx'dy'\right]\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n'\pi y}{l'}.\end{aligned}$$

Les quantités $l$ et $l'$ sont des constantes données; $n$ et $n'$ sont des nombres entiers et positifs, auxquels se rapportent les sommes $\Sigma$ qui s'étendent depuis l'unité jusqu'à l'infini. L'équation a lieu pour toutes les valeurs de $x$ et $y$, depuis $x=0$ et $y=0$, jusqu'à $x=l$ et $y=l'$, en y comprenant les valeurs extrêmes. Si l'on fût parti d'une équation qui n'ait pas lieu, comme l'équation (9), pour les valeurs extrêmes, il faudrait ajouter à la formule définitive une partie complémentaire, facile à déterminer d'après ce qu'on a vu dans le nº 99. On pourrait aussi obtenir des formules qui exprimeraient une fonction $f(x,y)$ entre des limites relatives à l'une des variables, données en fonctions de l'autre variable, et entre des valeurs de cette seconde variable, qui seraient des constantes

aussi données; en sorte que $f(x, y)$ étant l'ordonnée d'une surface dont $x$ et $y$ sont les deux autres coordonnées courantes, cette fonction $f(x, y)$ se trouverait représentée pour tous les points d'une portion de la surface dont la projection sur le plan des $x$ et $y$ serait terminée par une courbe donnée. Mais quand il s'agit de représenter par une série de quantités périodiques une fonction arbitraire de deux variables, dans une étendue limitée des valeurs de ces variables, il vaut mieux exprimer cette fonction par une série de certaines fonctions de deux angles, qui est plus appropriée aux questions où l'on en fait usage, et qui nous reste actuellement à considérer.

# CHAPITRE VIII.

*Suite de la digression sur la manière de représenter les fonctions arbitraires par des séries de quantités périodiques.*

(105). Supposons qu'on ait décrit une surface sphérique dont le rayon soit égal à l'unité, et menons par le centre trois axes rectangulaires. Soit $\theta$ l'angle compris entre le rayon d'un point quelconque de cette surface et l'un de ces trois axes; projetons ce rayon sur le plan des deux autres axes, et soit $\psi$ l'angle que fait sa projection avec l'une de ces deux droites : les coordonnées de ce point, rapportées aux trois axes fixes, seront

$$\cos\theta, \quad \sin\theta\sin\psi, \quad \sin\theta\cos\psi;$$

l'élément correspondant de la surface sphérique aura $\sin\theta d\theta d\psi$ pour expression; et pour étendre les angles $\theta$ et $\psi$ à tous les points de cette surface, il faudra leur donner toutes les valeurs comprises depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi = 2\pi$.

Désignons par $Y_n$ une fonction rationnelle, entière et du degré $n$, des trois coordonnées précédentes, qui satisfasse, en outre, à l'équation

$$\frac{d\left(\sin\theta \frac{dY_n}{d\theta}\right)}{\sin\theta d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2Y_n}{d\psi^2} + n(n+1)Y_n = 0; \quad (1)$$

en sorte que l'expression la plus générale de $Y_n$ soit une intégrale particulière de cette équation aux différences partielles, qui contiendra, comme on peut s'en assurer (*), un nombre $2n + 1$ de constantes arbitraires.

(*) *Mécanique céleste*, tome II, pages 39—45.

Cela posé, toute fonction $f(\theta, \psi)$ des deux variables $\theta$ et $\psi$ peut être représentée par une série de cette forme :

$$f(\theta, \psi) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n + \text{etc.}, \qquad (2)$$

pour toutes les valeurs de $\theta$ et $\psi$ renfermées entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$, pourvu que cette fonction ne devienne point infinie entre ces mêmes limites.

Ce théorème est d'une grande importance par les nombreuses applications qu'on en a faites dans la mécanique céleste, dans la théorie de la chaleur et dans d'autres questions de Physique et de Mécanique. La démonstration que j'en ai donnée dans plusieurs mémoires, et que je vais reproduire ici, me semble propre à dissiper tous les doutes que l'on avait élevés sur sa généralité.

(106). Cette démonstration est fondée sur un autre théorème dont voici l'énoncé.

Soit, pour abréger,

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi') = p;$$

soit ensuite

$$X = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\alpha^2)f(\theta', \psi')\sin\theta' d\theta' d\psi'}{(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$\alpha$ désignant une constante positive qui peut différer aussi peu qu'on voudra de l'unité, et le radical $\sqrt{1 - 2\alpha p + \alpha^2}$, qui se trouve au dénominateur, étant aussi regardé comme une quantité positive dans toute l'étendue des intégrations : la limite de X relative à $\alpha$, c'est-à-dire, la valeur de X qui a lieu quand la différence $1 - \alpha$ devient infiniment petite, sera

$$X = \pm f(\theta, \psi),$$

pour toutes les valeurs de $\theta$ et $\psi$ comprises entre les limites des intégrations; le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu selon que l'on a $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$. La démonstration de ce second théorème repose sur les mêmes principes que celle du n° 93.

En effet, le coefficient de $d\theta' d\psi'$, sous le double signe $\int\int$, de-

vient infiniment petit en même temps que $1-\alpha$, excepté lorsque $p$ diffère infiniment peu de l'unité, ce qui rend aussi infiniment petit le dénominateur de ce coefficient. Or, d'après les limites où sont renfermées $\theta'$ et $\psi'$, et entre lesquelles on suppose comprises les valeurs de $\theta$ et $\psi$, on ne peut avoir $p=1$, à moins qu'on n'ait $\theta'=\theta$, $\psi'=\psi$; donc, en faisant $\theta'=\theta+y$, $\psi'=\psi+z$, il suffira d'étendre les intégrations à des valeurs infiniment petites, positives ou négatives, de $y$ et $z$, pour obtenir la partie de l'intégrale double qui peut ne pas devenir infiniment petite en même temps que la différence $1-\alpha$. Mais en traitant ces nouvelles variables $y$ et $z$ comme des quantités infiniment petites, nous aurons

$$1-p=\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{2}z^2\sin^2\theta.$$

De plus, si l'on suppose $\alpha<1$, que l'on désigne par $g$ une quantité infiniment petite et positive, et que l'on fasse $1-\alpha=g$, on aura aussi

$$1-2\alpha p+\alpha^2=g^2+y^2+z^2\sin^2\theta,$$
$$(1-\alpha^2)f(\theta',\psi')\sin\theta'=2gf(\theta,\psi)\sin\theta.$$

Au moyen de ces valeurs, nous aurons donc

$$\mathrm{X}=\frac{f(\theta,\psi)}{2\pi}\iint\frac{g\sin\theta\,dy\,dz}{(g^2+y^2+z^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}};$$

et maintenant les intégrations s'effectueront sans difficulté.

L'intégrale relative à $z$ étant infiniment petite pour toutes les valeurs finies de la variable, nous pourrons l'étendre, sans altérer sa valeur, depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$; alors, si l'on fait

$$z\sin\theta=z'\sqrt{g^2+y^2},\quad \sin\theta\,dz=\sqrt{g^2+y^2}\,dz',$$

les limites relatives à $z'$ seront toujours $\pm\infty$, et l'on aura

$$\mathrm{X}=\frac{f(\theta,\psi)}{2\pi}\int\frac{g\,dy}{g^2+y^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{f(\theta,\psi)}{\pi}\int\frac{g\,dy}{g^2+y^2}.$$

D'après ce que la constante $g$ représente, l'intégrale relative à $y$ est

aussi indépendante des limites qu'on lui attribuera; car, en désignant par $h$ une quantité positive et d'une grandeur finie, et intégrant depuis $y = -h$ jusqu'à $y = h$, on aura

$$\int \frac{g\,dy}{g^2 + y^2} = 2\,\text{arc}\left(\text{tang}\,\frac{h}{g}\right);$$

quantité égale à $\pi$, puisque $g$ est un infiniment petit, et, conséquemment, $\frac{h}{g} = \infty$.

Nous aurons donc finalement

$$X = f(\theta, \psi),$$

pour la limite de $X$ relative à la différence $1 - \alpha$ infiniment petite, quand on suppose $\alpha < 1$; et l'on trouverait de même $-f(\theta, \psi)$ pour cette limite, dans le cas de $\alpha > 1$; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Le principe essentiel de cette démonstration consiste en ce que l'on considère la fonction $f(\theta', \psi')$ comme constante dans l'étendue des valeurs de $\theta'$ et $\psi'$, infiniment peu différentes de $\theta$ et $\psi$, et pour lesquelles l'intégrale représentée par $X$ ne s'évanouit pas avec la différence $1 - \alpha$. Cela résulte effectivement de ce que, par hypothèse, la fonction $f(\theta', \psi')$ ne devient pas infinie entre les limites de l'intégrale double; en sorte que si l'on fait

$$f(\theta', \psi') = f(\theta, \psi) + \zeta,$$

$\zeta$ sera une quantité qui deviendra infiniment petite, quand les différences $\theta' - \theta$ et $\psi' - \psi$ le seront l'une et l'autre. De cette manière, on aura

$$X = \frac{f(\theta, \psi)}{2\pi} \iint \frac{(1 - \alpha^2) \sin \theta' d\theta' d\psi'}{(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\pi} \iint \frac{(1 - \alpha^2)\, \zeta \sin \theta' d\theta' d\psi'}{(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lorsque $\alpha$ différera infiniment peu de l'unité, il suffira, comme on l'a dit plus haut, d'étendre les intégrations à des valeurs infiniment petites de $\theta' - \theta$ et $\psi' - \psi$. La plus grande valeur de $\zeta$, dans cette étendue, sera elle-même infiniment petite; et si nous la désignons

par $\epsilon$, la seconde intégrale double sera moindre que

$$\epsilon \iint \frac{(1-\alpha^2)\sin\theta' d\theta' d\psi'}{(1-2\alpha p+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

par conséquent, on pourra la négliger comme infiniment petite par rapport à la première; ce qui revient à regarder $f(\theta', \psi')$ comme une constante égale à $f(\theta, \psi)$, ainsi que nous l'avons pratiqué ici et dans tous les cas semblables. Nous faisons cette observation pour répondre à une objection que l'on avait élevée contre l'exactitude de notre analyse.

(107). Avant de conclure de ce théorème celui du nº 104, il est bon de remarquer que la limite de la quantité X n'est plus égale à $\pm f(\theta, \psi)$, lorsqu'on donne à $\theta$ ou à $\psi$ l'une de ses valeurs extrêmes, et de chercher ce que devient cette limite pour chacune de ces valeurs.

Si l'on a $\psi = 0$, il y aura deux valeurs $\psi' = 0$ et $\psi' = 2\pi$, telles qu'en les prenant avec $\theta' = \theta$, la quantité $p$ sera égale à l'unité. Pour avoir alors la valeur complète de X, qui a lieu quand la différence $1-\alpha$ est infiniment petite, on devra donc faire successivement $\psi' = z$ et $\psi' = z + 2\pi$; mais comme la variable $\psi'$ doit toujours être positive et ne pas dépasser $2\pi$, il faudra, dans le premier cas, n'attribuer à $z$ que des valeurs positives, et, dans le second, ne lui donner que des valeurs négatives. Il en résulte que dans le calcul du numéro précédent, on devra seulement intégrer depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$ dans le cas de $\psi' = z$, et depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = 0$ dans le cas de $\psi' = z + 2\pi$; ce qui réduira, dans ces deux cas, à la moitié de sa valeur précédente l'intégrale relative à $z$; et de là on conclut que pour la valeur particulière $\psi = 0$ la limite de la valeur de X sera

$$X = \pm \tfrac{1}{2}[f(\theta, 0) + f(\theta, 2\pi)].$$

On verra pareillement que cette limite sera encore la même pour l'autre valeur extrême $\psi = 2\pi$.

Dans le cas de $\theta = 0$, on a $p = \cos\theta'$, et, conséquemment,

$$X = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{f(\theta', \psi')(1-\alpha^2)\sin\theta' d\theta'}{(1-2\alpha\cos\theta'+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right]d\psi'.$$

Mais, lorsque $\alpha$ diffère infiniment peu de l'unité, l'intégrale relative à $\theta'$ n'a de valeur que quand la variable est infiniment petite; ce qui permet de faire $\theta'=0$ dans $f(\theta', \psi')$, et de conserver, néanmoins, les limites $\theta'=0$ et $\theta'=\pi$ de cette intégrale. La formule précédente se changera donc en celle-ci :

$$X = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \psi')\,d\psi' \int_0^{\pi} \frac{(1-\alpha^2)\sin\theta' d\theta'}{(1-2\alpha\cos\theta'+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, quelle que soit la constante $\alpha$, on a

$$\int \frac{(1-\alpha^2)\sin\theta' d\theta'}{(1-2\alpha\cos\theta'+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1-\alpha^2}{\alpha\sqrt{1-2\alpha\cos\theta'+\alpha^2}} + C;$$

C étant la constante arbitraire. Aux deux limites $\theta'=0$ et $\theta'=\pi$, le radical a pour valeur $\pm(1-\alpha)$ et $\pm(1+\alpha)$; et comme il doit toujours être une quantité positive, il faudra prendre $1+\alpha$ à la limite $\theta'=\pi$, et, selon qu'on aura $\alpha<1$ ou $\alpha>1$, on prendra $1-\alpha$ ou $\alpha-1$ à la limite $\theta'=0$; d'où l'on conclut, en passant à l'intégrale définie,

$$\int_0^{\pi} \frac{(1-\alpha^2)\sin\theta' d\theta'}{(1-2\alpha\cos\theta'+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = 2, \quad \text{ou} \quad = -\frac{2}{\alpha},$$

selon que la différence quelconque $1-\alpha$ sera positive ou négative. Par conséquent, la valeur de X, qui a lieu quand cette différence devient infiniment petite, sera

$$X = \pm\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \psi')d\psi'.$$

On trouvera de même

$$X = \pm\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\pi, \psi')\,d\psi',$$

pour cette limite de X, dans le cas de $\theta=\pi$.

Ainsi, abstraction faite du signe, la limite de X qui répond aux valeurs extrêmes $\psi=0$ et $\psi=2\pi$, est la demi-somme des valeurs correspondantes de $f(\theta, \psi)$, et la limite de la même quantité, qui a lieu pour chacune des valeurs extrêmes $\theta=0$ ou $\theta=\pi$, est la moyenne des valeurs de $f(0, \psi')$ ou de $f(\pi, \psi')$, depuis $\psi'=0$ jusqu'à $\psi'=2\pi$. Pour que la limite $X=\pm f(\theta, \psi)$, ou le théorème du numéro précédent, convienne à ces valeurs extrêmes de

$\psi$ et $\theta$, il faudra donc qu'on ait $f(\theta, 0) = f(\theta, 2\pi)$, et que la fonction $f(\theta, \psi)$ soit indépendante de $\psi$, pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$.

Dans l'étendue des valeurs de $\theta$ et $\psi$ où ce théorème subsiste, la fonction $f(\theta, \psi)$ pourra être continue ou discontinue; mais si elle a, par exemple, une certaine forme depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \theta_{,}$, et une autre depuis $\theta = \theta_{,}$ jusqu'à $\theta = \pi$, et si les deux valeurs de $f(\theta, \psi)$ qui répondent à $\theta = \theta_{,}$, ne sont point égales, on s'assurera aisément, par l'analyse précédente, que pour cette valeur particulière de $\theta$ la limite de X sera la demi-somme de ces deux valeurs inégales de $f(\theta, \psi)$. Il en sera de même relativement à l'autre variable $\psi$.

(108). Maintenant, soit

$$\rho = (1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Supposons $\alpha > 0$ et $< 1$, et développons suivant les puissances de $\alpha$; nous aurons

$$\rho = 1 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \alpha^3 P_3 + \ldots + \alpha^n P_n + \text{etc.};$$

$P_n$ étant une fonction de $p$, rationnelle, entière et du degré $n$, qui a pour expression

$$P_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}\left(p^n - \frac{n.n-1}{2.2n-1}p^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}p^{n-4} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{2.4.6.2n-1.2n-3.2n-5}p^{n-6} + \text{etc.}\right), \quad (3)$$

comme il est facile de s'en assurer, en développant d'abord la quantité $\rho$ par la formule du binome, suivant les puissances de $2p\alpha - \alpha^2$, et ensuite les termes de ce premier développement suivant les puissances de $\alpha$.

D'après ce que $p$ représente (n° 106), on peut regarder cette quantité comme le cosinus d'un certain angle, de sorte que $p$ ne peut jamais surpasser $\pm 1$. Dans le cas de $p = \pm 1$, on a

$$\rho = \frac{1}{1 \pm \alpha}, \quad P_n = \pm 1;$$

or, je dis que pour toute autre valeur de $p$, le coefficient $P_n$ est moindre que l'unité, abstraction faite du signe (*).

(*) *Exercices de Calcul intégral*, tome II, page 248.

Faisons, en effet,

$$p = \cos\omega, \quad e^{\omega\sqrt{-1}} = \beta, \quad e^{-\omega\sqrt{-1}} = \gamma;$$

$e$ étant la base des logarithmes népériens, et $\omega$ un angle réel. Nous aurons alors

$$\rho = (1 - \beta\alpha)^{-\frac{1}{2}} (1 - \gamma\alpha)^{-\frac{1}{2}}.$$

En développant ces deux facteurs de $\rho$ par la formule du binome, on voit que $\rho$ sera le produit des deux séries

$$1 + \frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2\beta^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3\beta^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\alpha^4\beta^4 + \text{etc.},$$

$$1 + \frac{1}{2}\alpha\gamma + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2\gamma^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3\gamma^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\alpha^4\gamma^4 + \text{etc.},$$

qui sont convergentes, puisqu'on suppose $\alpha < 1$; et si l'on multiplie ces deux séries l'une par l'autre, que l'on prenne la somme des termes du produit qui auront $\alpha^n$ pour facteur, et que l'on fasse disparaître les imaginaires, le coefficient de $\alpha^n$ ou $P_n$ sera évidemment de la forme :

$$P_n = A\cos n\omega + B\cos(n-2)\omega + C\cos(n-4)\omega + \text{etc.};$$

A, B, C, etc., étant des quantités positives et indépendantes de $\omega$. Par conséquent, la plus grande valeur de $P_n$ répondra à $\omega = 0$ ou $p = 1$, et ne surpassera pas l'unité.

Il résulte de là que le développement de $\rho$ sera une série convergente, quelle que petite que soit la différence $1 - \alpha$; condition indispensable pour qu'on puisse employer cette série à la place de $\rho$ dans les calculs suivans.

Observons aussi que la quantité $P_n$ est un cas particulier de celle que nous avons désignée généralement par $Y_n$ dans le n° 105. En effet, après avoir mis $\cos\omega$ à la place de $p$, si l'on différentie le produit $\alpha\rho$ par rapport à $\omega$ et à $\alpha$, on en conclura, sans difficulté,

$$\frac{d^2.\alpha\rho}{d\alpha^2} + \frac{d\left(\sin\omega\frac{d.\alpha\rho}{d\omega}\right)}{\alpha^2 \sin\omega d\omega} = 0;$$

et si l'on substitue dans le premier membre de cette équation, à la

28..

place de $\rho$, son développement, et que l'on égale ensuite à zéro le coefficient de $\alpha^{n-1}$ dans ce premier membre, on aura

$$\frac{d\left(\sin\omega\frac{dP_n}{d\omega}\right)}{\sin\omega d\omega} + n(n+1)P_n = 0.$$

Or, en comparant ce résultat à l'équation (1), on voit que $P_n$ devra se déduire de la quantité $Y_n$, en supposant cette fonction indépendante de l'angle $\psi$, et y mettant $\omega$ à la place de $\theta$.

(109). Il est facile de démontrer actuellement le théorème du n° 105.

En effet, on a identiquement

$$\rho + 2\alpha\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha p+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

au moyen de quoi la quantité X peut s'écrire sous cette forme :

$$X = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\rho + 2\alpha\frac{d\rho}{d\alpha}\right)f(\theta', \psi')\sin\theta' d\theta' d\psi'.$$

En y substituant pour $\rho$ son développement, on aura donc

$$X = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[1 + 3\alpha P_1 + 5\alpha^2 P_2 + 7\alpha^3 P_3 + \ldots$$
$$\ldots + (2n+1)\alpha^n P_n + \text{etc.}]f(\theta', \psi')\sin\theta' d\theta' d\psi';$$

et cette quantité X se trouvera ainsi développée suivant les puissances de $\alpha$. Or, dans ce développement, le coefficient de $\alpha^n$ est, aussi bien que $P_n$, une quantité de la même nature que $Y_n$; en prenant donc

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}P_n f(\theta', \psi')\sin\theta' d\theta' d\psi', \qquad (4)$$

et supposant que $\alpha$ diffère infiniment peu de l'unité, nous aurons

$$X = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n + \text{etc.};$$

mais, à cette limite, la valeur de X est $f(\theta, \psi)$, d'après le théorème du n° 106; cette dernière équation n'est donc autre chose que l'équation (2) qu'il s'agissait de démontrer.

Pour que l'équation (2) s'applique aux limites mêmes des valeurs de $\theta$ et $\psi$, pour lesquelles elle a lieu, il faudra qu'on ait $f(\theta, o) = f(\theta, 2\pi)$, et que les valeurs de $f(o, \psi)$ et $f(\pi, \psi)$ soient indépendantes de $\psi$. Quand ces conditions ne seront pas remplies, on devra modifier l'équation (2), relativement aux valeurs extrêmes de $\theta$ et $\psi$, d'après ce qu'on a trouvé dans le n° 107. Lorsque $f(\theta, \psi)$ sera une fonction continue et d'une forme donnée, si l'on veut étendre l'équation (2) au-delà de ces limites de $\theta$ et $\psi$, on fera

$$\theta = m\pi + u, \quad \psi = 2m'\pi + v;$$

$m$ et $m'$ étant deux nombres entiers et positifs, et en désignant par $u$ et $v$ des variables positives, telles que l'on ait $u < \pi$ et $v < 2\pi$. En substituant ces quantités à la place de $\theta$ et $\psi$ dans l'expression donnée de $f(\theta, \psi)$, elle se changera en une fonction de $u$ et $v$, et des deux nombres $m$ et $m'$, à laquelle on pourra appliquer l'équation (2).

Si l'on différentie cette équation, soit par rapport à $\theta$, soit par rapport à $\psi$, on en déduira deux autres formules qui auront lieu dans la même étendue des valeurs de $\psi$ et $\theta$, et qui subsisteront aux limites mêmes de ces valeurs, lorsque certaines conditions seront remplies, outre celles qui sont nécessaires pour que l'équation (2) convienne à ces limites. Je me borne ici à indiquer ces deux autres formules, que l'on trouvera dans mon mémoire sur l'*Attraction des Sphéroïdes* (*).

(110). Toutes les fois que $f(\theta, \psi)$ sera une fonction rationnelle et entière de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\sin\psi$, comme les quantités de la nature de $Y_n$, son développement en série de quantités de cette espèce ne renfermera qu'un nombre fini de termes, et il sera facile à former dans chaque cas particulier. Au contraire, quand $f(\theta, \psi)$ sera d'une autre forme, ou bien quand elle sera une fonction discontinue, la série (2) se prolongera à l'infini; et, pour en calculer les termes successifs, il faudra recourir à la formule (4). Or, à cause du facteur $2n+1$ de cette formule, on pourrait craindre que les termes de la série (2) n'allassent en croissant, et que la sé-

(*) *Connaissance des Tems*, année 1829, page 329.

rie ne fût divergente, auquel cas on ne pourrait plus s'en servir pour représenter la fonction $f(\theta, \psi)$; mais, par une transformation convenable, on peut prouver que les termes très éloignés des premiers décroissent de plus en plus à mesure que l'indice $n$ augmente, et deviennent nuls quand ce nombre est infini.

En effet, pour plus de généralité, considérons l'intégrale double

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y'_n f(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi',$$

dans laquelle $Y'_n$ représente ce que devient la fonction $Y_n$ du n° 105, lorsqu'on y met $\theta'$ et $\psi'$ au lieu de $\theta$ et $\psi$, et peut, en outre, renfermer, d'une manière quelconque, ces angles $\theta$ et $\psi$, qui seront regardés comme des constantes données. Cette fonction $Y'_n$, et, par suite, cette intégrale, comprendront, comme cas particulier, la quantité $P_n$ et l'intégrale contenue dans la formule (4). En vertu de l'équation (1), on aura

$$Y'_n \sin\theta' = -\frac{1}{n(n+1)} \frac{d\left(\sin\theta' \frac{dY'_n}{d\theta'}\right)}{d\theta'} - \frac{1}{n(n+1)\sin\theta'} \frac{d^2Y'_n}{d\psi'^2}.$$

L'intégration par partie donne

$$\int \frac{d\left(\sin\theta' \frac{dY'_n}{d\theta'}\right)}{d\theta'} f(\theta', \psi')\, d\theta' = \frac{dY'_n}{d\theta'} \sin\theta' f(\theta', \psi')$$
$$- Y'_n \sin\theta' \frac{df(\theta', \psi')}{d\theta'} + \int Y'_n \frac{d\left(\sin\theta' \frac{df(\theta', \psi')}{d\theta'}\right)}{d\theta'} d\theta';$$

aux limites $\theta' = 0$ et $\theta' = \pi$, les quantités comprises hors du signe $\int$ s'évanouissent; on aura donc simplement

$$\int_0^\pi \frac{d\left(\sin\theta' \frac{dY'_n}{d\theta'}\right)}{d\theta'} f(\theta', \psi')\, d\theta' = \int_0^\pi Y'_n \frac{d\left(\sin\theta' \frac{df(\theta', \psi')}{d\theta'}\right)}{d\theta'} d\theta'.$$

L'intégration par partie donne également

$$\int \frac{d^2Y'_n}{d\psi'^2} f(\theta', \psi')\, d\psi' = \frac{dY'_n}{d\psi'} f(\theta', \psi') - Y'_n \frac{df(\theta', \psi')}{d\psi'}$$
$$+ \int Y'_n \frac{d^2f(\theta', \psi')}{d\psi'^2} d\psi';$$

chacune des quantités $Y'_n$ et $\frac{dY'_n}{d\psi'}$ a des valeurs égales, aux limites $\psi'=0$ et $\psi'=2\pi$; nous supposerons qu'il en soit de même à l'égard de la fonction $f(\theta', \psi')$ et de son coefficient différentiel $\frac{df(\theta', \psi')}{d\psi'}$; cela étant, les termes compris hors des signes $\int$ seront égaux, à leurs deux limites, et disparaîtront conséquemment en passant à l'intégrale définie; en sorte que l'on aura simplement

$$\int_0^{2\pi} \frac{d^2Y'_n}{d\psi'^2}\, f(\theta', \psi')\, d\psi' = \int_0^{2\pi} Y'_n \frac{d^2f(\theta', \psi')}{d\psi'^2}\, d\psi'.$$

D'après cela, si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{d\left(\sin\theta' \frac{df(\theta', \psi')}{d\theta'}\right)}{d\theta'} + \frac{d^2f(\theta', \psi')}{\sin\theta'\, d\psi'^2} = F(\theta', \psi'),$$

on conclura de toutes ces valeurs

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y'_n f(\theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi' = -\frac{1}{n(n+1)} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y'_n F(\theta', \psi') d\theta' d\psi'; \quad (5)$$

transformation remarquable qui s'applique à l'équation (4) et qui nous servira aussi tout à l'heure à un autre usage.

Maintenant, si l'on met dans cette équation (5) $P_n$ à la place de $Y'_n$, on pourra changer l'équation (4) en celle-ci :

$$Y_n = -\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n F(\theta', \psi') d\theta' d\psi'.$$

Or, la plus grande valeur de $P_n$ est l'unité en plus ou en moins; généralement, la fonction $F(\theta', \psi')$ ne deviendra pas infinie entre les limites de l'intégration, si ce n'est aux limites même $\theta'=0$ et $\theta'=\pi$, à raison du dénominateur de son second terme; mais je supposerai qu'à ces limites la fonction est indépendante de l'angle $\psi'$, ce qui fera disparaître les valeurs correspondantes de ce second terme. En désignant donc par $k$ la plus grande valeur de $F(\theta', \psi')$, abstraction faite du signe, $k$ sera une quantité finie, et nous aurons, aussi en grandeur absolue,

$$Y_n < \frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)} k;$$

d'où l'on conclut que quand le nombre $n$ sera très grand, les valeurs

de $Y_n$ diminueront de plus en plus, à mesure que leurs indices augmenteront encore davantage, et qu'elles seront nulles pour $n=\infty$; ce qu'il s'agissait de faire voir.

(111). Mettons, dans l'équation (5), $\theta$ et $\psi$ au lieu de $\theta'$ et $\psi'$, et prenons pour la fonction arbitraire $f(\theta, \psi)$, une fonction $Z_{n'}$ de la même nature que $Y_n$, mais correspondante à un indice $n'$ différent de $n$; nous aurons d'abord

$$F(\theta,\psi)=\frac{d\left(\sin\theta\frac{dZ_{n'}}{d\theta}\right)}{d\theta}+\frac{d^2Z_{n'}}{\sin\theta\, d\psi^2},$$

et, par conséquent,

$$F(\theta,\psi)=-n'(n'+1)Z_{n'}\sin\theta,$$

en vertu de l'équation (1) appliquée à cette fonction $Z_{n'}$. L'équation (5) deviendra donc

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y_nZ_{n'}\sin\theta d\theta d\psi=\frac{n'(n'+1)}{n(n+1)}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y_nZ_{n'}\sin\theta d\theta d\psi;$$

elle sera identique dans le cas de $n'=n$; mais ces deux nombres étant supposés inégaux, il faudra qu'on ait

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y_n\, Z_{n'}\sin\theta d\theta d\psi=0; \qquad (6)$$

propriété très importante des quantités de la nature de $Y_n$ ou $Z_{n'}$, qui se démontre, comme on voit, indépendamment de la forme de ces fonctions, et d'après la seule considération de l'équation (1) qui sert à les définir.

Lorsque les nombres $n$ et $n'$ sont égaux, l'intégrale double que nous considérons pourra toujours s'obtenir sous forme finie par les règles ordinaires; mais sa valeur est très simple et peut s'exprimer d'une manière générale, dans le cas où l'une des deux fonctions comprises sous le signe $\iint$ est la fonction particulière $P_n$.

Pour cela, je change, dans l'équation (4), $\theta$ et $\psi$ en $\theta'$ et $\psi'$, et réciproquement; $p$ étant symétrique par rapport à $\theta$ et $\theta'$, ainsi qu'à $\psi$ et $\psi'$, ne changera pas, non plus que $P_n$; en désignant par $Y'_n$ ce que $Y_n$ deviendra, on aura donc

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_nf(\theta,\psi)\sin\theta d\theta d\psi=\frac{4\pi}{2n+1}Y'_n.$$

Je substitue la série (2) à la place de $f(\theta, \psi)$; puisque la quantité $P_n$ est de la même nature que $Y_n$, on aura, en vertu de l'équation (6),

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_n Y_{n'} \sin\theta d\theta d\psi = 0,$$

tant que les indices $n$ et $n'$ seront inégaux; tous les termes du premier membre de l'équation précédente s'évanouiront donc, excepté celui qui répondra à $n' = n$; par conséquent, on aura

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_n Y_n \sin\theta d\theta d\psi = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n. \qquad (7)$$

(112). C'est sur les propriétés des termes de la série (2), exprimées par ces équations (6) et (7), que sont fondés les nombreux usages que l'on fait de cette série. La première conséquence que l'on en déduit consiste en ce qu'une même fonction $f(\theta, \psi)$ ne peut être représentée que d'une seule manière par une série de cette nature, pour toutes les valeurs de $\theta$ et $\psi$ comprises entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$. En effet, supposons que par des moyens quelconques on ait trouvé ces deux expressions

$$f(\theta, \psi) = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \text{etc.},$$
$$f(\theta, \psi) = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n + \text{etc.},$$

en séries convergentes, dont les termes généraux $U_n$ et $V_n$ sont des fonctions de la nature de $Y_n$; entre les limites des valeurs de $\theta$ et $\psi$, il faudra que ces deux séries soient égales; or, si on les multiplie par $P_n \sin\theta d\theta d\psi$, et que l'on intègre ensuite depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi = 2\pi$, on aura, en vertu de l'équation (6),

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_n U_{n'} \sin\theta d\theta d\psi = 0, \quad \int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_n V_{n'} \sin\theta d\theta d\psi = 0,$$

tant que les indices $n$ et $n'$ seront différens; il en résultera donc

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_n U_n \sin\theta d\theta d\psi = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_n V_n \sin\theta d\theta d\psi;$$

et d'après l'équation (7), on en conclura $U_n = V_n$; en sorte que les deux séries seront identiques.

Il n'en serait pas de même si la fonction donnée était représentée, comme dans le chapitre précédent, par une série de sinus et de cosinus des multiples de $\theta$ et $\psi$ : une même fonction, pour une étendue donnée des valeurs de chaque variable, peut être exprimée sous cette forme de beaucoup de manières différentes; et quand on est parvenu à une équation dont les deux membres sont de telles séries, on n'en peut pas conclure, en général, que les termes semblables soient égaux de part et d'autre; égalité qui a toujours lieu, au contraire, pour les séries ordonnées suivant les quantités de la nature de $Y_n$.

(113). Au moyen des équations (6) et (7), on peut aussi obtenir immédiatement sous forme finie, la valeur de toute intégrale double Q, de la forme :

$$Q = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Y_n \sin\theta d\theta d\psi}{\sqrt{1 - 2\alpha p + \alpha^2}};$$

$\alpha$ étant une constante donnée, $p$ désignant la même quantité que dans le n° 106, et le radical étant supposé positif dans toute l'étendue de l'intégration. Selon qu'on aura $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$, abstraction faite du signe, on développera $(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ en série convergente, ordonnée suivant les puissances positives ou négatives de $\alpha$; le coefficient de $\alpha^n$ dans le premier cas, ou de $\alpha^{-n-1}$ dans le second, sera toujours la quantité $P_n$ du n° 108; d'où l'on conclut, en vertu des équations (6) et (7),

$$Q = \frac{4\pi\alpha^n}{2n+1} Y'_n,$$

dans le cas de $\alpha < 1$, et

$$Q = \frac{4\pi}{(2n+1)\alpha^{n+1}} Y'_n,$$

dans le cas de $\alpha > 1$.

Si l'indice $n$ est zéro, $Y'_n$ sera une constante; et en la désignant par $a$, il en résultera

$$Q = 4\pi a, \quad \text{ou} \quad Q = \frac{4\pi a}{\alpha},$$

selon qu'on aura $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$; résultat qu'on peut vérifier au

moyen d'un théorème sur la réduction des intégrales doubles à des intégrales simples, auquel je suis parvenu par des considérations géométriques.

D'après ce théorème, on a

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi p.\sin\theta d\theta d\psi = 2\pi\int_{-1}^{+1}\varphi p dp,$$

quelle que soit la fonction $\varphi p$. Relativement à l'intégrale Q, on aura donc

$$Q = 2\pi a\int_{-1}^{+1}\frac{dp}{\sqrt{1-2\alpha p+\alpha^2}},$$

dans le cas de $Y_n = a$. En effectuant l'intégration relative à $p$, il vient

$$Q = \frac{2\pi a}{\alpha}\left[\sqrt{(1+\alpha)^2} - \sqrt{(1-\alpha)^2}\right].$$

Le radical devant toujours être positif, si l'on suppose, pour fixer les idées, que la constante $\alpha$ soit aussi positive, il faudra toujours prendre $1+\alpha$ pour la valeur de $\sqrt{(1+\alpha)^2}$; et selon qu'on aura $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$, il faudra prendre $1-\alpha$ ou $\alpha - 1$ pour celle de $\sqrt{(1-\alpha)^2}$; d'où il résultera

$$Q = 4\pi a, \quad \text{ou} \quad Q = \frac{4\pi a}{\alpha};$$

valeurs qui coïncident avec celles que l'on obtient par le développement en série.

La différence des deux valeurs de Q provient, comme on voit, de la nécessité d'une série convergente, quand on développe le radical; ou bien, lorsqu'on intègre directement sous forme finie, elle résulte de ce que le radical doit conserver le même signe dans toute l'étendue de l'intégration, y compris les limites $p = \pm 1$.

Si la constante $\alpha$ diffère infiniment peu de l'unité, les deux valeurs de Q diffèrent aussi infiniment peu l'une de l'autre; mais il n'en est pas de même à l'égard des valeurs de $\frac{dQ}{d\alpha}$. En différentiant par rapport

à $\alpha$ les valeurs de Q, on en déduit

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(\alpha - p)\,dp}{(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad \text{ou} = \frac{2}{\alpha^2},$$

selon qu'on suppose $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$; et ces deux valeurs sont, comme on voit, très différentes l'une de l'autre, à la limite où la différence $1 - \alpha$ devient infiniment petite. Ce paradoxe tient à ce qu'à cette limite une variation infiniment petite dans la valeur de $\alpha$ suffit pour produire un changement brusque, c'est-à-dire, une variation de grandeur finie dans la valeur de l'intégrale. Dans le cas où l'on aurait rigoureusement $\alpha = 1$, la valeur de cette intégrale serait la moyenne des deux valeurs précédentes, ou de zéro et 2; et, en effet, on a alors

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(\alpha - p)\,dp}{(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{dp}{\sqrt{1 - p}} = 1.$$

Au reste, il existe beaucoup d'autres intégrales définies renfermant une constante sous le signe $\int$, qui ont des valeurs très différentes, selon que cette constante, comme ici la différence $1 - \alpha$, est positive ou négative, quoiqu'elle soit infiniment petite, et qui prennent une valeur moyenne, quand cette constante est rigoureusement nulle. C'est ainsi que l'on a, par exemple,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} = \frac{1}{2}\pi, \ = 0, \ = -\frac{1}{2}\pi,$$

selon que la constante $b$ est $< 0$, $= 0$, $> 0$, et quelque valeur qu'elle ait, finie ou infiniment petite, dans le premier et le dernier cas.

(114). Si $u$ est une quantité relative aux différens points d'un corps A, leur température par exemple, cette quantité pourra être considérée comme une fonction des trois coordonnées polaires d'un point quelconque, c'est-à-dire, de son rayon vecteur, que j'appellerai $r$, et des deux angles $\theta$ et $\psi$ du n° 105, qui déterminent la direction de $r$, de sorte que l'on aura

$$u = F(r, \theta, \psi).$$

De plus, si l'origine de ces coordonnées polaires est un point pris dans l'intérieur de A, il suffira, pour appliquer cette fonction à tous les points de ce corps, d'étendre les valeurs de $r$ depuis $r=0$ jusqu'au rayon d'un point quelconque de la surface, qui sera donné, pour chaque corps, en fonction de $\theta$ et $\psi$, et les valeurs de ces angles depuis $\theta=0$ et $\psi=0$ jusqu'à $\theta=\pi$ et $\psi=2\pi$. Or, en combinant la série (2) avec l'une des formules du chapitre précédent, on pourra toujours exprimer cette quantité $u$ en une série de quantités périodiques, applicable à tous les points de A.

Ainsi, en supposant que $l$ soit la valeur de $r$ qui répond à la surface de ce corps, on aura, d'après la formule (9) du n° 96,

$$u=\frac{1}{l}\int_0^l \mathrm{F}(r',\theta,\psi)dr'+\frac{2}{l}\Sigma'\left[\int_0^l \cos\frac{n'\pi r'}{l}\,\mathrm{F}(r',\theta,\psi)dr'\right]\cos\frac{n'\pi r}{l},$$

depuis $r=0$ jusqu'à $r=l$ inclusivement, et pour toutes les valeurs de $\theta$ et $\psi$; la somme $\Sigma'$ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier $n'$, depuis $n'=1$ jusqu'à $n'=\infty$. En mettant $\theta'$ et $\psi'$ à la place de $\theta$ et $\psi$ dans cette série, et la substituant ensuite à la place de $f(\theta',\psi')$ dans la formule (4), on aura le terme général de la série (2). Si A est une sphère, et que l'origine des coordonnées soit placée à son centre, le rayon $l$ sera une constante; et, dans ce cas, la série (2) donnera, après cette substitution,

$$\begin{aligned}u=&\frac{1}{4\pi l}\Sigma\left[\int_0^l\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{F}(r',\theta',\psi')\sin\theta' dr'd\theta'd\psi'\right](2n+1)\mathrm{P}_n\\ &+\frac{1}{2\pi l}\Sigma\Sigma'\left[\int_0^l\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos\frac{n'\pi r'}{l}\mathrm{F}(r',\theta',\psi')\sin\theta' dr'd\theta'd\psi'\right](2n+1)\mathrm{P}_n\cos\frac{n'\pi r}{l};\end{aligned}$$

la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de $n$, y compris zéro.

Lorsqu'on supposera le rayon $l$ infini, la première partie de cette expression disparaîtra, la seconde changera de forme, et la formule conviendra à tous les points de l'espace. En faisant alors

$$\frac{n'\pi}{l}=\alpha,\quad \frac{\pi}{l}=d\alpha,$$

la somme $\Sigma'$ se changera en une intégrale relative à $\alpha$, qui s'éten-

dra depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \infty$, et l'on aura

$$u = \frac{1}{2\pi}\Sigma\left[\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F(r', \theta', \psi')\cos\alpha r'\cos\alpha r\sin\theta' d\alpha dr' d\theta' d\psi'\right].$$

La fonction $u$ ou $F(r, \theta, \psi)$ se trouve ainsi exprimée pour tous les points de l'espace par une série de quantités périodiques, dont tous les termes sont des intégrales quadruples. Par le théorème de Fourier (nº 102), étendu à une fonction $f(x, y, z)$ des trois coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$, d'un point quelconque, cette quantité $u$ ou $f(x, y, z)$ se trouverait exprimée par une intégrale sextuple, savoir :

$$u = \frac{1}{\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x', y', z')\cos\alpha(x-x')\cos 6(y-y')\cos\gamma(z-z')d\alpha d6 d\gamma dx' dy' dz'.$$

On emploiera l'une ou l'autre de ces deux expressions d'une même quantité, selon les différentes questions où l'on en devra faire usage.

(115). Le théorème du nº 106 a suffi pour démontrer celui du nº 105; mais la première de ces deux propositions est comprise dans une autre plus générale, qu'il est bon de connaître.

Soient $c$ une constante positive quelconque, et $p$ la même quantité que dans le nº 106, savoir :

$$p = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi');$$

si nous faisons

$$X = \frac{c}{\pi 2^{1+c}}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{(1-\alpha^2)^c f(\theta', \psi')\sin\theta' d\theta' d\psi'}{(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{1+\frac{1}{2}c}},$$

et que nous supposions $\alpha < 1$, pour fixer les idées, nous aurons

$$X = f(\theta, \psi),$$

à la limite où la différence $1 - \alpha$ deviendra infiniment petite; théorème qui aura lieu, comme celui du nº 106, pour toutes les valeurs de $\theta$ et $\psi$ comprises depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et $\theta = 2\pi$, et qui se démontrera absolument de la même manière,

Toutes les fois que la fonction $f(\theta', \psi')$ sera telle, que les intégrations relatives à $\theta'$ et $\psi'$ pourront s'effectuer sous forme finie par les règles ordinaires, sans attribuer à la constante $\alpha$ aucune valeur particulière, il sera possible de vérifier la valeur de X qui répond à la limite $\alpha = 1$. Pour en donner un exemple, prenons $f(\theta', \psi') = p$. En faisant $\theta' = \theta$ et $\psi' = \psi$ dans l'expression de $p$ qu'on vient de rappeler, on aura $f(\theta, \psi) = 1$; la quantité X sera

$$X = \frac{c(1 - \alpha^2)^2}{\pi 2^{1+c}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{p \sin \theta' d\theta' d\psi'}{(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{1+\frac{1}{2}c}};$$

d'après le théorème général, il faudra donc que cette quantité se réduise à l'unité pour la valeur particulière $\alpha = 1$. C'est ce qu'on vérifiera de la manière suivante.

Au lieu de l'intégrale double contenue dans X, considérons, pour plus de généralité, l'intégrale

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi p . \sin \theta' d\theta' d\psi',$$

dans laquelle $\varphi p$ est une fonction quelconque de $p$. Décrivons une surface sphérique d'un rayon égal à l'unité, par son centre menons arbitrairement un axe fixe, et par cet axe un plan fixe. Soient $\theta'$ l'angle compris entre un rayon quelconque et cet axe, $\psi'$ l'angle que fait le plan de ces deux droites avec le plan fixe, et $ds$ l'élément différentiel de la surface sphérique auquel aboutit le rayon quelconque. Les constantes $\theta$ et $\psi$ seront les valeurs de $\theta'$ et $\psi'$ qui répondent à un rayon déterminé, et $p$ exprimera le cosinus de l'angle compris entre ce rayon et celui qui répond à $\theta'$ et $\psi'$. On aura

$$ds = \sin \theta' d\theta' d\psi';$$

l'intégrale précédente se changera en celle-ci $\int\int \varphi p ds$, et elle s'étendra à tous les points de la surface sphérique. Or, l'angle dont $p$ est le cosinus et la fonction $\varphi p$ ne dépendant aucunement de la direction arbitraire de l'axe fixe à partir duquel l'angle $\theta'$ est compté, il est évident que cette dernière intégrale double en sera aussi indépendante; on peut donc, si l'on veut, faire coïncider cet axe avec le rayon qui répond aux angles $\theta$ et $\psi$; et si l'on représente alors par $\theta_,$ et $\psi_,$ ce que

deviennent les angles variables $\theta'$ et $\psi'$, il en résultera

$$p = \cos\theta_{,}, \quad ds = \sin\theta_{,} d\theta_{,} d\psi_{,} = -dp d\psi_{,}.$$

L'intégrale $\iint \varphi p ds$, étendue à la surface sphérique entière, deviendra, de cette manière,

$$\iint \varphi p ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi p . \sin\theta_{,} d\theta_{,} d\psi_{,} = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \varphi p \, dp \, d\psi_{,};$$

d'où l'on conclut

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi p . \sin\theta' d\theta' d\psi' = 2\pi \int_{-1}^{+1} \varphi p dp;$$

ce qui est le théorème cité plus haut (n° 113), au moyen duquel on réduit une classe très étendue d'intégrales doubles à des intégrales simples.

En l'appliquant à l'intégrale contenue dans l'expression de X, elle se réduira à celle-ci :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{2\pi p dp}{(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{1+\frac{1}{2}c}};$$

qui s'obtient par les règles ordinaires, quelle que soit la constante $\alpha$. De cette manière, on trouve

$$\mathrm{X} = \frac{1}{\alpha^2 2^c (c-2)} \{(1-\alpha)^c [(c-2)\alpha + (1+\alpha)^2] + (1+\alpha)^c [(c-2)\alpha - (1-\alpha)^2]\};$$

quantité qui se réduit effectivement à l'unité, dans le cas de $\alpha = 1$.



# CHAPITRE IX.

*Distribution de la chaleur dans une barre dont les dimensions transversales sont très petites.*

(116). Considérons, généralement, une barre homogène ou hétérogène, dont la section perpendiculaire à sa longueur peut varier d'un point à un autre, pourvu qu'elle soit toujours très petite; supposons-la d'abord échauffée d'une manière quelconque suivant toute sa longueur; et proposons-nous de déterminer, à un instant donné, la température qui répond à une section normale aussi donnée.

Soit EE' (fig. 13) l'axe de la barre, compris dans son intérieur, et perpendiculaire en E et E' aux deux sections planes qui la terminent. Sur le prolongement de EE', prenons un point fixe C. Soit aussi M un point quelconque de EE'; et faisons

$$CM = x, \quad CE = h, \quad CE' = h',$$

de sorte que $h' - h$, $x - h$, $h' - x$, expriment la longueur de la barre et les distances du point M à ses deux extrémités. Appelons $\omega$ l'aire de la section normale faite par le point M, et $\varepsilon$ le contour de cette section. Les dimensions de $\omega$ seront supposées très petites par rapport à sa longueur EE'; et, dans cette hypothèse, on pourra regarder la densité, la chaleur spécifique et la température comme étant sensiblement les mêmes en tous les points de chaque section normale. Nous désignerons par $\rho$ et $c$ la densité et la chaleur spécifique de la matière de la barre qui répondent au point M ou à la section $\omega$; et, au bout d'un temps quelconque $t$, nous représenterons par $u$ la température relative à cette même section normale.

Les quantités $\omega$, $\varepsilon$, $\rho$, $c$, seront des constantes données, si la barre est homogène et partout également épaisse; et, en général, ces quantités seront des fonctions données de $x$. La quantité $u$ sera une fonction inconnue de $x$ et $t$ qu'il s'agira de déterminer. A la rigueur, $\omega$, $\varepsilon$, $\rho$, $c$, varieront aussi avec la température; mais, dans les applications qu'on fera des formules suivantes, on pourra faire abstraction de cette variation, et regarder ces quatre quantités comme indépendantes de $t$.

Cela posé, je divise la barre en tranches normales d'une épaisseur insensible. En appelant $\eta$ l'épaisseur de la tranche qui répond au point M, son volume, sa masse et sa surface latérale seront $\omega\eta$, $\rho\omega\eta$, $\varepsilon\eta$. Soit M′ un point de la droite ME′ très voisin de M; faisons

$$CM' = x', \quad MM' = s;$$

désignons par $\omega'$, $\rho'$, $u'$, ce que deviennent $\omega$, $\rho$, $u$, quand on y change $x$ en $x'$ ou $x + s$; et appelons $\eta'$ l'épaisseur de la couche normale qui répondra au point M′, et dont la masse sera $\rho'\omega'\eta'$. Si l'on considère l'échange de chaleur entre chaque partie de grandeur insensible, appartenant à la masse $\rho\omega\eta$, et toutes les parties semblables comprises dans sa sphère d'activité et appartenant à la masse $\rho'\omega'\eta'$, il est évident que cet échange sera le même dans toute l'étendue des deux sections $\omega$ et $\omega'$, excepté à des distances de leurs contours, moindres que l'étendue sensible du rayonnement moléculaire. En supposant donc que les dimensions de $\omega$, quoique très petites, soient néanmoins extrêmement grandes par rapport à cette étendue, et négligeant, en conséquence, les échanges de chaleur qui ont lieu près de la surface latérale de la barre, on pourra supposer la totalité de la chaleur émanée de la tranche $\rho\omega\eta$ et absorbée par la tranche $\rho'\omega'\eta'$, proportionnelle à l'aire $\omega$ de la première; et comme elle est aussi proportionnelle à leurs épaisseurs et à leurs densités (nº 10), et qu'elle s'évanouit en même temps que la différence de leurs températures, on pourra la représenter, pendant l'instant $dt$, par un produit

$$\omega\rho\rho'\eta\eta'P(u - u')dt,$$

dans lequel P est un coefficient positif, qui n'a de valeurs sensibles

que pour des valeurs insensibles de la distance MM'. En même temps, la chaleur émanée de la masse $\rho'\omega'n'$ et absorbée par $\rho\omega n$ pendant cet instant $dt$, pourra être représentée par

$$\omega'\rho'\rho n'n P'(u' - u)dt;$$

mais cette quantité devant résulter de la précédente, par la simple permutation des lettres relatives au point M et de celles qui répondent au point M', il faudra qu'on ait

$$\omega P = \omega' P'.$$

Nous exprimerons chacune de ces deux quantités égales par le produit

$$\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\varphi(s, u, u', x, x');$$

$\varphi$ étant une fonction de $s$ très rapidement décroissante, et sensiblement nulle à une très petite distance que nous représenterons toujours par $l$, comme dans le chapitre IV. Cette quantité sera, en outre, une fonction symétrique par rapport à $u$ et $u'$, ainsi qu'à $x$ et $x'$; elle ne dépendra pas de $x$ et $x'$, lorsqu'il s'agira d'une barre homogène.

Il résulte de là, que si le point M est situé à une distance ME de E' qui surpasse $l$, la quantité de chaleur communiquée par la tranche $\rho\omega n$ pendant l'instant $dt$, à la partie ME' de la barre, sera la somme des valeurs de

$$\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')nn'\varphi(s, u, u', x, x')(u - u')dt,$$

étendue à toutes les valeurs sensibles de la fonction $\varphi$, dans laquelle fonction on a compris le facteur $\rho\rho'$, ce qui n'en change pas la nature. De même, si l'on considère un autre point $M_{,}$, appartenant à la partie ME de la barre et situé à la distance $s$ de M; que l'on désigne par $x_{,}$ la distance $CM_{,}$, de sorte qu'on ait $x_{,} = x - s$; et que l'on représente par $n_{,}$, $\omega_{,}$, $u_{,}$, ce que deviennent $n$, $\omega$, $u$, relativement à ce point $M_{,}$, la somme de toutes les valeurs sensibles de

$$\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_{,})nn_{,}\varphi(s, u, u_{,}, x, x_{,})(u - u_{,})dt,$$

exprimera la quantité de chaleur communiquée pendant l'instant $dt$,

par la tranche $\rho\omega\eta$, à la partie EM de la barre. En réunissant cette somme à la précédente, nous aurons donc la perte totale de chaleur de cette tranche, provenant de la communication de la chaleur; et comme ces deux sommes pourront être remplacées par des intégrales dans lesquelles on mettra $ds$ au lieu des épaisseurs $\eta'$ et $\eta_{,}$ (nº 46), il s'ensuit que cette perte de chaleur de $\rho\omega\eta$, pendant l'instant $dt$, aura pour expression

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^l \varphi(s,u,u',x,x')(\omega+\omega')(u-u')ds+\int_0^l \varphi(s,u,u_{,},x,x_{,})(\omega+\omega_{,})(u-u_{,})ds\right]\eta dt.$$

Mais, en outre, la même tranche éprouve pendant cet instant une autre perte de chaleur provenant du rayonnement extérieur et du contact de l'air, qui sera proportionnelle à la surface latérale $\eta\epsilon$ de la tranche, et que l'on pourra représenter par

$$\eta\epsilon p(u-\zeta)dt;$$

$\zeta$ désignant la température extérieure (nº 67) qui pourra être une fonction donnée de $t$, ou simplement une constante donnée; et $p$ représentant un coefficient positif, qui pourra dépendre de $u$ et $\zeta$, et varier d'un point à un autre de la barre, quand l'état de sa surface ne sera pas partout le même. Il faudra donc ajouter cette dernière quantité à la précédente, pour avoir toute la diminution de chaleur de la tranche $\rho\omega\eta$ correspondante à la variation $du$ de sa température; laquelle diminution a aussi pour valeur $-c\omega\eta du$ (nº 5). Donc, en égalant ces deux expressions d'une même quantité, et réunissant en une seule les deux intégrales relatives à $s$, nous aurons

$$c\omega\frac{du}{dt}=\frac{1}{2}\int_0^l [\varphi(s,u,u',x,x')(\omega+\omega')(u'-u) + \varphi(s,u,u_{,},x,x_{,})(\omega+\omega_{,})(u_{,}-u)]ds-\epsilon p(u-\zeta); \quad (1)$$

résultat d'où l'on déduira facilement l'équation aux différences partielles relatives au mouvement de la chaleur, suivant la longueur de la barre.

Le flux de chaleur qui a lieu à travers la section $\omega$ correspondante au point M, proviendra des échanges entre toutes les tranches de la partie EM de la barre et toutes celles de la partie ME'; sa valeur

sera donnée par une intégrale double, étendue depuis zéro jusqu'à $l$, de part et d'autre de cette section; et si on le désigne par $\Gamma\omega dt$ pendant l'instant $dt$, en le considérant de la partie EM dans la partie ME′, il est aisé de voir, d'après ce qui précède, que l'on aura

$$\Gamma\omega = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \varphi(s,\, u',\, u_{,},\, x',\, x_{,})\,(\omega' + \omega_{,})\,(u_{,} - u')\,ds'ds_{,}, \quad (2)$$

en faisant

$$MM' = s', \quad MM_{,} = s_{,}, \quad M_{,}M' = s,$$

et conservant d'ailleurs toutes les autres notations.

(117). Dans la formule (1), si l'on développe suivant les puissances de $s$ les quantités comprises sous le signe $\int$, excepté celles qui varient très rapidement avec cette variable, les termes indépendans de $s$ et ceux qui dépendent de sa première puissance se détruiront. Si l'on veut traiter comme on l'a fait dans le n° 49, l'étendue du rayonnement moléculaire comme insensible, il faudra donc borner l'approximation aux termes dépendans du carré de $s$. On aura alors

$$u' - u = s\,\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\,s^2\,\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$u_{,} - u = -\,s\,\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\,s^2\,\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Il suffira de conserver la première puissance de $s$ dans les développemens de $\omega'$ et $\omega_{,}$, et dans celui de la fonction $\varphi$; on aura, en conséquence,

$$\omega' = \omega + s\,\frac{d\omega}{dx},$$

$$\omega_{,} = \omega - s\,\frac{d\omega}{dx};$$

et en observant que la fonction $\varphi$ est symétrique, soit par rapport aux températures, soit par rapport aux distances auxquelles elles répondent, nous aurons aussi

$$\varphi\,(s,\, u,\, u',\, x,\, x') = Q + \frac{s}{2}\left(\frac{dQ}{du}\,\frac{du}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right),$$

$$\varphi\,(s,\, u,\, u_{,},\, x,\, x_{,}) = Q - \frac{s}{2}\left(\frac{dQ}{du}\,\frac{du}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\varphi(s, u, u, x, x) = Q.$$

Au moyen de ces différentes valeurs, et en remplaçant $\frac{dQ}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dQ}{dx}$ par la différence partielle de Q prise par rapport à $x$ et à tout ce qui en dépend, c'est-à-dire, à $x$ et à la température $u$ considérée comme une fonction de $x$, la première partie de la formule (1) deviendra

$$\frac{d.\omega\frac{du}{dx}\int_0^l Q s^2 ds}{dx}.$$

Donc en étendant jusqu'à l'infini l'intégrale relative à $s$, ce qui est permis, et faisant

$$\int_0^\infty Q s^2 ds = k,$$

il en résultera

$$c\omega\frac{du}{dt} = \frac{d.\omega k\frac{du}{dx}}{dx} - \epsilon p\,(u - \zeta), \qquad (3)$$

pour l'équation demandée du mouvement de la chaleur.

Au degré d'approximation où nous nous arrêtons, il suffira de conserver la première puissance de $s$ sous le double signe $\iint$ dans la formule (2), et de cette manière, on aura immédiatement

$$\Gamma = -k\frac{du}{dx};$$

résultat d'où l'on peut aussi déduire l'équation précédente. Il s'ensuit, en effet, que l'excès de chaleur qui va de la partie EM dans la partie ME' de la barre pendant l'instant $dt$, est exprimé par $-k\frac{du}{dx}\omega dt$; celui qui va pendant le même instant, de la partie EM' dans la partie M'E', aura donc pour expression $-k\frac{du}{dx}\omega dt - \frac{d.k\frac{du}{dx}\omega}{dx}s dt$, en négligeant le carré de $s$; par conséquent l'augmentation de chaleur qui en résultera pour la partie correspondante à MM' ou $s$, sera égale à

$\dfrac{d.\varpi k\dfrac{du}{dx}}{dx}sdt$; en en retranchant la perte de chaleur $s\epsilon p(u-\zeta)dt$, qui a lieu pendant l'instant $dt$, à travers la surface latérale $s\epsilon$ de cette partie de la barre, on aura donc son augmentation de chaleur $c\varpi s du$ correspondante à la variation $du$ de sa température; et en supprimant le facteur commun $sdt$, il en résultera l'équation (5).

(118). Si l'on désigne par $\varpi$ et $\varpi'$ ce que devient la quantité $p$ relativement aux surfaces planes qui terminent la barre en E et E', par $e$ et $e'$ les aires de ces sections normales, et par $v$ et $v'$ les températures qui répondent à des points $\mu$ et $\mu'$ situés à une distance très petite, mais un peu plus grande que $l$, de E et E', les quantités $\varpi(v-\zeta)edt$ et $\varpi'(v'-\zeta)e'dt$ seront les flux de chaleur qui auront lieu pendant l'instant $dt$, de dedans en dehors, à travers les surfaces $e$ et $e'$. Appelons aussi $\gamma$ et $\gamma'$ les valeurs de $\Gamma$ relatives aux points $\mu$ et $\mu'$. Les flux de chaleur pendant l'instant $dt$, de E$\mu$ dans $\mu$E' et de E'$\mu'$ dans $\mu'$E, auront pour expressions $\gamma'e'dt$ et $-\gamma edt$. D'ailleurs, si les dimensions de $e$ et $e'$, quoique très petites, sont cependant supposées très grandes par rapport aux longueurs E$\mu$ et $\mu'$E' des parties extrêmes, on pourra négliger les pertes de chaleur résultant du rayonnement à travers leurs surfaces latérales, par rapport aux flux de chaleur à travers leurs sections normales. Les accroissemens de chaleur de ces parties, pendant l'instant $dt$, seront donc simplement

$$[\gamma'-\varpi'(v'-\zeta)]e'dt, \quad -[\gamma+\varpi(v-\zeta)]edt;$$

par conséquent, les coefficiens de $e'dt$ et $edt$, dans ces expressions, devront être des quantités extrêmement petites, comme les longueurs E$\mu$ et $\mu'$E', sans quoi la température varierait avec une extrême rapidité, d'un instant à l'autre, dans les parties extrêmes de la barre. Nous admettrons qu'une telle variation de température n'a plus lieu dans aucune partie de la barre, après les premiers momens de son échauffement ou de son refroidissement (n° 68). Nous continuerons aussi de regarder comme insensible l'étendue $l$ du rayonnement moléculaire; les longueurs E$\mu$ et $\mu'$E' des parties de la barre que nous considérons seront également insensibles; et, par suite, les coeffi-

ciens de $edt$ et $e'dt$ seront sensiblement nuls; en sorte que l'on aura

$$\gamma + \varpi(v - \zeta) = 0, \quad \gamma' - \varpi'(v' - \zeta) = 0.$$

On pourra aussi, sans erreur sensible, faire successivement $x = h$ et $x = h'$, dans les expressions de $\Gamma$ et $u$, pour en déduire les valeurs des quantités $\gamma$ et $v$, $\gamma'$ et $v'$, que ces équations renferment. Donc, abstraction faite des premiers momens qui suivent l'état initial de la barre, et en supposant insensible l'étendue du rayonnement intérieur, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} k\dfrac{du}{dx} - \varpi(u - \zeta) = 0, \quad \text{pour} \quad x = h, \\ k\dfrac{du}{dx} + \varpi'(u - \zeta) = 0, \quad \text{pour} \quad x = h'; \end{array}\right\} \quad (4)$$

équations qui se déduisent aussi immédiatement de l'équation (3) du n° 67, relative à la surface d'un corps de forme quelconque.

Lorsque les sections extrêmes $e$ et $e'$ de la barre seront dans le même état que sa surface latérale, ce qui suppose que cette surface soit aussi partout la même, on fera $\varpi = \varpi' = p$. Si la barre est placée dans le vide et que l'une de ses extrémités soit imperméable à la chaleur, on aura $\varpi = 0$ ou $\varpi' = 0$; ce qui réduira à $\frac{du}{dx} = 0$ l'équation relative à cette extrémité. Si la température qui répond à l'une des extrémités est entretenue, par un moyen quelconque, dans un état constant ou variable suivant une loi donnée, on remplacera par $u = U$ celle des deux équations (4) qui s'y rapporte; U étant la température constante ou donnée en fonction du temps.

Observons aussi que les sections normales de la barre étant supposées très petites, les équations (3) et (4) subsisteront encore lorsque l'axe EE', auquel ces sections sont toutes perpendiculaires, sera une ligne courbe quelconque, pourvu que les distances $x$ soient comptées sur cette courbe, à partir d'un point fixe C choisi arbitrairement. Il pourra arriver que cet axe soit une courbe rentrante sur elle-même, et que la barre se change en un anneau. Les points E et E' étant alors un seul point, il faudra que les températures désignées par $v$ et $v'$ soient égales, et que les flux de chaleur $\gamma$ et

$\gamma'$ soient aussi égaux ; ou, autrement dit, il faudra que les valeurs de $u$ qui répondent à $x=h$ et $x=h'$, soient égales, ainsi que les valeurs de $\Gamma$, ou celles de $\frac{du}{dx}$ ; et les deux équations qui en résulteront devront remplacer les équations (4). Dans le cas d'une barre changée en un anneau, on pourra prendre tel point que l'on voudra sur l'axe curviligne, pour le point où se réunissent les deux extrémités E et E'; d'où il résulte que la fonction $u$ et son coefficient différentiel $\frac{du}{dx}$ devront avoir cette propriété de ne pas changer de valeurs, lorsqu'on y augmentera la variable $x$ d'une quantité égale à la longueur entière de l'axe curviligne : c'est, en effet, ce que l'on vérifiera par la suite.

Ces diverses équations particulières, relatives aux différens cas qui pourront se présenter, jointes à l'équation (3) commune à tous les points de la barre, et à la loi de ses températures initiales, suffiront toujours pour déterminer complètement la valeur de $u$ en fonction de $x$ et $t$.

Quand la température extérieure $\zeta$ sera constante, et que les températures des extrémités de la barre seront entretenues à un degré constant, la barre parviendra, après un temps plus ou moins long, à un état permanent dans lequel $u$ ne sera plus qu'une fonction de $x$. D'après l'équation (3), on aura donc, pour déterminer cette inconnue,

$$\frac{d.\omega k\frac{du}{dx}}{dx}=\varepsilon p(u-\zeta); \qquad (5)$$

équation différentielle du second ordre dont l'intégrale contiendra deux constantes arbitraires, que l'on déterminera au moyen des valeurs données de $u$ qui répondent à $x=h$ et $x=h'$. Comme elle ne contient pas la chaleur spécifique $c$, la loi des températures permanentes de la barre sera aussi indépendante de cet élément, qui influera seulement sur la loi du refroidissement de la barre avant de parvenir à son état final.

(119). Si l'on fait abstraction du rayonnement latéral, et que l'on suppose constante la section normale $\omega$, l'équation (3) se ré-

duira à

$$c\frac{du}{dt} = \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}.$$

Pour qu'elle coïncide avec celle que nous avons déduite, dans le n° 63, de l'équation (7) du n° 49, relative à un corps de forme quelconque, il faut que l'intégrale désignée par $k$ dans le n° 117 soit la même que celle qui avait été représentée par cette lettre dans le n° 49. Ces intégrales sont, d'après les notations employées dans ces deux numéros,

$$k = \int_0^l Qs^4 ds, \quad k = \frac{2\pi}{3}\int_0^l Vr^4 dr;$$

et, par la nature des quantités Q et V, on peut indifféremment les étendre à la limite $l$, comme nous le faisons ici, ou jusqu'à l'infini, comme dans les numéros cités. Ce sont donc ces deux valeurs de $k$ dont il s'agit de vérifier l'identité.

Puisque, dans le calcul des échanges de chaleur, on peut décomposer les corps immédiatement en élémens différentiels, et remplacer les sommes par des intégrales (n° 46), je prends $dx$ pour l'épaisseur de la tranche normale qui répond au point M, et $ds$ pour celle de la tranche correspondante au point M'; je désigne aussi par $d\sigma$ un élément quelconque de la section $\omega$, et par $d\sigma'$ un élément aussi quelconque de la section $\omega'$; en sorte que les élémens différentiels des volumes de ces deux tranches soient exprimés par $dxd\sigma$ et $dsd\sigma'$. Soit $r$ la distance de l'un à l'autre. L'échange de chaleur, pendant l'instant $dt$, entre les parties matérielles qui leur correspondent, aura pour expression, d'après le n° 45,

$$\frac{dxdsd\sigma d\sigma'}{r^2}R(u - u')dt;$$

R étant une fonction de $r$ et d'autres variables, qui n'a de valeurs sensibles que pour de très petites valeurs de $r$. Par conséquent, la quantité de chaleur émanée de la tranche correspondante au point M, et absorbée par celle qui répond au point M', pendant le même instant, sera l'intégrale de cette quantité, étendue à tous les élémens

$d\sigma$ et $d\sigma'$ des deux sections normales $\omega$ et $\omega'$, relatives à ces points M et M'; laquelle quantité a été représentée plus haut (n° 116) par

$$\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\, dx ds . \varphi(s, u, u', x, x')\ (u - u')\, dt,$$

en remplaçant par $dx$ et $ds$ les épaisseurs $n$ et $n'$ des deux tranches. Si donc on supprime le facteur $(u - u')dx\,ds\,dt$, constant dans cette intégration et commun à ces deux dernières formules; que l'on réduise R et $\varphi(s, u, u', x, x')$ aux premiers termes V et Q de leurs développemens (n°s 49 et 117), et que l'on mette $\omega$ à la place du facteur $\frac{1}{2}(\omega + \omega')$, nous aurons

$$Q\omega = \iint V \frac{d\sigma\, d\sigma'}{r^2};$$

équation dans laquelle V est une fonction de $r$, $u$, $x$, et Q une fonction de $s$, $u$, $x$, qui s'évanouissent dès que $r$ ou $s$ surpasse $l$.

Maintenant, pour effectuer l'intégration relative à la section $\omega'$, j'abaisse de l'élément $d\sigma$ de la section $\omega$ une perpendiculaire sur $\omega'$, qui rencontre cette section $\omega'$ en un point O; j'appelle $s'$ la distance de l'élément $d\sigma'$ de $\omega'$ au pied O de cette perpendiculaire, et $\psi$ l'angle que fait cette droite $s'$ avec une ligne fixe menée par le point O dans le plan de $\omega'$; de cette manière, on aura

$$r^2 = s^2 + s'^2, \quad d\sigma' = s'ds'd\psi;$$

et si le point O est situé à une distance sensible du contour de $\omega'$, c'est-à-dire, à une distance plus grande que $l$, on devra étendre l'intégrale dont il s'agit depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 2\pi$, et depuis $s' = 0$ jusqu'à $s' = l$, ou, si l'on veut, jusqu'à $s' = \infty$. En observant d'ailleurs que la quantité V est indépendante de l'angle $\psi$, on aura alors

$$\int \frac{V d\sigma'}{r^2} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{V s' ds' d\psi}{r^2} = 2\pi \int_0^\infty \frac{V s' ds'}{r^2}.$$

Dans cette dernière intégrale, je remplace $s'$ par la variable $r$; on aura $s'ds' = rdr$, et les limites relatives à $r$ seront $r = s$ et $r = \infty$; on aura donc

$$\int \frac{V d\sigma'}{r^2} = 2\pi \int_s^\infty \frac{V dr}{r}.$$

Les dimensions de $\omega$ étant extrêmement grandes par rapport à $l$, on peut, dans l'intégration relative à $\omega$, négliger les élémens pour lesquels le point O est situé à une distance de la surface latérale de la barre, moindre que $l$, et prendre, en conséquence, cette dernière valeur de $\int\frac{Vd\sigma'}{r^2}$, pour celle de cette quantité dans toute l'étendue de cette intégration; et comme cette valeur est la même dans toute cette étendue, il s'ensuit que l'on aura alors

$$\iint\frac{Vd\sigma d\sigma'}{r^2} = \int\left(\int\frac{Vd\sigma'}{r^2}\right)d\sigma = \omega\int\frac{Vd\sigma'}{r^2};$$

d'où l'on conclut

$$Q = 2\pi\int_s^\infty \frac{Vdr}{r}.$$

Cela posé, en intégrant par partie, on a

$$\int Qs^2ds = \frac{1}{3}\,Qs^3 - \frac{1}{3}\int\frac{dQ}{ds}s^3ds;$$

le terme compris hors du signe $\int$ s'évanouit aux deux limites $s=0$ et $s=l$; de plus, en différentiant la valeur précédente de Q par rapport à $s$, il vient

$$\frac{dQ}{ds} = -\frac{2\pi}{s}V',$$

en désignant par V' ce que devient V quand on y met $s$ au lieu de $r$; on aura donc

$$\int_0^l Qs^2ds = \frac{2\pi}{3}\int_0^l V's^2ds;$$

ou bien, en employant la variable $r$ au lieu de $s$ dans la dernière intégrale,

$$\int_0^l Qs^2ds = \frac{2\pi}{3}\int_0^l Vr^2dr;$$

ce qu'il s'agissait de vérifier.

(120). La quantité $k$ qui entre dans l'équation (3) étant ainsi la même que celle qui est désignée par la même lettre dans l'équation (7) du n° 49, on peut encore vérifier que ces deux équations

coïncident, non-seulement dans le cas d'une barre cylindrique ou prismatique, comme dans le n° précédent, mais aussi dans le cas d'une barre conique, en supposant toujours que l'on fasse abstraction du rayonnement latéral de la barre.

En effet, prenons le sommet du cône pour le point C; appelons $r$ la distance CM qui était précédemment désignée par $x$; la section correspondante $\omega$ se déduira de la section $e$ qui répond au point E ou à la distance CE $= h$, de sorte que l'on aura

$$\omega = \frac{er^2}{h^2}.$$

En supprimant le terme de l'équation (3) qui dépend du rayonnement extérieur, on aura donc

$$cr^2\frac{du}{dt} = \frac{d.r^2k\frac{du}{dr}}{dr}.$$

Mais, si le point C est le centre d'une sphère, et si, dans ce corps, la conductibilité $k$ et la température $u$ sont les mêmes en tous les points également éloignés de C, de manière que ces deux quantités ne soient fonctions que de $r$ et $t$, il est évident que la distribution de la chaleur dans chaque cône appartenant à cette sphère, et qui a son sommet au point C, sera la même que dans le cône isolé auquel se rapporte l'équation précédente; par conséquent, cette équation devra coïncider avec l'équation (7) du n° 49, appliquée à la sphère dont il s'agit.

Or, en plaçant au point C l'origine des coordonnées rectangulaires $x, y, z$, du point quelconque M, on aura

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

la température $u$ n'étant fonction que de $t$ et du rayon vecteur $r$, on en conclura

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\frac{x}{r}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\frac{y}{r}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\frac{z}{r};$$

et parce qu'il en est de même à l'égard de $k$, il en résultera

$$\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}=\frac{d.k\frac{du}{dr}}{dr}\cdot\frac{x^2}{r^2}+k\frac{du}{dr}\cdot\frac{y^2+z^2}{r^3},$$

$$\frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy}=\frac{d.k\frac{du}{dr}}{dr}\cdot\frac{y^2}{r^2}+k\frac{du}{dr}\cdot\frac{x^2+z^2}{r^3},$$

$$\frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}=\frac{d.k\frac{du}{dr}}{dr}\cdot\frac{z^2}{r^2}+k\frac{du}{dr}\cdot\frac{x^2+y^2}{r^3};$$

au moyen de quoi l'équation (7) se changera en celle-ci :

$$c\frac{du}{dt}=\frac{d.k\frac{du}{dr}}{dr}+\frac{2k}{r}\frac{du}{dr},$$

qui coïncide avec la précédente, après qu'on a multiplié ses deux membres par $r^2$.

(121). Examinons actuellement le cas où l'étendue du rayonnement intérieur n'est pas regardée comme insensible ; et pour simplifier la question, supposons la barre cylindrique et homogène, et la conductibilité indépendante de la température ; en sorte que la section $\omega$ soit constante, et que la fonction $\varphi$ comprise dans l'équation (1) ne soit fonction que de la variable $s$; ce qui réduira cette équation à

$$c\frac{du}{dt}=\int_0^\varepsilon (u'+u_{,}-2u)\,\varphi s ds-\frac{\varepsilon p}{\omega}(u-\zeta). \qquad (6)$$

En observant que $u'$ et $u_{,}$ sont ce que devient $u$, lorsqu'on y change $x$ successivement en $x+s$ et $x-s$, on aura, d'après le théorème de Taylor,

$$u'=u+s\frac{du}{dx}+\frac{s^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{s^3}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}+\text{etc.},$$

$$u_{,}=u-s\frac{du}{dx}+\frac{s^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{s^3}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}+\text{etc.},$$

et, par conséquent,

$$u'+u_{,}-2u=s^2\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{s^4}{3.4}\frac{d^4u}{dx^4}+\frac{s^6}{3.4.5.6}\frac{d^6u}{dx^6}+\text{etc.}$$

Si donc on fait d'abord

$$\int_0^l s^2 \varphi s ds = k,$$

et ensuite

$$\frac{1}{3.4}\int_0^l s^4 \varphi s ds = k\alpha^2, \quad \frac{1}{3.4.5.6}\int_0^l s^6 \varphi s ds = k\alpha^2 \mathcal{C}^2, \text{ etc.},$$

l'équation (6) se changera en celle-ci :

$$c\frac{du}{dt} + \frac{lp}{\omega}(u - \zeta) = k\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha^2\frac{d^4u}{dx^4} + \alpha^2\mathcal{C}^2\frac{d^6u}{dx^6} + \text{etc.}\right); \quad (7)$$

mais pour qu'on en puisse faire usage, il faudra que la série contenue dans son second membre soit convergente.

Or, la ligne $l$ étant supposée de grandeur sensible, mais très petite, $\alpha$, $\mathcal{C}$, etc., seront aussi des lignes très petites; si donc la fonction $u$ ne varie pas très rapidement avec $x$, la série dont il s'agit sera effectivement très convergente; au contraire, si $u$ varie très rapidement, les coefficiens différentiels $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^4u}{dx^4}$, etc., formeront une suite très rapidement croissante, et la série que nous considérons cessera d'être convergente et pourra même devenir très divergente. Mais, en excluant le cas où la température initiale et arbitraire varierait très rapidement dans quelques parties de la barre, la variation de $u$ à un instant quelconque ne peut être très rapide par rapport à $x$, que dans les parties extrêmes E$\mu$ et $\mu'$E$'$ de la barre auxquelles l'équation (1) ou l'équation (7) que l'on en a déduite ne doit pas s'appliquer. Ainsi, d'une part, la série contenue dans le second membre de cette équation (7) sera toujours très convergente, de sorte qu'on pourra la réduire à un certain nombre de ses premiers termes; et d'un autre côté, dans la valeur de $u$ en fonction de $t$ et de $x$, qui proviendra de l'intégrale complète de cette équation, on devra supprimer, comme étrangers à la question, les termes de cette expression qui varieraient très rapidement avec $x$.

C'est d'après cette considération, comme nous l'avons déjà dit (n° 48), que l'on ramènera toujours au même degré de généralité la valeur de $u$ tirée de l'équation (7), quel que soit l'ordre de cette

équation, résultant du nombre de termes que l'on aura conservés dans son second membre. Si la barre est parvenue à un état permanent, de sorte qu'on ait $\frac{du}{dt} = 0$, l'équation (7) se réduira à une équation différentielle du 2ᵉ, du 4ᵉ, du 6ᵉ..... ordre, selon que l'on poussera l'approximation jusqu'au 1ᵉʳ, au 2ᵉ, au 3ᵉ... terme de son second membre; mais, dans tous les cas, après que l'on aura supprimé les parties de son intégrale étrangères à la question, la valeur de $u$ ne renfermera plus que deux constantes arbitraires, suffisantes pour satisfaire aux conditions relatives aux deux extrémités de la barre : il serait absurde, en effet, qu'un problème fût déterminé ou indéterminé, à volonté, selon le degré d'approximation auquel il nous conviendrait de le résoudre.

(122). Pour vérifier cette assertion sur un exemple très simple, supposons que la température extérieure $\zeta$ soit constante, que les températures des deux extrémités de la barre soient aussi invariables, que la barre soit arrivée à son état permanent, et que l'on conserve seulement les deux premiers termes du second membre de l'équation (7). Prenons la température $\zeta$ pour le zéro de l'échelle thermométrique, et faisons, pour abréger,

$$\frac{lp}{\omega k} = g^2;$$

en faisant aussi $\frac{du}{dt} = 0$ dans l'équation (7), on aura

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha^2 \frac{d^4u}{dx^4} = g^2u, \qquad (8)$$

pour l'équation différentielle du 4ᵉ ordre qu'il s'agira de considérer.

Si la surface latérale de la barre est partout dans le même état, et que la quantité $p$ soit supposée indépendante de la température, aussi bien que la conductibilité $k$, la quantité $g$ sera une constante; et $\alpha$ en étant aussi une, on satisfera à cette équation (8) en prenant

$$u = e^{mx};$$

$e$ désignant la base des logarithmes népériens, et $m$ une constante

telle que l'on ait

$$a^2m^4 + m^2 = g^2;$$

d'où l'on tire

$$m^2 = -\frac{1}{2a^2}(1 \pm \sqrt{1 + 4a^2g^2}).$$

La ligne que $a$ représente est très petite et comparable à l'étendue $l$ du rayonnement intérieur; elle est donc très petite eu égard aux dimensions de la section normale de la barre (n° 116), et $\frac{al}{\omega}$ est une petite fraction numérique; $\frac{ap}{k}$ en sera une aussi, en général; par conséquent, $\frac{a^2lp}{\omega k}$ ou $a^2g^2$ sera une fraction extrêmement petite. On aura donc, en série très convergente,

$$\sqrt{1 + 4a^2g^2} = 1 + 2a^2g^2 - 2a^4g^4 + 4a^6g^6 - \text{etc.};$$

d'où il résulte que si l'on prend le signe inférieur dans la valeur de $m^2$, et que l'on néglige la quatrième puissance de $ag$, nous aurons

$$m^2 = g^2(1 - a^2g^2), \quad m = \pm g(1 - \tfrac{1}{2}a^2g^2);$$

et, au contraire, si l'on prend le signe supérieur, et que l'on réduise la valeur de $m^2$ à son premier terme, ce qui suffira pour l'objet que nous nous proposons, il en résultera

$$m^2 = -\frac{1}{a^2}, \quad m = \pm\frac{1}{a}\sqrt{-1}.$$

Donc, en employant ces quatre valeurs de $m$, et remplaçant les exponentielles imaginaires par des sinus et cosinus d'arcs réels, nous aurons

$$u = Ae^{-ngx} + Be^{ngx} + C\sin\frac{x}{a} + D\cos\frac{x}{a},$$

pour l'intégrale complète de l'équation (8); A, B, C, D, étant les quatre constantes arbitraires, et $n$ désignant un nombre positif et très peu différent de l'unité, savoir :

$$n = 1 - \tfrac{1}{2}a^2g^2.$$

Or, la ligne $a$ étant très petite, on voit que les deux derniers termes de cette valeur de $u$ varieront très rapidement avec $x$; d'après ce qu'on

vient de dire, il faudra donc les supprimer comme étrangers à la question, et l'on aura simplement

$$u = Ae^{-ngx} + Be^{ngx}; \qquad (9)$$

expression qui ne contient plus que deux constantes arbitraires, ainsi qu'il s'agissait de le vérifier. Quoique cette valeur de $u$ ait la même forme que si l'on eût considéré l'étendue du rayonnement moléculaire comme insensible, on voit néanmoins que cette étendue, quand elle a une grandeur sensible, influe sur la loi des températures permanentes de la barre, à raison du nombre $n$ qui contient la constante $\alpha$.

(123). On déterminera les constantes arbitraires A et B en désignant par $\theta$ et $\theta'$ les valeurs constantes et données des températures qui ont lieu aux points E et E', c'est-à-dire, les valeurs de $u$ qui répondront à $x = h$ et $x = h'$. On aura alors

$$\theta = Ae^{-ngh} + Be^{ngh},$$
$$\theta' = Ae^{-ngh'} + Be^{ngh'};$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\theta e^{ngh'} - \theta' e^{ngh}}{e^{ng\lambda} - e^{-ng\lambda}}, \\ B &= \frac{\theta' e^{-ngh} - \theta e^{-ngh'}}{e^{ng\lambda} - e^{-ng\lambda}}, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

en désignant par $\lambda$ la longueur donnée de la barre, de sorte qu'on ait $h' - h = \lambda$.

Si l'axe de la barre est une courbe fermée, les deux points E et E' n'en formant plus qu'un seul, on aura $\theta' = \theta$. En prenant ce point pour celui d'où l'on compte les distances $x$, c'est-à-dire pour le point fixe C, on aura aussi $h = 0$ et $h' = \lambda$; et si l'on substitue les valeurs de A et B dans la formule (9), il en résultera

$$u = \frac{\theta\left[(e^{ng\lambda} - 1)\, e^{-ngx} - (e^{-ng\lambda} - 1)\, e^{ngx}\right]}{e^{ng\lambda} - e^{-ng\lambda}},$$

pour la loi des températures permanentes dans un anneau dont une

section normale est entretenue, par un moyen quelconque, à une température invariable.

Le cas le plus simple a lieu lorsque la barre se prolonge indéfiniment à partir de l'un des deux points E et E', à partir du premier, par exemple. En prenant E pour le point fixe C, de sorte qu'on ait $h = 0$ et $h' = \lambda$, et faisant la longueur $\lambda$ infinie, ou du moins très grande, les valeurs de A et B se réduiront à $A = \theta$ et $B = 0$, et l'on aura simplement

$$u = \theta e^{-ngx};$$

ce qui montre que les températures permanentes de la barre décroissent en progression géométrique, lorsque les distances croissent par des différences égales; résultat conforme à l'expérience, dans les limites des erreurs dont ce genre d'observations est susceptible (*). En ayant égard à la valeur de $n$, on voit que, toutes choses d'ailleurs égales, l'influence de l'étendue sensible du rayonnement intérieur a pour effet de rendre un peu moins rapide le décroissement des températures, sans en changer la loi.

Si l'on désigne par $f$ une longueur déterminée, prise quelque part que ce soit sur la longueur de la barre, et que l'on appelle $\rho$ le rapport de la plus petite à la plus grande température qui ont lieu aux extrémités de $f$, on aura

$$\rho = e^{-gf}, \quad \log \rho = -gf,$$

en négligeant le second terme de la valeur de $n$. Pour une autre barre, parvenue également à son état permanent, si les quantités $\rho$ et $g$ deviennent $\rho'$ et $g'$, on aura de même

$$\rho' = e^{-g'f}, \quad \log \rho' = -g'f;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\log \rho'}{\log \rho} = \frac{g'}{g}.$$

En supposant que la section normale $\omega$ et son contour $\epsilon$ soient les

(*) *Traité de Physique* de M. Biot, tome IV, pages 666 et suivantes.

mêmes dans les deux barres; en supposant, de plus, que leurs surfaces soient dans un même état, où elles ont été amenées, si cela est nécessaire, au moyen d'une couche additive (n° 41), de sorte que la quantité $p$ soit aussi la même pour les deux barres; enfin, en désignant par $k'$ la conductibilité de la matière de la seconde barre, qui est $k$ pour la première, le rapport de $g'^2$ à $g^2$ sera celui de $k$ à $k'$, et l'on aura, en conséquence,

$$\frac{k}{k'} = \left(\frac{\log \rho'}{\log \rho}\right)^2;$$

équation très simple dont les physiciens se sont servis pour comparer les conductibilités de deux matières différentes, mais qui exige une très grande précision dans les valeurs de $\rho$ et $\rho'$ que l'on y substitue.

(124). Pour donner un exemple de la distribution de la chaleur dans une barre hétérogène, supposons que l'on juxtapose exactement l'une à la suite de l'autre deux barres homogènes qui ont la même section normale, et qui peuvent différer par leurs conductibilités et par l'état de leurs surfaces, qu'on suppose le même dans toute l'étendue de chaque surface.

Les points E et E' étant toujours les deux extrémités de la barre totale, appelons $E_{\prime}$ le point de jonction de ses deux parties. Soient $\lambda$ et $\lambda'$ leurs longueurs $EE_{\prime}$ et $E_{\prime}E'$; prenons l'extrémité E pour le point d'où l'on compte les distances $x$; supposons la barre entière parvenue à son état permanent; et, dans cet état, désignons, relativement à la distance quelconque $x$, par $u$ la température qui a lieu dans la partie $EE_{\prime}$, et par $u'$ celle qui a lieu dans l'autre partie $E_{\prime}E'$. En considérant l'étendue du rayonnement comme insensible, nous aurons, d'après l'équation (9), appliquée successivement à ces deux parties,

$$u = Ae^{-gx} + Be^{gx},$$
$$u' = A'e^{-g'x} + B'e^{g'x};$$

$g$ et $g'$ désignant les mêmes constantes que dans le numéro précédent, et A, B, A', B', étant quatre constantes arbitraires que l'on déterminera de la manière suivante.

La valeur de $u$ subsistera depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \lambda$, et celle de

$u'$ depuis $x=\lambda$ jusqu'à $x=\lambda+\lambda'$. Pour $x=0$, la première devra coïncider avec la température du point E, que nous représenterons par $\theta$, et pour $x=\lambda+\lambda'$, la seconde devra être égale à la température aussi donnée du point E', qui sera représentée par $\theta'$; on aura donc, en premier lieu,

$$\theta = A + B,$$
$$\theta' = A'e^{-g'(\lambda+\lambda')} + B'e^{g'(\lambda+\lambda')}.$$

De plus, en vertu des équations (3) du n° 70, on aura au point de jonction $E_{\prime}$ les deux autres équations

$$k\frac{du}{dx} + q(u-u') = 0,$$
$$k'\frac{du'}{dx} - q(u'-u) = 0,$$

dans lesquelles $q$ est une quantité positive, dépendante des matières dont les deux parties de la barre sont formées. En y substituant les expressions précédentes de $u$ et $u'$, et donnant ensuite à $x$ la valeur particulière $x=\lambda$, qui répond au point $E_{\prime}$, on aura

$$\left.\begin{array}{l}(q-gk)\,Ae^{-g\lambda}+(q+gk)\,Be^{g\lambda}=qA'e^{-g'\lambda}+qB'e^{g'\lambda},\\ (q+g'k')A'e^{-g'\lambda}+(q-g'k')B'e^{g'\lambda}=qAe^{-g\lambda}+qBe^{g\lambda};\end{array}\right\}\ (11)$$

et ces deux équations, jointes aux valeurs précédentes de $\theta$ et $\theta'$, feront connaître les valeurs demandées de A, B, A', B'.

Si la partie $E_{\prime}E'$ de la barre se prolonge indéfiniment, de sorte qu'on ait $\lambda'=\infty$, la valeur de B' sera nulle, sans quoi la valeur précédente de $\theta'$ serait infinie; on aura donc simplement

$$u' = A'e^{-g'x};$$

ce qui montre que la température $u'$ de cette partie $E_{\prime}E'$ décroîtra en progression géométrique pour des valeurs de $x$ croissantes par des différences égales; et cela doit être, en effet, puisque $E_{\prime}E'$ est alors une barre dont l'extrémité $E_{\prime}$ est entretenue à une température invariable, et qui se prolonge indéfiniment à partir de ce

point $E_{,}$. En désignant par $\rho'$ le rapport des températures qui répondent aux deux extrémités d'une partie $f$ prise quelque part que ce soit sur $E_{,}E'$, nous aurons, comme plus haut,

$$\rho' = e^{-g'f}, \quad g' = \frac{1}{f} \log \frac{1}{\rho'}.$$

On ne doit pas perdre de vue que les formules précédentes n'ont pas lieu au point même $E_{,}$; elles ne subsistent qu'à une distance un peu plus grande que l'étendue du rayonnement moléculaire, de part et d'autre de ce point de jonction : à des distances moindres la température varie très rapidement; en sorte qu'à cette distance même, quoiqu'elle soit très petite et que nous l'ayons supposée insensible, la température peut avoir des valeurs très différentes pour les deux parties de la barre. Je désignerai par $y$ et $y'$ les températures de ces deux parties, qui ont lieu à cette distance de $E_{,}$ un peu plus grande que $l$; les valeurs de $y$ et $y'$ se déduiront de celles de $u$ et $u'$, en y mettant pour $x$ des quantités très peu différentes de $\lambda$, ou bien, avec une approximation suffisante, en y faisant $x = \lambda$; par conséquent, dans le cas où la partie $E_{,}E'$ est infinie, nous aurons

$$y' = A'e^{-g'\lambda}.$$

Le second membre de la seconde équation (11) sera la valeur de $qy$; et en faisant $B' = 0$ dans son premier membre, nous aurons aussi

$$qy = (q + g'k')A'e^{-g'\lambda}.$$

On conclut de là

$$qy = (q + g'k')y';$$

et comme la quantité $g'k'$ est toujours positive, il s'ensuit qu'on a aussi toujours $y > y'$.

Je représente par $\rho_{,}$ le rapport de $y'$ à $y$; en substituant dans cette dernière équation, à la place de $g'$, sa valeur précédente, elle deviendra

$$qf = \left(qf + k' \log \frac{1}{\rho'}\right)\rho_{,}.$$

Lors donc que la conductibilité $k'$ relative à la matière de la par-

tie $E_{,}E'$ de la barre sera connue, que l'on aura pris pour $f$ une longueur déterminée, et que l'on aura déterminé, par l'expérience, les deux fractions $\rho'$ et $\rho_{,}$, cette dernière équation fera connaître la valeur de la quantité $q$ relative au passage de la chaleur d'une matière dans une autre. Nous n'avons aucune donnée sur sa grandeur, qui peut varier avec la matière de chacun des deux corps; il serait à désirer que les physiciens l'eussent déterminée : ce serait un quatrième élément à ajouter à la chaleur spécifique, à la conductibilité et au pouvoir rayonnant des corps, dont l'expérience seule peut nous faire connaître les valeurs numériques.

(125). Lorsque l'on considérera les quantités $k$ et $p$ comme variables avec la température, l'équation du mouvement de la chaleur ne sera plus linéaire par rapport à $u$, et dans le cas même d'une barre cylindrique et homogène parvenue à un état permanent, on ne pourra plus intégrer cette équation sous forme finie; mais si les températures de ses différens points ne sont pas très élevées, on obtiendra sans peine la valeur de $u$ par la méthode des approximations successives.

Pour le faire voir, je suppose que les valeurs de $k$ et $p$ soient développées suivant les puissances de $u$, seulement jusqu'à la seconde puissance exclusivement; je mets, en conséquence, $k + kmu$ et $p + p\gamma u$ à la place de $k$ et $p$ dans l'équation (5); j'y fais aussi $\zeta = 0$, et j'y regarde $\omega$ comme une quantité constante; il vient

$$\frac{d^2u}{dx^2} - g^2 u = g^2 \gamma u^2 - m\left(u\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du^2}{dx^2}\right). \qquad (12)$$

La constante $g^2$ est, comme précédemment, égale à $\frac{lp}{\omega k}$. Dans le vide, la constante $\gamma$ serait le logarithme népérien du nombre constant 1,0077 (nº 26); dans l'air, sa valeur est modifiée par le contact du fluide, et n'a pas été déterminée par l'expérience (nº 39). Quant à la constante $m$, elle dépend de la manière dont la conductibilité varie avec la température, et sa valeur n'est pas non plus connue. Je supposerai la barre indéfiniment prolongée au-delà du point E, à partir duquel je compterai les distances $x$, et dont la température donnée sera $\theta$, comme plus haut.

Cela posé, en négligeant d'abord le second membre de l'équation (12), on aura

$$u = \theta e^{-gx}.$$

D'après la méthode des approximations successives, on fera donc

$$u = \theta e^{-gx} + v;$$

et en substituant cette valeur de $u$ dans l'équation (12), on négligera la nouvelle inconnue $v$ dans son second membre; en sorte que l'on aura

$$\frac{d^2v}{dx^2} - g^2 v = g^2\theta^2 (\gamma - 2m) e^{-2gx}.$$

De plus, cette inconnue $v$ devra s'évanouir pour $x = 0$ et pour $x = \infty$, puisque déjà le premier terme de la valeur de $u$ est égal à $\theta$ et à zéro pour ces deux valeurs extrêmes de $x$. D'après cela, nous aurons

$$v = \frac{\theta^2}{3} (\gamma - 2m) (e^{-2gx} - e^{-gx}),$$

et, par conséquent,

$$u = \left[1 - \frac{\theta}{3} (\gamma - 2m)\right] \theta e^{-gx} + \frac{\theta^2}{3} (\gamma - 2m) e^{-2gx};$$

ce qui montre que, dans le cas que nous examinons, la température ne décroît plus exactement en progression géométrique pour des distances croissantes par des différences égales.

Par des expériences précises, faites sur des barres de différentes matières, si l'on parvenait à mesurer les quantités dont la loi des températures s'écarte de la progression géométrique, on en pourrait conclure la valeur de la quantité $m$, en supposant connue celle de $\gamma$, ou du moins, on en conclurait les différences des valeurs de $m$ relatives à des barres dont la surface est dans le même état.

(126). Dans le cas où l'étendue du rayonnement intérieur n'est pas supposée insensible, et auquel se rapporte la valeur de $u$ déterminée par l'équation (7), il est bon de donner aussi l'expression correspondante du flux de chaleur $\Gamma$.

Je suppose, comme dans l'équation (7), la barre cylindrique et

homogène, ce qui réduit la formule (2) à celle-ci :

$$\Gamma = \int_0^l \int_0^l (u_, - u')\,\varphi s ds' ds_,;$$

dans laquelle $u'$ et $u_,$ sont les valeurs de $u$ qui répondent à $x + s'$ et $x - s_,$, et où l'on a

$$s' + s_, = s.$$

Par le théorème de Taylor, on aura donc

$$u_, - u' = -\frac{du}{dx}(s_, + s') + \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}(s_,^2 - s'^2)$$
$$- \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}(s_,^3 + s'^3) + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4u}{dx^4}(s_,^4 - s'^4) \text{ etc.}$$

Or, quel que soit le nombre $n$, on a évidemment,

$$\int_0^l \int_0^l s_,^n \varphi s ds_, ds' = \int_0^l \int_0^l s'^n \varphi s ds_, ds'; \qquad (13)$$

ce qui fera d'abord disparaître les différentielles paires de $u$ dans la valeur de $\Gamma$. De plus, en étendant l'intégrale relative à $s'$ depuis $s' = 0$ jusqu'à $s' = \infty$, ce qui est permis, et remplaçant ensuite $s'$ par la variable $s$, les limites relatives à $s$ seront $s = s_,$ et $s = \infty$, et l'on aura

$$\int_0^l \varphi s ds' = \int_{s_,}^{\infty} \varphi s ds.$$

Cette dernière intégrale sera une fonction de $s_,$ qui s'évanouira pour $s_, = l$, et au-delà; je la désignerai par $\psi s_,$; et en la différentiant par rapport à $s_,$, nous aurons

$$\frac{d\psi s_,}{ds_,} = -\varphi s_,,$$

par la règle de la différentiation sous le signe $\int$. En intégrant par partie, on aura donc

$$\int s_,^n \psi s_, ds_, = \frac{1}{n+1} s_,^{n+1} \psi s_, + \frac{1}{n+1}\int s_,^{n+1} \varphi s_, ds_,.$$

Le terme compris hors du signe $\int$ s'évanouit aux deux limites $s_, = 0$

et $s_{,}=l$; si donc on remet dans le premier membre de cette équation $\int_0^l \varphi s ds'$ à la place de $\psi s_{,}$, et que l'on emploie la lettre $s$ au lieu de $s_{,}$ dans l'intégrale que renferme le second membre, on en conclura

$$\int_0^l \int_0^l s_{,}^n \varphi s ds' ds_{,} = \frac{1}{n+1} \int_0^l s^{n+1} \varphi s ds,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^l \int_0^l (s_{,}^n + s'^n) \varphi s ds' ds_{,} = \frac{2}{n+1} \int_0^l s^{n+1} \varphi s ds. \qquad (14)$$

Au moyen du développement de $u_{,} - u'$ et des équations (13) et (14), nous aurons, pour la valeur de $\Gamma$ en série,

$$\Gamma = -k\left(\frac{du}{dx} + \alpha^2 \frac{d^3u}{dx^3} + \alpha^2 6^2 \frac{d^5u}{dx^5} + \text{etc.}\right);$$

$k$, $\alpha$, $6$, etc., étant les mêmes constantes que dans le n° 121.

(127). Cette expression de $\Gamma$ montre qu'en général le flux de chaleur n'est pas proportionnel à l'accroissement de température dans une épaisseur infiniment petite de la barre, divisé par cette épaisseur. Cette proportionnalité, qu'on avait admise pour démontrer les équations du mouvement de la chaleur, d'une manière indépendante d'aucune hypothèse sur le mode de sa propagation (n° 63), n'a réellement lieu que dans deux cas particuliers : lorsque l'étendue du rayonnement moléculaire est insensible, ce qui réduit la valeur précédente de $\Gamma$ à son premier terme, en rendant les termes suivans insensibles par rapport à celui-là; et quand la température varie uniformément, quelle que soit alors l'étendue de ce rayonnement. Dans ce dernier cas, le flux de chaleur est proportionnel, comme on va le voir, au rapport constant de l'augmentation de température dans une épaisseur quelconque à cette épaisseur.

En effet, pour appliquer cette formule au cas des températures permanentes de la barre, il suffira d'y substituer à la place de $u$ sa valeur donnée par la formule (9). Dans le cas où le rayonnement latéral est nul, on a $g = 0$; mais en supposant d'abord cette cons-

tante infiniment petite, la formule (9) devient

$$u = A + B + (B - A)ngx.$$

En vertu des équations (10), on a, en général,

$$A + B = \frac{\theta(e^{ngh'} - e^{-ngh'}) + \theta'(e^{-ngh} - e^{ngh})}{e^{ng\lambda} - e^{-ng\lambda}},$$

$$A - B = \frac{\theta(e^{ngh'} + e^{-ngh'}) - \theta'(e^{-ngh} + e^{ngh})}{e^{ng\lambda} - e^{-ng\lambda}};$$

quantités qui se réduisent à

$$A + B = \frac{\theta h' - \theta' h}{\lambda},$$

$$A - B = \frac{\theta - \theta'}{ng\lambda}.$$

On aura donc alors

$$u = \frac{\theta h' - \theta' h}{\lambda} + \frac{(\theta' - \theta)x}{\lambda};$$

en sorte que la température croîtra uniformément dans toute la longueur de la barre. Or, en substituant cette valeur de $u$ dans celle de $\Gamma$, il vient

$$\Gamma = \frac{k(\theta - \theta')}{\lambda},$$

c'est-à-dire, une quantité proportionnelle à la différence $\theta - \theta'$ des températures extrêmes de la barre, divisée par sa longueur $\lambda$; ce qu'il s'agissait de vérifier. On voit que dans ce cas d'une température croissante uniformément, le flux de chaleur est indépendant de la grandeur sensible du rayonnement moléculaire, et ne dépend, outre le rapport $\frac{\theta - \theta'}{\lambda}$, que de la conductibilité $k$, qui aurait lieu si cette grandeur était insensible.

(128). Occupons-nous maintenant du mouvement de la chaleur dans l'état variable de la barre, ou de la valeur de $u$ en fonction de $t$ et de $x$. Mais supposons, pour simplifier la question, l'étendue du rayonnement moléculaire insensible, ce qui permettra d'employer l'équation (3); les quantités $k$ et $p$ indépendantes de $u$, ce qui rendra

cette équation linéaire; et enfin la température $\zeta$ constante et égale à zéro. Les quantités $\omega$, $k$, $p$, seront des constantes ou des fonctions quelconques de $x$, données dans chaque exemple.

Quelle que soit la valeur inconnue de $u$, on pourra la représenter (n° 84) par

$$u = \Sigma \, \mathrm{R}e^{-\rho t};$$

$\rho$ étant une constante quelconque, R une fonction inconnue de $x$, qui pourra contenir $\rho$ et d'autres constantes indéterminées, et la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, de $\rho$ et de ces autres constantes.

Je substitue cette valeur de $u$ dans l'équation (3); en égalant le coefficient de la même exponentielle $e^{-\rho t}$ dans ses deux membres, il vient

$$\frac{d.\varpi k \frac{d\mathrm{R}}{dx}}{dx} = (\epsilon p - c\omega\rho)\,\mathrm{R}. \qquad (15)$$

De cette équation différentielle du second ordre, on tirera pour R une valeur de cette forme :

$$\mathrm{R} = \mathrm{BY} + \mathrm{B'Y'};$$

B et B′ étant les deux constantes arbitraires, et en désignant par Y et Y′ des fonctions déterminées de $x$ et $\rho$. Si l'on représente par H et G, $\mathrm{H}_{\prime}$ et $\mathrm{G}_{\prime}$, les valeurs de Y et $\frac{d\mathrm{Y}}{dx}$, Y′ et $\frac{d\mathrm{Y}'}{dx}$, correspondantes à $x = h$, et par H′ et G′, $\mathrm{H}_{\prime}'$ et $\mathrm{G}_{\prime}'$, celles des mêmes quantités qui répondent à $x = h'$, on aura, en vertu des équations (4),

$$\mathrm{B}(\mathrm{G}k - \mathrm{H}\varpi) = -\mathrm{B}'(\mathrm{G}_{\prime}k - \mathrm{H}_{\prime}\varpi),$$
$$\mathrm{B}(\mathrm{G}'k + \mathrm{H}'\varpi') = -\mathrm{B}'(\mathrm{G}_{\prime}'k + \mathrm{H}_{\prime}'\varpi');$$

d'où l'on conclut d'abord

$$(\mathrm{G}k - \mathrm{H}\varpi)(\mathrm{G}_{\prime}'k + \mathrm{H}_{\prime}'\varpi') = (\mathrm{G}'k + \mathrm{H}'\varpi')(\mathrm{G}_{\prime}k - \mathrm{H}_{\prime}\varpi); \quad (16)$$

équation qui servira à déterminer les valeurs de $\rho$. En ajoutant les deux équations précédentes, on aura, en outre, sous une forme

symétrique par rapport aux deux extrémités de la barre,

$$B = A\,(G_{,}k + G_{,}'k - H_{,}\varpi + H'_{,}\varpi'),$$
$$B' = A\,(H\varpi - H'\varpi' - Gk - G'k);$$

A étant une constante qui restera indéterminée.

D'après cela, si nous faisons

$$X = (G_{,}k + G_{,}'k - H_{,}\varpi + H_{,}'\varpi')Y - (Gk + G'k - H\varpi + H'\varpi')Y', \quad (17)$$

nous aurons

$$u = \Sigma A X e^{-\rho t};$$

et la somme $\Sigma$ ne devra plus s'étendre qu'aux valeurs de $\rho$ tirées de l'équation (16). Si cette équation admet plusieurs racines égales, on n'en emploiera qu'une seule, de sorte que tous les termes de la somme $\Sigma$ répondent à des valeurs inégales de $\rho$, et renferment des exponentielles distinctes. C'est ce que suppose essentiellement le procédé que l'on va suivre pour déterminer le coefficient A en fonction de $\rho$ d'après l'état initial de la barre.

Pour cela, j'ai recours à la méthode indiquée dans le n° 85. Je multiplie, en conséquence, les deux membres de l'équation (3) par $X dx$, puis j'intègre dans toute la longueur de la barre, c'est-à-dire depuis $x = h$ jusqu'à $x = h'$. En faisant, pour abréger,

$$\int_h^{h'} c\omega X u dx = v,$$

et observant que $c\omega X$ ne dépend pas de $t$, de sorte qu'on aura en même temps,

$$\int_h^{h'} c\omega X \frac{du}{dt}\, dx = \frac{dv}{dt},$$

il en résultera

$$\frac{dv}{dt} = \int_h^{h'} \frac{d.\omega k \frac{du}{dx}}{dx} X dx - \int_h^{h'} \epsilon p X u dx.$$

En intégrant deux fois de suite par partie, il vient

$$\int \frac{d.\omega k \frac{du}{dx}}{dx} X dx = X\omega k \frac{du}{dx} - u\omega k \frac{dX}{dx} + \int \frac{d.\omega k \frac{dX}{dx}}{dx} u dx.$$

Mais en vertu de l'équation (15), qui détermine R dont X est une valeur particulière, on a

$$\frac{d.\varpi k\frac{dX}{dx}}{dx} - \epsilon pX = -\rho c\omega X;$$

la valeur précédente de $\frac{dv}{dt}$ deviendra donc

$$\frac{dv}{dt} + \rho v = \left(X\omega k\frac{du}{dx}\right) - \left[X\omega k\frac{du}{dx}\right]$$
$$- \left(u\omega k\frac{dX}{dx}\right) + \left[u\omega k\frac{dX}{dx}\right];$$

les quantités comprises entre les parenthèses répondant à $x = h'$, et celles qui sont renfermées entre des crochets à $x = h$. Or, en vertu des équations (4), auxquelles on doit satisfaire en $y$ mettant $Xe^{-\rho t}$, ou simplement X au lieu de $u$, on a aussi

$$k\frac{dX}{dx} = \varpi X, \quad \text{quand } x = h,$$

$$k\frac{dX}{dx} = -\varpi' X, \text{ quand } x = h';$$

et de ces équations particulières, jointes aux équations (4), on conclut

$$\left(X\omega k\frac{du}{dx}\right) - \left(u\omega k\frac{dX}{dx}\right) = 0,$$

$$\left[X\omega k\frac{du}{dx}\right] - \left[u\omega k\frac{dX}{dx}\right] = 0;$$

ce qui fait disparaître le second membre de l'équation relative à $v$, et la réduit à

$$\frac{dv}{dt} + \rho v = 0.$$

En intégrant et remettant pour $v$ l'intégrale définie que cette lettre représente, on aura donc

$$\int_h^{h'} c\omega Xudx = De^{-\rho t};$$

D étant la constante arbitraire. Pour la déterminer, je suppose

qu'on ait

$$u = \mathrm{F}x,$$

quand $t = 0$, de sorte que $\mathrm{F}x$ soit une fonction de $x$, donnée dans toute la longueur de la barre, c'est-à-dire, depuis $x = h$ jusqu'à $x = h'$. Cette fonction représente la loi des températures initiales de la barre, abstraction faite de l'intervalle de temps pendant lequel cette valeur arbitraire de $u$ ne satisfait pas, en général, aux équations (4) relatives aux extrémités de la barre; intervalle de temps que l'on suppose assez court pour que les températures de tous les points de la barre, situés à une distance sensible de ses extrémités, ne changent pas sensiblement pendant sa durée. De cette manière, on aura

$$\mathrm{D} = \int_h^{h'} c\omega \mathrm{X}\mathrm{F}x dx,$$

et, par conséquent,

$$\int_h^{h'} c\omega \mathrm{X} u dx = e^{-\rho t} \int_h^{h'} c\omega \mathrm{X}\mathrm{F}x dx.$$

Maintenant, si l'on substitue dans le premier membre de cette équation, à la place de $u$, sa valeur en série d'exponentielles, il faudra que les coefficiens de toutes les exponentielles différentes de $e^{-\rho t}$ soient zéro dans ce premier membre, et que celui de $e^{-\rho t}$ soit égal au coefficient de la même exponentielle dans le second membre. Si donc $\rho'$ est une racine de l'équation (16), distincte de la racine $\rho$, et si l'on désigne par $\mathrm{X}'$ la valeur de $\mathrm{X}$ correspondante à cette racine $\rho'$, il faudra qu'on ait

$$\int_h^{h'} c\omega \mathrm{X}\mathrm{X}' dx = 0;$$

équation au moyen de laquelle on démontrera, comme dans le n° 90, la réalité des racines de l'équation (16). De plus, dans le cas de $\rho' = \rho$, il faudra que l'on ait aussi

$$\mathrm{A} \int_h^{h'} c\omega \mathrm{X}^2 dx = \int_h^{h'} c\omega \mathrm{X}\mathrm{F}x dx;$$

ce qui détermine la valeur du coefficient A correspondant à une racine quelconque $\rho$ de cette équation (16).

Au moyen de cette valeur de A en fonction de $\rho$, celle de $u$ deviendra

$$u = \Sigma\left(\frac{\int_h^{h'} c\omega \mathrm{X F}x dx}{\int_h^{h'} c\omega \mathrm{X}^2 dx}\right)\mathrm{X}e^{-\rho t}; \qquad (18)$$

formule qui renferme la solution générale et complète du problème, en supposant, du moins, l'intégration de l'équation (15), qui ne pourra s'effectuer, exactement ou par approximation, que quand les valeurs de $k, p, c, \omega, \varepsilon$, en fonctions de $x$, seront données dans chaque exemple. Nous allons l'appliquer spécialement au cas particulier de la barre cylindrique ou prismatique, homogène, et dont la surface est partout dans le même état, c'est-à-dire, au cas où ces cinq quantités sont des constantes données.

(129). Dans ce cas, je fais, pour abréger,

$$\frac{k}{c} = a^2, \quad \frac{\varepsilon p}{\omega c} = b;$$

l'équation (3) devient

$$\frac{du}{dt} = a^2\frac{d^2u}{dx^2} - bu; \qquad (19)$$

et en y mettant $ue^{-bt}$ au lieu de $u$, elle se réduit à

$$\frac{du}{dt} = a^2\frac{d^2u}{dx^2};$$

en sorte que l'on pourra supposer la constante $p$ ou $b$ nulle, sauf à multiplier par $e^{-bt}$ la valeur de $u$ que l'on obtiendra dans cette hypothèse.

En faisant donc $p = 0$ dans l'équation (15), et y mettant, pour plus de commodité, $a^2\rho^2$ au lieu de $\rho$, elle deviendra

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} + \rho^2\mathrm{R} = 0.$$

Les deux valeurs particulières de R que l'on a désignées par Y et Y',

pourront être

$$Y_{,} = \sin \rho x, \quad Y' = \cos \rho x.$$

Si l'on place le point C, origine des distances $x$, au milieu de la barre, et que l'on représente sa longueur par $2l$, on aura

$$h = -l, \; H = -\sin \rho l, \; G = \rho \cos \rho l, \; H_{,} = \cos \rho l, \; G_{,} = \rho \sin \rho l,$$
$$h' = l, \quad H' = \sin \rho l, \quad G' = \rho \cos \rho l, \; H'_{,} = \cos \rho l, \; G'_{,} = -\rho \sin \rho l;$$

au moyen de quoi l'équation (16) deviendra

$$(\varpi\varpi' - \rho^2) \sin 2\rho l + (\varpi' + \varpi) \rho \cos 2\rho l = 0, \qquad (20)$$

toutes réductions faites, et en mettant, pour plus de simplicité, $k\varpi$ et $k\varpi'$ au lieu de $\varpi$ et $\varpi'$. En même temps, on aura, d'après l'équation (17),

$$X = (\varpi' - \varpi) k \cos \rho l \sin \rho x - [(2\rho \cos \rho l + (\varpi + \varpi') \sin \rho l] k \cos \rho x, \quad (21)$$

pour la valeur de X qu'il faudra substituer dans la formule (18).

On y mettra aussi, sous le signe $\Sigma$, l'exponentielle $e^{-a^2\rho^2 t}$ au lieu de $e^{-\rho t}$; on supprimera au numérateur et au dénominateur le facteur constant $c\omega$; puis on multipliera la somme $\Sigma$ par $e^{-bt}$.

Toutes les racines de l'équation (16) étant réelles, il en sera de même à l'égard des valeurs de $\rho l$ que l'on tirera de l'équation (20). L'une de ses racines sera zéro. De plus, si l'on développe $\sin 2\rho l$ et $\cos 2\rho l$ dans le premier membre de cette équation (20), et que l'on supprime le facteur $\rho$, tous ses termes ne renfermeront que des puissances paires de $\rho$, alternativement précédées du signe $+$ et du signe $-$; d'où l'on conclut que les valeurs de $\rho^2$ qui s'en déduiront seront toutes positives. La somme $\Sigma$ s'étendra à la racine $\rho = 0$ et seulement à toutes les valeurs positives de $\rho$, parce que l'analyse du numéro précédent supposait que les différens termes qui répondent à des valeurs égales de $\rho$ sont réunis en un seul, et que l'on a ensuite remplacé $\rho$ par $a^2\rho^2$. Si l'une de ces valeurs était encore zéro, ce qui aura lieu effectivement dans le cas de $\varpi = 0$ et $\varpi' = 0$, on en ferait abstraction par la même raison; la racine $\rho = 0$ étant déjà employée.

Il résulte de là qu'à moins que $b$ ne soit zéro, tous les termes de la valeur de $u$ décroîtront indéfiniment à mesure que le temps augmentera, et qu'après un temps plus ou moins long, la valeur entière de $u$ ne différera plus sensiblement de la température extérieure qui a été prise pour le zéro de l'échelle thermométrique. Avant de se réduire à zéro, la température de tous les points variera suivant une même progression géométrique ; le temps croissant par des différences égales.

Après avoir formé la valeur de $u$ en fonction de $t$ et $x$, et en y faisant $t = 0$, on aura une expression en série de la fonction arbitraire $Fx$ (nº 86), qui subsistera pour toutes les valeurs de $x > -l$ et $< l$, et qui aura lieu aux limites mêmes $x = \pm l$, lorsque cette fonction satisfera aux équations (4) pour ces valeurs extrêmes de la variable.

(130). L'expression de $u$ devient plus simple lorsque la barre ne rayonne que par une seule de ses deux extrémités.

Supposons que la température de l'extrémité E' de la barre soit constamment entretenue à zéro. Il faudra alors que la seconde équation (4), qui s'y rapporte, se réduise à $u = 0$ ; ce qui exige que l'on ait $\varpi' = \infty$, puisqu'on a $\zeta = 0$. L'équation (20), d'où dépendent les valeurs de $\rho$, se réduira donc à

$$\varpi \sin 2\rho l + \rho \cos 2\rho l = 0,$$

en la divisant par $\varpi'$, et supprimant ensuite les termes qui ont cette quantité pour dénominateur. D'après la formule (21), on aura, en même temps,

$$X = k\varpi' \sin \rho (x - l),$$

$$\int_{-l}^{l} X^2 dx = \frac{k^2 \varpi'^2}{4\rho} (4\rho l - \sin 4\rho l),$$

en négligeant les termes de X indépendans de $\varpi'$, par rapport à ceux qui ont $\varpi'$ pour facteur. La valeur de $u$, formée comme on vient de le dire, sera, par conséquent,

$$u = e^{-bt} \Sigma \frac{4\rho \sin \rho (x - l) \int_{-l}^{l} \sin \rho (x' - l) Fx' dx'}{4\rho l - \sin 4\rho l} e^{-a^2 \rho^2 t},$$

où l'on a employé, pour plus de clarté, la lettre $x'$ au lieu de $x$ sous les intégrales définies.

On pourra présenter cette valeur sous une autre forme, en transportant l'origine des distances $x$ au point E. Pour cela, il faudra mettre $x - l$ et $x' - l$ à la place de $x$ et $x'$; les intégrales relatives à $x'$ s'étendront alors depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 2l$; on aura

$$\sin \rho (x - 2l) = \sin \rho x \cos 2\rho l - \cos \rho x \sin 2\rho l;$$

et comme l'équation d'où l'on doit tirer les valeurs de $\rho$ donne

$$\cos 2\rho l = \frac{\varpi}{\sqrt{\varpi^2 + \rho^2}}, \quad \sin 2\rho l = - \frac{\rho}{\sqrt{\varpi^2 + \rho^2}},$$

il en résultera

$$\sin \rho(x - 2l) = \frac{\varpi \sin \rho x + \rho \cos \rho x}{\sqrt{\varpi^2 + \rho^2}},$$

$$4\rho l - \sin 4\rho l = \frac{4\rho l(\varpi^2 + \rho^2) + 2\rho\varpi}{\varpi^2 + \rho^2}.$$

Par conséquent, en mettant aussi $\frac{1}{2} l$ au lieu de $l$, dans la valeur précédente de $u$, et faisant $F(x' - \frac{1}{2} l) = fx'$, nous aurons

$$u = 2e^{-ht} \Sigma \frac{(\varpi \sin \rho x + \rho \cos \rho x) \int_0^l (\varpi \sin \rho x' + \rho \cos \rho x') fx' dx'}{\varpi + l(\varpi^2 + \rho^2)} e^{-a^2\rho^2 t}, \quad (22)$$

pour la loi des températures dans une barre dont la longueur est $l$, qui rayonne par son extrémité E d'où l'on compte les distances $x$, et qui a une température constamment nulle à son autre extrémité E' correspondante à $x = l$.

Le terme de la somme $\Sigma$ qui répond à $\rho = 0$ s'évanouit, comme on voit, excepté dans le cas de $\varpi = 0$. Dans ce cas, ce terme est zéro ou ne l'est pas, selon qu'on fait d'abord $\rho = 0$ et ensuite $\varpi = 0$, ou d'abord $\varpi = 0$ et ensuite $\rho = 0$; mais la valeur de $\sin 2\rho l$ dont on a fait usage, et qui doit s'évanouir en même temps que $\rho$, exige que l'on fasse $\rho = 0$ avant de donner à la constante $\varpi$ la valeur particulière $\varpi = 0$; en sorte qu'il faudra toujours faire abstraction du terme de la somme $\Sigma$ qui répondrait à $\rho = 0$. Cette somme s'éten-

dra à toutes les autres valeurs positives de $\rho$, tirées de l'équation

$$\varpi \sin \rho l + \rho \cos \rho l = 0. \qquad (23)$$

Il est évident, d'après cette équation, que chaque terme de la somme $\Sigma$ sera séparément nul au point E' qui répond à $x = l$. En mettant $\frac{1}{2} l - xk$ et $\varpi$ au lieu de $x$ et $\varpi$ dans la première équation (4) relative au point E, elle devient

$$\frac{du}{dx} + \varpi u = 0;$$

condition évidemment remplie, pour $x = 0$, par chacun des termes de la somme $\Sigma$.

En faisant $t = 0$ dans l'équation (22), il vient

$$fx = 2\Sigma \frac{(\varpi \sin \rho x + \rho \cos \rho x) \int_0^l (\varpi \sin \rho x' + \rho \cos \rho x') f x' dx'}{\varpi + l(\varpi^2 + \rho^2)}; \quad (24)$$

résultat qui subsistera, quelle que soit la fonction arbitraire $fx$, pour toutes les valeurs de $x > 0$ et $< l$, mais qui n'aura lieu pour $x = l$, que quand on aura $fl = 0$, et pour $x = 0$, que si l'on a $\frac{dfx}{dx} + \varpi fx = 0$ pour cette seconde valeur de $x$.

(131). Lorsque la longueur $l$ de la barre sera très grande, on résoudra facilement l'équation (23) par la méthode des approximations successives. En l'écrivant ainsi :

$$\sin \rho l = -\frac{\rho l \cos \rho l}{\varpi l},$$

on déterminera d'abord la valeur de $\rho l$, en négligeant le second membre; en sorte que l'on aura, dans cette première approximation,

$$\rho l = n\pi;$$

$n$ étant un nombre entier quelconque. On fera ensuite

$$\rho l = n\pi + \delta;$$

et en négligeant $\delta$ dans le second membre de l'équation donnée, et

son carré dans le premier membre, on en déduira

$$\delta = -\frac{n\pi}{\varpi l}, \quad \rho l = n\pi - \frac{n\pi}{\varpi l}.$$

En continuant ainsi, on obtiendra une valeur de $\rho l$ en série très convergente, ordonnée suivant les puissances négatives de $l$, et la somme $\Sigma$ s'étendra à toutes les valeurs positives du nombre $n$, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$.

Si cette longueur $l$ devient infinie, la valeur de $\rho$ se réduira à $\frac{n\pi}{l}$; elle croîtra donc avec $n$ par des degrés infiniment petits; et si nous faisons

$$\rho = \frac{n\pi}{l} = \alpha, \; \frac{\pi}{l} = d\alpha,$$

la somme relative à $\rho$ se changera en une intégrale relative à $\alpha$, qui devra s'étendre depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \infty$. La formule (22) deviendra alors

$$u = \frac{2}{\pi} e^{-bt} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\varpi \sin \alpha x + \alpha \cos \alpha x)(\varpi \sin \alpha x' + \alpha \cos \alpha x') fx'}{\varpi^2 + \alpha^2} e^{-a^2\alpha^2 t} d\alpha dx',$$

en réduisant à $l(\varpi^2 + \alpha^2)$ le dénominateur $\varpi + l(\varpi^2 + \rho^2)$ et remplaçant $\frac{1}{l}$ par $\frac{d\alpha}{\pi}$. Si l'on fait $t = 0$ dans cette dernière formule, on obtiendra une expression de $fx$ qui subsistera pour toutes les valeurs positives de la variable, et qui aura aussi lieu pour $x = 0$, quand cette valeur particulière fera évanouir la quantité $\frac{dfx}{dx} + \varpi fx$.

(132). L'expression de $u$ se simplifie encore davantage, et la formule (24) peut être vérifiée, dans les deux cas particuliers où l'on a $\varpi = 0$ ou $\varpi = \infty$.

Le premier cas est celui où le rayonnement est nul à l'extrémité E. L'équation (23) se réduit à $\rho \cos \rho l = 0$; en faisant abstraction de sa racine zéro et de ses racines négatives, et désignant par $n$ un nombre entier et positif, on aura donc

$$\rho = \frac{(2n - 1)\pi}{2l};$$

et la formule (22) se changera en celle-ci :

$$u = \frac{2}{l} e^{-bt} \Sigma \left( \int_0^l \cos \frac{(2n-1)\pi x'}{2l} fx' dx' \right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 a^2 t}{4l^2}},$$

dans laquelle la somme $\Sigma$ s'étendra depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. La formule

$$fx = \frac{2}{l} \Sigma \left( \int_0^l \cos \frac{(2n-1)\pi x'}{2l} fx' dx' \right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l},$$

qu'on en déduit en y faisant $t = 0$, coïncide avec la formule (12) du n° 96, quand on suppose dans celle-ci $f(-x) = fx$. Elle a évidemment lieu à la limite $x = l$, quand on a $fl = 0$, et à l'autre limite $x = 0$, lorsque l'on a $\frac{du}{dx} = 0$ pour cette seconde valeur de $x$.

Dans le cas de $\varpi = \infty$, la température de la barre est entretenue constamment à zéro, à la seconde extrémité E, comme à la première E'. En vertu de l'équation (23), on a $\sin \rho l = 0$; d'où l'on tire

$$\rho = \frac{n\pi}{l};$$

et la formule (22) devient

$$u = \frac{2}{l} e^{-bt} \Sigma \left( \int_0^l \sin \frac{n\pi x'}{l} fx' dx' \right) \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}; \quad (25)$$

la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier et positif $n$, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. En y faisant $t = 0$, on en déduit

$$fx = \frac{2}{l} \Sigma \left( \int_0^l \sin \frac{n\pi x'}{l} fx' dx' \right) \sin \frac{n\pi x}{l};$$

résultat qui coïncide avec la formule (10) du n° 96, et qui n'a lieu pour $x = 0$ et pour $x = l$, que quand $fx$ s'évanouit à ces deux limites.

Observons que si, dans le second cas, les températures des points extrêmes E et E' de la barre, au lieu d'être zéro comme la température extérieure $\zeta$, étaient des températures invariables et données $\theta$ et $\theta'$, il serait facile d'étendre la formule (25) à cette hypothèse.

Pour cela, je partage la valeur de $u$ en deux parties $\varphi x$ et $u'$,

dont la première soit une fonction de $x$ seulement, et la seconde une fonction de $x$ et de $t$. Je suppose cette première partie $\varphi x$ déterminée par l'équation

$$a^2 \frac{d^2\varphi x}{dx^2} - b\varphi x = 0,$$

et telle que l'on ait $\varphi x = \theta$ pour $x = 0$, $\varphi x = \theta'$ pour $x = l$. En intégrant cette équation, et déterminant les deux constantes arbitraires, d'après ces valeurs particulières de $\varphi x$, on trouvera, sans difficulté,

$$\varphi x = \mathrm{A}e^{gx} + \mathrm{B}e^{-gx},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$g = \frac{\sqrt{b}}{a}, \quad \mathrm{A} = \frac{\theta' - \theta e^{-gl}}{e^{gl} - e^{-gl}}, \quad \mathrm{B} = \frac{\theta e^{gl} - \theta'}{e^{gl} - e^{-gl}}.$$

La valeur complète $\varphi x + u'$ de $u$ devant satisfaire à l'équation (19) du mouvement de la chaleur, et la partie $\varphi x$ remplissant déjà cette condition, il faudra qu'on ait

$$\frac{du'}{dt} = a^2 \frac{d^2u'}{dx^2} - bu';$$

de plus, il faudra que l'inconnue $u'$ s'évanouisse pour $x = 0$ et pour $x = l$, puisque déjà, à ces deux limites, $\varphi x$ a pour valeurs $\theta$ et $\theta'$, qui doivent être celles de $u$; par conséquent, l'expression de $u'$ sera donnée par la formule (25), en y mettant à la place de $fx$ la valeur initiale et inconnue de $u'$, que je représenterai par $f'x$, et qui sera nulle comme $u'$ aux deux limites $x = 0$ et $x = l$. De cette manière, nous aurons d'abord

$$u = \mathrm{A}e^{gx} + \mathrm{B}e^{-gx} + \frac{2}{l}e^{-bt}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{n\pi x'}{l}\, f'x'dx'\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}.$$

Cela posé, désignons toujours par $fx$ la valeur initiale de $u$; en sorte que $fx$ soit une fonction de $x$ donnée arbitrairement, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, mais dont les valeurs doivent être $\theta$ et $\theta'$ pour les deux valeurs extrêmes zéro et $l$ de $x$. En faisant $t = 0$ dans l'équation précédente, et observant que la somme $\Sigma$ comprise dans le

second membre a alors $\frac{l}{2} f'x$ pour valeur, il en résultera

$$f'x = fx - Ae^{gx} - Be^{-gx}.$$

D'ailleurs, en effectuant les intégrations, on a

$$\int_0^l e^{gx'} \sin \frac{n\pi x'}{l}\, dx' = \frac{n\pi l\,(1 - e^{gl} \cos n\pi)}{n^2\pi^2 + g^2 l^2},$$
$$\int_0^l e^{-gx'} \sin \frac{n\pi x'}{l}\, dx' = \frac{n\pi l\,(1 - e^{-gl} \cos n\pi)}{n^2\pi^2 + g^2 l^2};$$

et, d'après ces valeurs et celles de A et B, nous aurons finalement

$$\begin{aligned} u = & \frac{\theta' (e^{gx} - e^{-gx}) + \theta\,(e^{g(l-x)} - e^{-g(l-x)})}{e^{gl} - e^{-gl}} \\ & + 2\pi e^{-ht} \Sigma \frac{n(\theta' \cos n\pi - \theta)}{n^2\pi^2 + g^2 l^2} \sin \frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}} \qquad (26) \\ & + \frac{2}{l} e^{-ht} \Sigma \left(\int_0^l \sin \frac{n\pi x'}{l} fx' dx'\right) \sin \frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}. \end{aligned}$$

On appliquera cette formule au cas d'un anneau dont un point a une température invariable et égale à $\theta$, en y faisant $\theta' = \theta$ : ce point est l'origine des distances $x$, comptées sur l'axe curviligne de l'anneau, dont $l$ est la longueur.

(133). Si le rayonnement est nul aux deux extrémités de la barre, il faudra faire à la fois $\varpi = 0$ et $\varpi' = 0$ dans les équations (4), et, conséquemment, dans l'équation (20), ce qui la réduit à $\rho^2 \sin 2\rho l = 0$. Elle aura donc une racine triple $\rho = 0$; mais, d'après ce qu'on a dit plus haut, on ne devra employer qu'une seule fois cette valeur de $\rho$. Le terme correspondant de la formule (18) se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$; on en obtiendra la véritable valeur en supposant cette quantité $\rho$ infiniment petite; la valeur de X donnée par la formule (21) se réduira alors à $X = -2\rho k$, dans le cas que nous considérons où $\varpi$ et $\varpi'$ sont zéro; et le terme correspondant de la formule (18), multiplié par $e^{-ht}$, sera

$$\frac{1}{2l} e^{-ht} \int_l^l Fx'dx'.$$

Les autres valeurs de $\rho$ tirées de l'équation $\sin 2\rho l = 0$, seront

tous les multiples de $\frac{\pi}{2l}$; mais il importera de distinguer les uns des autres les multiples pairs et les multiples impairs. En désignant par $n$ un nombre entier et positif, on fera donc successivement

$$\rho = \frac{n\pi}{l}, \quad \rho = \frac{(2n-1)\pi}{2l}.$$

Pour la première de ces deux valeurs, la formule (21) donnera, dans le cas dont il s'agit,

$$X = -\frac{2n\pi k \cos n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l};$$

d'où l'on tire

$$\int_{-l}^{l} X^2 dx = \frac{4n^2\pi^2k^2}{l};$$

au moyen de quoi la partie correspondante de la valeur de $u$, déduite de la formule (18), ainsi qu'on l'a expliqué plus haut, sera

$$\frac{1}{l} e^{-ht} \Sigma \left( \int_{-l}^{l} \cos \frac{n\pi x'}{l} \operatorname{F}x' dx' \right) \cos \frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}.$$

La seconde des deux valeurs précédentes de $\rho$ rendra nulle la valeur de X tirée de l'équation (21), et qui répond à $\varpi = 0$ et $\varpi' = 0$. Tous les termes de la partie correspondante de $u$ se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$; et, pour en déterminer les vraies valeurs, il faudra supposer que les constantes $\varpi$ et $\varpi'$ ne soient qu'infiniment petites. Pour une valeur de $\rho$ infiniment peu différente de $\frac{(2n-1)\pi}{2l}$, la formule (21) se réduira à

$$X = 2k\delta \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l};$$

en désignant par $\delta$ une constante infiniment petite, et négligeant les infiniment petits du second ordre. On en conclut

$$\int_{-l}^{l} X^2 dx = 4lk^2\delta^2;$$

et, d'après ces valeurs, la partie correspondante de $u$ sera

$$\frac{1}{l} e^{-ht} \Sigma \left( \int_{-l}^{l} \sin \frac{(2n-1)\pi x'}{2l} \operatorname{F}x' dx' \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}\, e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}}.$$

Cela posé, nous aurons

$$u = \frac{1}{2l} e^{-bt} \int_{-l}^{l} \mathrm{F}x'dx' + \frac{1}{l} e^{-bt} \Sigma \Big[ \Big( \int_{-l}^{l} \cos \frac{n\pi x'}{l} \mathrm{F}x'dx' \Big) \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}$$
$$+ \Big( \int_{-l}^{l} \sin \frac{(2n-1)\pi x'}{2l} \mathrm{F}x'dx' \Big) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}} \Big],$$

pour la valeur complète de $u$ dans le cas d'une barre terminée par deux sections normales qui sont imperméables à la chaleur; la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs de $n$, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$, et l'origine des distances $x$ étant au milieu de la barre dont la longueur est $2l$.

Quand la constante $b$ n'est pas nulle, cette température $u$ devient zéro après un certain temps, à cause du rayonnement latéral de la barre; mais si $b=0$, la surface de la barre est partout imperméable à la chaleur; et alors la température finale, au lieu d'être zéro, est égale, en tous ses points, à la moyenne de ses valeurs initiales. On voit, en effet, qu'au bout d'un certain temps la somme $\Sigma$ s'évanouit toujours, et la valeur de $u$ relative à $b=0$, se réduit à cette moyenne $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \mathrm{F}x'dx'$.

On peut mettre l'expression de $u$ en fonction de $t$ et $x$, sous une forme un peu plus simple, en transportant l'origine des distances $x$ à l'une des extrémités de la barre, et changeant, en conséquence, $x$ et $x'$ en $x \pm l$ et $x' \pm l$. Les deux parties comprises sous la somme $\Sigma$ se réunissent alors en une seule; les limites des intégrales définies deviennent zéro et $l$; et si l'on change, en outre, $l$ en $\frac{1}{2}l$, et qu'on fasse $\mathrm{F}(x \pm \frac{1}{2}l) = fx$, il vient

$$u = \frac{1}{l} e^{-bt} \int_{0}^{l} fx'dx' + \frac{2}{l} e^{-bt} \Sigma \Big( \int_{0}^{l} \cos \frac{n\pi x'}{l} fx'dx' \Big) \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}};$$

la somme $\Sigma$ s'étendant toujours à toutes les valeurs de $n$, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$. Au lieu de déduire, comme nous l'avons fait, cette expression de $u$, ou la précédente, du cas général où les quantités $\varpi$ et $\varpi'$ ont des valeurs quelconques, ce qui a exigé une attention particulière, on aurait pu aussi considérer immédiatement le cas

particulier où l'on a $\varpi = 0$ et $\varpi' = 0$, et déterminer directement, par l'analyse du n° 128, la valeur de $u$ qui s'y rapporte.

Si l'on fait $t = 0$ et $u = fx$ dans la formule précédente, on aura

$$fx = \frac{1}{l}\int_0^l fx'dx' + \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \cos\frac{n\pi x'}{l} fx'dx'\right)\cos\frac{n\pi x}{l};$$

ce qui est effectivement vrai, en vertu de l'équation (9) du n° 96, pour toutes les valeurs comprises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, inclusivement. La différentielle de cette équation ne subsiste, comme cela doit être, aux deux limites $x = 0$ et $x = l$ que quand la valeur de $\frac{dfx}{dx}$ s'évanouit pour ces deux valeurs de $x$.

(134). Lorsque l'axe de la barre formera une courbe fermée, on comptera les distances $x$ sur cette courbe, à partir d'un point fixe, choisi arbitrairement; et si $l$ est la longueur de la courbe entière, il faudra que les valeurs de $u$ et $\frac{du}{dx}$, qui répondent à $x = 0$, soient les mêmes que celles qui ont lieu pour $x = l$; d'où il résultera deux équations particulières qui remplaceront les équations (4), ainsi qu'on l'a dit précédemment (n° 118). Il serait facile, d'après cela, de déterminer, par l'analyse du n° 128, la loi des températures dans un anneau hétérogène, d'une épaisseur variable, et dont la surface varie aussi d'un point à un autre; mais nous nous bornerons à considérer le cas d'un anneau homogène, dans lequel l'état de la surface et la section normale seront partout les mêmes. Cet anneau se refroidira librement, c'est-à-dire, que la température d'aucun de ses points ne sera entretenue forcément à un degré constant; on fera abstraction du rayonnement de l'anneau sur lui-même, et la température extérieure sera toujours supposée égale à zéro; en sorte que l'équation (19) sera celle du mouvement de la chaleur suivant la longueur de l'anneau que nous allons considérer.

Nous aurons

$$u = e^{-bt}\Sigma(\mathrm{A}\sin\rho x + \mathrm{B}\cos\rho x)e^{-a^2\rho^2 t},$$

pour l'intégrale complète de cette équation en série d'exponentielles; la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs possibles, réelles

ou imaginaires des trois constantes $\rho$, A, B. Pour que les valeurs de $u$ qui répondent à $x=0$ et $x=l$ soient égales, et qu'il en soit de même à l'égard des valeurs de $\frac{du}{dx}$, quelle que soit la valeur de $t$, il faudra qu'on ait

$$B = A\sin\rho l + B\cos\rho l,$$
$$A = A\cos\rho l - B\sin\rho l.$$

En éliminant A ou B, l'équation qui en résulte se réduit à $\cos\rho l = 1$. Si l'on désigne par $n$ un nombre entier ou zéro, on aura donc $\rho l = 2n\pi$; pour cette valeur de $\rho l$, celles de A et B resteront indéterminées, et la valeur de $u$ deviendra

$$u = e^{-bt}\Sigma\left(A\sin\frac{2n\pi x}{l} + B\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)e^{-\frac{4n^2\pi^2a^2t}{l^2}}.$$

La somme $\Sigma$ devra s'étendre à toutes les valeurs positives ou négatives de $n$; mais on peut supposer réunis en un seul les deux termes de cette somme qui répondent à chaque couple de valeurs de $n$ égales et de signes contraires, et ne plus étendre la somme $\Sigma$ qu'aux valeurs de $n$ positives, y compris zéro; au moyen de quoi les exponentielles qu'elle contient seront toutes distinctes les unes des autres.

Le cas qui nous occupe diffère des précédens en ce qu'il reste deux coefficiens A et B, au lieu d'un seul, à déterminer d'après l'état initial de l'anneau; ce qui n'empêche pas que la méthode générale indiquée dans le n° 85, ne s'applique également à cette détermination.

En effet, désignons par $\alpha$ et $\mathcal{C}$ deux constantes quelconques, et faisons, pour abréger,

$$\alpha\sin\frac{2n\pi x}{l} + \mathcal{C}\cos\frac{2n\pi x}{l} = X.$$

Multiplions, conformément à cette méthode, l'équation (19) par $Xdx$, puis intégrons depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$; nous aurons

$$\frac{d.\int_0^l Xudx}{dt} = a^2\int_0^l \frac{d^2u}{dx^2}Xdx - b\int_0^l Xudx.$$

Si l'on intègre deux fois de suite par partie, et si l'on observe que chacune des quantités $u$, $\frac{du}{dx}$, X, $\frac{dX}{dx}$, a la même valeur pour $x=0$ et pour $x=l$, on aura

$$\int_0^l \frac{d^2u}{dx^2}Xdx = \int_0^l \frac{d^2X}{dx^2}udx = -\frac{4n^2\pi^2}{l^2}\int_0^l Xudx,$$

en ayant égard à la valeur de X. On aura donc

$$\frac{d.\int_0^l Xudx}{dt} = -\left(b+\frac{4n^2\pi^2a^2}{l^2}\right)\int_0^l Xudx;$$

équation dont l'intégrale est

$$\int_0^l Xudx = De^{-bt}e^{-\frac{4n^2\pi^2a^2t}{l^2}};$$

D étant la constante arbitraire. Pour la déterminer, je suppose qu'on ait $u=fx$ quand $t=0$, de sorte que $fx$ soit une fonction donnée arbitrairement depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$, mais assujettie à la condition d'avoir la même valeur à ces deux limites. Il en résultera

$$D=\int_0^l Xfxdx.$$

A un instant quelconque, on aura donc

$$\int_0^l Xudx = e^{-bt}e^{-\frac{4n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\int_0^l Xfxdx. \qquad (27)$$

Cela posé, si $n$ et $n'$ sont deux nombres entiers ou zéro, différens l'un de l'autre, on aura

$$\int_0^l \sin\frac{2n\pi x}{l}\sin\frac{2n'\pi x}{l}dx = 0,$$

$$\int_0^l \sin\frac{2n\pi x}{l}\cos\frac{2n'\pi x}{l}dx = 0,$$

$$\int_0^l \sin\frac{2n'\pi x}{l}\cos\frac{2n\pi x}{l}dx = 0;$$

$$\int_0^l \cos\frac{2n\pi x}{l}\cos\frac{2n'\pi x}{l}dx = 0;$$

dans le cas de $n' = n$, on aura aussi

$$\int_0^l \sin^2 \frac{2n\pi x}{l} dx = \int_0^l \cos^2 \frac{2n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} l,$$

$$\int_0^l \sin \frac{2n\pi x}{l} \cos \frac{2n\pi x}{l} dx = 0,$$

en observant que si $n = 0$, la dernière intégrale sera toujours zéro, mais les deux précédentes ne seront plus égales : la première sera zéro, et la seconde égale à $l$. On conclut de là que si l'on substitue dans l'équation (27), à la place de $u$ et de X, leurs valeurs, on aura

$$\frac{1}{2} l (\alpha A + 6B) = \alpha \int_0^l \sin \frac{2n\pi x}{l} fx dx + 6 \int_0^l \cos \frac{2n\pi x}{l} fx dx,$$

pour une valeur quelconque de $n$, et en particulier

$$lB = \int_0^l fx dx,$$

pour $n = 0$. Les équations précédentes devant subsister pour toutes les valeurs des constantes $\alpha$ et $6$, elle se décomposera en deux autres, savoir :

$$\frac{1}{2} lA = \int_0^l \sin \frac{2n\pi x}{l} fx dx,$$

$$\frac{1}{2} lB = \int_0^l \cos \frac{2n\pi x}{l} fx dx.$$

Par conséquent, les coefficiens A et B seront déterminés pour toutes les valeurs de $n$, excepté le coefficient A relatif à $n = 0$, qui demeure indéterminé, mais qui disparaît de l'expression de $u$.

Au moyen de ces valeurs de A et B, et en changeant $x$ en $x'$ sous les intégrales définies, l'expression de $u$ sera finalement

$$u = \frac{1}{l} e^{-bt} \int_0^l fx' dx' + \frac{2}{l} e^{-bt} \Sigma \left( \int_0^l \cos \frac{2n\pi (x - x')}{l} fx' dx' \right) e^{-\frac{4n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}; \quad (28)$$

la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs de $n$, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$.

Si l'on y fait $t = 0$ et $u = fx$, on a

$$fx = \frac{1}{l} \int_0^l fx' dx' + \frac{2}{l} \Sigma \left( \int_0^l \cos \frac{2n\pi (x - x')}{l} fx' dx' \right);$$

résultat qui s'accorde avec la formule (5) du n° 93, et qui a lieu depuis $x = o$ jusqu'à $x = l$, y compris les valeurs extrêmes zéro et $l$, puisqu'on a, par hypothèse, $fo = fl$.

L'expression de $u$ est, comme on voit, une fonction de $x$ qui demeure la même, ainsi qu'on l'a dit plus haut (n° 118), lorsqu'on y augmente ou diminue la variable $x$ d'un multiple quelconque de $l$. Au bout d'un certain temps, qui n'est pas très long en général, la somme $\Sigma$ se réduit sensiblement au terme correspondant à $n = 1$. A cette époque si l'on appelle $v$ la valeur de $u$ relative à $x + \frac{1}{2} l$, ce terme disparaît dans la somme $u + v$, et l'on a simplement

$$u + v = \frac{2}{l} e^{-bt} \int_o^l fx' dx' ;$$

d'où il résulte que l'anneau parvient toujours à un état dans lequel la somme des températures qui répondent aux extrémités d'un même diamètre, est la même pour tous les diamètres, et décroît en progression géométrique, lorsque le temps, à partir de cette époque, croît par des différences égales. Au bout d'un temps encore plus long la somme $\Sigma$ disparaît en entier, et les températures de tous les points de l'anneau décroissent suivant cette même progression géométrique. Enfin, ces températures deviennent toutes égales à zéro, comme la température extérieure, excepté dans le cas de l'imperméabilité calorifique de la surface, où l'on a $b = o$, et où elles convergent toutes vers une température constante et égale à la moyenne $\frac{1}{l} \int_o^l fx' dx'$ des températures initiales.

(135). La valeur de $u$ que l'on déduit de la formule (26) en y faisant $\theta' = \theta$, et qui se rapporte à un anneau dont une section normale est entretenue à une température invariable et égale à $\theta$, diffère essentiellement de la valeur de $u$ donnée par la formule (28) et relative à un anneau qui se refroidit librement. Au bout d'un certain temps, la somme $\Sigma$ disparaît de la première valeur de $u$, et l'anneau parvient à un état stationnaire, dans lequel la température d'un point quelconque se réduit à

$$u = \frac{\theta \left( e^{-\frac{1}{2} gl} e^{gx} + e^{\frac{1}{2} gl} e^{-gx} \right)}{e^{-\frac{1}{2} gl} + e^{\frac{1}{2} gl}} .$$

Maintenant, si l'on supprime la cause qui entretenait la température $\theta$ de l'un des points de l'anneau, et qu'on laisse ce corps refroidir librement, il faudra, pour déterminer la loi de ses températures au bout d'un temps $t$ à partir de cette suppression, substituer cette valeur de $u$ à la place de $fx$ dans la formule (28). Or, on a

$$\frac{1}{l}\int_0^l e^{gx'}\cos\frac{2n\pi(x'-x)}{l}dx' = \frac{(e^{gl}-1)\left(gl\cos\frac{2n\pi x}{l}-2n\pi\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)}{4n^2\pi^2+g^2l^2},$$

$$\frac{1}{l}\int_0^l e^{-gx'}\cos\frac{2n\pi(x'-x)}{l}dx' = \frac{(1-e^{-gl})\left(gl\cos\frac{2n\pi x}{l}+2n\pi\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)}{4n^2\pi^2+g^2l^2};$$

au moyen de quoi la formule (28) deviendra

$$u = \frac{2\theta gle^{-bt}(e^{\frac{1}{2}gl}-e^{-\frac{1}{2}gl})}{e^{\frac{1}{2}gl}+e^{-\frac{1}{2}gl}}\left[\frac{1}{g^2l^2}+2\Sigma\frac{\cos\frac{2n\pi x}{l}}{4n^2\pi^2+g^2l^2}e^{-\frac{4n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\right].$$

En y faisant $t=0$, on devra retrouver la valeur particulière $fx$ de $u$, d'où l'on est parti; et si l'on met pour plus de simplicité $2l$ au lieu de $l$, puis $x-l$ au lieu de $x$, il en résultera

$$\frac{e^{gx}+e^{-gx}}{gl(e^{gl}-e^{-gl})} = \frac{1}{g^2l^2}+2\Sigma\frac{\cos n\pi\cos\frac{n\pi x}{l}}{n^2\pi^2+g^2l^2},$$

pour toutes les valeurs de $x$, depuis $x=-l$ jusqu'à $x=l$; ce qui est effectivement une formule connue, qui subsiste également lorsqu'on y met $g\sqrt{-1}$ au lieu de $g$ (*).

Nous ferons aussi remarquer qu'en mettant $l-x$ au lieu de $x$ dans cette dernière équation, de sorte que $\cos n\pi\cos\frac{n\pi x}{l}$ se change en $\cos\frac{n\pi x}{l}$; multipliant ses deux membres par $l$, supposant ensuite $l=\infty$, et faisant

$$\frac{n\pi}{l}=z,\quad \frac{\pi}{l}=dz;$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 18e cahier, page 312.

la somme $\Sigma$ se changera en une intégrale relative à $z$, qui s'étendra depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$; le terme compris en dehors de cette somme s'évanouira; et si $g$ est une quantité positive et $x$ une quantité finie, on aura

$$\frac{e^{g(l-x)}+e^{-g(l-x)}}{e^{gl}-e^{-gl}}=e^{-gx}.$$

Par conséquent, l'équation précédente deviendra

$$\int_0^\infty \frac{\cos zx dz}{z^2+g^2}=\frac{\pi}{2g}e^{-gx};$$

ce qui est encore une formule connue, qui nous sera utile dans la suite, ainsi que sa différentielle relative à $x$, savoir:

$$\int_0^\infty \frac{z \sin zx dz}{z^2+g^2}=\frac{\pi}{2}e^{-gx}.$$

(136). Il nous reste encore à considérer la propagation de la chaleur dans une barre droite ou courbe, qui se prolonge indéfiniment de part et d'autre du point C, d'où l'on compte les distances $x$. Je supposerai cette barre homogène, sa section normale constante, et sa surface partout dans le même état; et pour déterminer dans ce cas la valeur de $u$ en fonction de $t$ et $x$, je ferai usage de l'intégrale sous forme finie de l'équation (19) du mouvement de la chaleur.

D'après ce qu'on a vu dans le n° 74, cette intégrale sera

$$u=\frac{e^{-bt}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}f(x+2a\alpha\sqrt{t})\,d\alpha; \qquad (29)$$

$fx$ étant la fonction arbitraire qui exprimera la valeur de $u$ correspondante à $t=0$, et sera donnée par conséquent, d'après l'état initial de la barre, depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=\infty$. Au moyen de cette formule, on pourra donc toujours calculer par les quadratures, la température d'un point quelconque à un instant donné; ce qui est la solution complète du problème.

Supposons que la barre n'a été échauffée primitivement que dans une portion limitée qui s'étendait depuis $x=-\varepsilon$ jusqu'à $x=\varepsilon$, de sorte qu'en dehors de ces limites sa température initiale $fx$ était zéro,

comme la température extérieure. Si nous faisons

$$x + 2\alpha a\sqrt{t} = x',$$

il en résultera

$$\alpha = \frac{x' - x}{2a\sqrt{t}}, \quad d\alpha = \frac{dx'}{2a\sqrt{t}},$$

et la fonction $fx'$ étant zéro pour toutes les valeurs de $x' > \varepsilon$ ou $< -\varepsilon$, il suffira d'intégrer par rapport à $x'$, depuis $x' = -\varepsilon$ jusqu'à $x' = \varepsilon$; en sorte que l'on aura

$$u = \frac{e^{-bt}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}} fx' dx'.$$

Cette expression de $u$ nous montre que la chaleur communiquée à une portion de la barre se répand instantanément dans toute sa longueur; car, quelque grande que soit la distance $x$, et quelque petit que soit le temps $t$, il y aura toujours une valeur de $u$ qui ne sera pas rigoureusement nulle. Ce résultat tient à ce qu'en formant l'équation du mouvement de la chaleur, nous avons supposé instantanés les échanges de chaleur entre les tranches de la barre comprises dans l'étendue du rayonnement intérieur. Or, quelque rapides que soient ces échanges, ils ne peuvent avoir lieu dans la nature qu'en des intervalles de temps de grandeur finie; et si nous avions eu égard à cette circonstance, la conductibilité $k$ et par suite la quantité $a$ ne seraient plus rigoureusement constantes : $a$ serait une fonction du temps qui varierait d'abord très rapidement, et atteindrait bientôt une valeur constante; ce qui suffirait pour empêcher que la communication de la chaleur ne fût instantanée à toute distance du lieu de l'échauffement primitif. Mais on voit aussi, en ayant égard à l'exponentielle contenue sous le signe $\int$, que la valeur précédente de $u$ sera tout-à-fait imperceptible, hors de l'étendue de l'échauffement primitif, tant que la quantité $2a\sqrt{t}$ sera très petite par rapport à la distance $x$, ou plus exactement $x \pm \varepsilon$. Si l'on considère des points de la barre très éloignés du lieu de cet échauffement, et si l'on attend que l'élévation de température y soit devenue sensible, on pourra la calculer avec une très grande approximation, en négligeant $x'$ dans l'exponentielle dont il s'agit. De cette manière, on aura

simplement

$$u = \frac{e^{-bt}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} fx'\,dx'.$$

En appelant A la quantité totale de chaleur communiquée primitivement à la barre, on aura aussi

$$A = c\omega \int_{-\epsilon}^{\epsilon} fx'\,dx';$$

et en éliminant entre ces deux équations l'intégrale qu'elles contiennent, il en résulte

$$u = \frac{Ae^{-bt}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2c\omega a\sqrt{\pi t}};$$

où l'on voit que la température des points très éloignés de l'échauffement primitif ne dépendra que de la quantité de chaleur A, et nullement de la loi de sa distribution initiale, ou de la forme de la fonction $fx$.

Pour comparer deux barres de matières différentes, sous le rapport des plus ou moins longs temps qu'elles emploient à transmettre des quantités égales de chaleur à la même distance, nous ferons abstraction du rayonnement de leurs surfaces. Soit donc $b = 0$, nous aurons

$$c\omega u = \frac{Ae^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Ce produit $c\omega u$ est la quantité de chaleur transmise dans le temps $t$ à la distance $x$; en déterminant son *maximum* par rapport à $t$, on trouve qu'il répond à $t = \frac{x^2}{2a^2}$, et qu'il est égal à $\frac{A}{x\sqrt{2\pi e}}$. Il ne dépend donc pas de la quantité $a$, ni de rien qui soit relatif à la matière de la barre; en sorte que deux barres de matières différentes transmettent néanmoins le même *maximum* de chaleur à une distance donnée; mais cette transmission a lieu dans des temps différens; et d'après la valeur de $t$ qui répond à ce *maximum*, elle est la plus rapide dans la barre pour laquelle la quantité $a$ est la plus grande.

Or, nous avons fait $\frac{k}{c} = a^2$ (n° 129); il s'ensuit donc que ce n'est pas toujours la matière qui a la plus grande conductibilité $k$, qui conduit le plus promptement la chaleur à une distance donnée; cette propriété dépend à la fois de la grandeur de $k$ et de celle de la chaleur spécifique $c$ de cette matière.

Dans mon premier mémoire sur la *distribution de la chaleur dans les corps solides*, j'ai appliqué la formule (29), non-seulement au cas d'une barre indéfiniment prolongée, mais aussi au cas d'une barre dont la longueur est limitée, et j'ai fait voir comment, dans ce dernier cas, cette formule se transforme toujours en une série d'exponentielles. Dans les numéros qui précèdent, j'ai suivi une marche inverse : ayant préalablement établi que la valeur inconnue de $u$ peut être représentée, quelle qu'elle soit, par une série d'exponentielles, j'ai employé une série de cette forme pour satisfaire simultanément à toutes les conditions de chaque problème. Cette méthode est plus simple que la première, et c'est celle que je suivrai constamment dans cet ouvrage; mais, sous le rapport de l'analyse, la réduction de l'intégrale définie que contient la formule (29), en des séries différentes d'exponentielles, selon les diverses conditions relatives aux extrémités de la barre, est néanmoins une transformation délicate et importante, pour laquelle je renverrai au mémoire cité (*).

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 19e cahier, page 27.

# CHAPITRE X.

*Distribution de la chaleur dans les corps sphériques.*

(137). Dans ce chapitre, nous supposerons que tous les points également éloignés du centre de la sphère ou de la couche sphérique que nous voudrons considérer, ont à chaque instant une même température; en sorte qu'en désignant par $r$ la distance d'un point quelconque de cette couche à son centre, la température $u$ de ce point, au bout du temps $t$, sera une fonction de $r$ et $t$, qu'il s'agira de déterminer; et l'inconnue ne dépendant ainsi que de deux variables, le problème sera semblable à celui du chapitre précédent.

Afin de rendre linéaire l'équation du mouvement de la chaleur, c'est-à-dire l'équation (7) du n° 49, nous supposerons la chaleur spécifique $c$ et la conductibilité $k$ indépendantes de la température $u$. Si la couche sphérique est hétérogène, les quantités $k$ et $c$ seront supposées des fonctions de $r$. Nous supposerons, de plus, que chacune de ses deux surfaces soit partout dans le même état, et que la température extérieure ne dépende que de $t$. Ces conditions sont nécessaires pour que la température $u$ puisse être, comme on vient de le dire, une fonction de $r$ et $t$ seulement; ce qui aura effectivement lieu au bout d'un temps quelconque, lorsqu'en outre la température initiale ne sera fonction que de $r$.

Cela étant, cette équation générale du mouvement de la chaleur se réduira à

$$cr^2 \frac{du}{dt} = \frac{d \,.\, r^2 k \frac{du}{dr}}{dr}, \qquad (1)$$

ainsi qu'on l'a vu dans le n° 120. En appelant $h'$ et $h$ les rayons

des surfaces concentriques, extérieure et intérieure, de la couche sphérique, nous aurons d'abord, en vertu de l'équation (2) du n° 67,

$$\frac{du}{dr} + p(u - \zeta) = 0, \quad \text{quand} \quad r = h'; \qquad (2)$$

$\zeta$ étant la température extérieure, qui pourra être une fonction donnée de $t$, et $p$ désignant un coefficient constant et positif, dépendant de l'état de la surface extérieure et de la conductibilité $k$ qui a lieu près de cette surface, c'est-à-dire, pour abréger, le coefficient $p$ de l'équation citée, divisé par cette quantité $k$. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'on ait fait le vide dans l'espace terminé par la surface intérieure; les échanges de chaleur entre les points voisins de cette surface répondant, par hypothèse, à des températures égales, il s'ensuit que le flux de chaleur sera nul à travers chaque élément de cette même surface; par conséquent, on aura

$$\frac{du}{dr} = 0, \quad \text{quand} \quad r = h. \qquad (3)$$

Telles sont donc les trois équations du mouvement de la chaleur dans la couche sphérique, d'une épaisseur constante et égale à $h' - h$, que nous considérons. En les comparant aux équations (3) et (4) des n$^{os}$ 117 et 118, on voit qu'elles coïncident avec celles-ci, en faisant

$$x = r, \quad \omega = r^2, \quad \varpi = 0, \quad \varpi' = pk,$$

et supprimant dans l'équation (3) le terme relatif au rayonnement latéral de la barre. Il s'ensuit que la loi des températures dans l'épaisseur de la couche sphérique se déterminera au moyen des formules du n° 128, que nous appliquerons tout à l'heure au cas d'une couche homogène. Auparavant, nous ferons remarquer que si les quantités $c$ et $k$ variaient en raison inverse du carré de la distance $r$, la distribution de la chaleur dans la couche sphérique serait la même, d'après les équations précédentes, que dans une barre cylindrique pour laquelle le rayonnement latéral et celui de l'une de ses deux extrémités seraient zéro; si l'on avait, en outre, $p = 0$, cette distribution serait celle que nous avons déterminée dans le n° 133, en faisant $b = 0$, dans les formules de ce numéro.

(138). Dans le cas de l'homogénéité, où les quantités $k$ et $c$ sont constantes, je fais $\frac{k}{c} = a^2$, et j'écris l'équation (1) sous la forme

$$\frac{d.ru}{dt} = a^2 \frac{d^2.ru}{dr^2}.$$

En supprimant le terme qui dépend du rayonnement latéral dans l'équation (15) du n° 128, faisant $x = r$ et $\omega = r^2$, et y mettant, pour plus de commodité, $a^2\rho^2$ au lieu de $\rho$, elle deviendra

$$\frac{d^2.rR}{dr^2} + \rho^2 rR = 0.$$

On pourra prendre

$$rY = \sin.\rho r, \quad rY' = \cos \rho r,$$

pour déterminer les valeurs particulières de R désignées par Y et Y' dans ce numéro. Il en résultera

$$\begin{aligned}
hH &= \sin \rho h, & h^2G &= \rho h \cos \rho h - \sin \rho h, \\
hH_{,} &= \cos \rho h, & h^2G_{,} &= -\rho h \sin \rho h - \cos \rho h, \\
h'H' &= \sin \rho h', & h'^2G' &= \rho h' \cos \rho h' - \sin \rho h', \\
h'H'_{,} &= \cos \rho h', & h'^2G'_{,} &= -\rho h' \sin \rho h' - \cos \rho h';
\end{aligned}$$

au moyen de quoi et de $\varpi' = pk$ et $\varpi = 0$, l'équation (16) de ce même numéro, d'où dépendent les valeurs de $\rho$, deviendra

$$(\rho^2 hh' + 1 - ph') \sin \rho l = (l + phh') \rho \cos \rho l, \qquad (4)$$

en désignant par $l$ l'épaisseur $h' - h$ de la couche sphérique. L'équation (17) sera, en même temps,

$$\begin{aligned}
h^2h'^2 rX = k(1 - ph')h^2 \sin \rho(h' - r) - kh'^2 \sin \rho(r - h) \\
- khh'\rho[h' \cos \rho(r - h) + h \cos \rho(h' - r)]; \qquad (5)
\end{aligned}$$

et si l'on fait, dans la formule (18) du numéro cité, $x = r$ et $\omega = r^2$, que l'on y supprime le facteur $c$ constant et commun au numérateur et au dénominateur, et que l'on y remplace $\rho$ par $a^2\rho^2$,

on aura

$$u = \Sigma\left(\frac{\int_h^{h'} r^2 \mathrm{X} \mathrm{F} r dr}{\int_h^{h'} r^2 \mathrm{X}^2 dr}\right) \mathrm{X} e^{-a^2\rho^2 t}; \qquad (6)$$

la fonction F$r$ étant la valeur initiale de $u$, et la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs positives de $\rho$, tirées de l'équation (4), y compris $\rho = 0$.

Pour faire usage de cette formule, on formera l'intégrale $\int_h^{h'} r^2 \mathrm{X}^2 dr$, dont la valeur exacte s'obtiendra immédiatement d'après celle de X; on éliminera ensuite de cette intégrale sin $\rho l$ et cos $\rho l$, au moyen de l'équation (4); puis on substituera sa valeur, ainsi préparée, dans la formule (6). Cela fait, on mettra successivement dans cette formule la racine $\rho = 0$ et les autres racines de l'équation (4), calculées par approximation, quand les valeurs numériques de $p$, $h$, $h'$, $l$, seront données. Le terme de cette formule qui répondra à $\rho = 0$ s'évanouira toujours; mais quand la quantité $p$ sera nulle, on la supposera d'abord infiniment petite, et l'équation (4) aura aussi une racine infiniment petite, indépendamment de $\rho = 0$, à laquelle il faudra avoir égard.

On déterminera cette racine en substituant à la place de sin $\rho l$ et cos $\rho l$ leurs développemens, supprimant ensuite le facteur $\rho$ commun aux deux membres de l'équation (4), et négligeant, après cela, les termes qui ont $\rho^4$ ou $\rho^2 p$ pour facteur. De cette manière, on trouve

$$\rho^2 l(hh' + \tfrac{1}{3}l^2) = ph'^2;$$

d'où l'on déduirait la valeur infiniment petite de $\rho$, correspondante à celle de $\rho^2$. En même temps, l'équation (5) se réduit à

$$h^2 h'^2 r\mathrm{X} = -k(h^2 + h'^2) r\rho,$$

en négligeant le cube de $\rho$ et le produit $\rho p$. Si l'on appelle L le volume de la couche sphérique, de sorte qu'on ait

$$\frac{4\pi}{3}(h'^3 - h^3) = \mathrm{L},$$

il en résultera

$$4\pi h^4 h'^4 \int_h^{h'} r^2 X^2 dr = k^2 \rho^2 (h^2 + h'^2)^2 L;$$

et au moyen de ces différentes valeurs, le terme de $u$ qui répond aux valeurs infiniment petites de $p$ et $\rho$, sera

$$u = \frac{4\pi}{L} \int_h^{h'} r^2 F r dr;$$

ce qui est évidemment la moyenne des températures initiales de la couche entière. Les autres termes de la valeur complète de $u$ seront insensibles au bout d'un certain temps, et cette température ne différera plus sensiblement de la moyenne de ses valeurs initiales, ainsi que cela doit être, en effet, dans le cas que nous examinons, où le flux de chaleur est nul aux surfaces intérieure et extérieure de la couche, en sorte qu'elle ne peut perdre aucune partie de sa chaleur initiale, qui finit par s'y distribuer uniformément.

(139). Si la couche sphérique se change en une sphère entière, dont le rayon soit $l$, on aura $h = 0$ et $h' = l$; l'équation (4) deviendra

$$(1 - pl) \sin \rho l = \rho l \cos \rho l; \qquad (7)$$

et en considérant $h$ comme un infiniment petit dans le second membre de l'équation (5), elle se réduira à

$$h^2 r X = - k \sin \rho r.$$

On aura donc

$$h^4 \int_0^l r^2 X^2 dr = \frac{k^2 l}{2} - \frac{k^2 \sin \rho l \cos \rho l}{2\rho};$$

et comme l'équation (7) donne

$$\cos \rho l = \frac{1 - pl}{\sqrt{\rho^2 l^2 + (1 - pl)^2}}, \quad \sin \rho l = \frac{\rho l}{\sqrt{\rho^2 l^2 + (1 - pl)^2}},$$

il en résultera

$$h^4 \int_0^l r^2 X^2 dr = \frac{\frac{1}{2} k^2 l [\rho^2 l^2 - pl(1 - pl)]}{\rho^2 l^2 + (1 - pl)^2}.$$

Au moyen de cette valeur et de celle de $h^2rX$, il est facile de voir que l'équation (6) prendra la forme :

$$ru = \frac{2}{l}\Sigma \frac{\rho^2l^2 + (1-pl)^2}{\rho^2l^2 - pl(1-pl)} \left(\int_0^l \sin \rho r . frdr\right) \sin \rho r e^{-a^2\rho^2 t}, \quad (8)$$

en désignant par $fr$ le produit $rFr$ ou la valeur initiale de $ru$, et la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs de $\rho$ tirées de l'équation (7).

Le terme de cette somme qui répond à $\rho = 0$ s'évanouit, comme on l'a dit plus haut. Si la quantité $p$ a une valeur finie, toutes les autres racines de l'équation (7) seront aussi des quantités finies, et tous les termes de la formule (8) s'évanouiront sensiblement après un certain temps. Mais ces termes décroîtront avec des vitesses très inégales, parce que les racines de l'équation (7) seront généralement très différentes; avant que la valeur de $u$ soit réduite à zéro, ou devienne égale à la température intérieure, il y aura donc une époque où la somme $\Sigma$ se réduira, à très peu près, au terme correspondant à la plus petite racine de l'équation (7); en sorte qu'en désignant par $\epsilon$ cette plus petite racine, on aura

$$u = \frac{2[\epsilon^2l^2 + (1-pl)^2] \sin \epsilon r}{[\epsilon^2l^2 - pl(1-pl)]rl} \left(\int_0^l \sin \epsilon r . frdr\right) e^{-a^2\epsilon^2 t};$$

ce qui montre qu'à partir de cette époque les températures de tous les points de la sphère décroîtront suivant une même progression géométrique; le temps croissant par des différences égales. Dans cet état de la sphère, si l'on désigne par $v$ la température de son centre, ou la valeur de $u$ qui répond à $r = 0$, et que l'on compare la température en un point quelconque, à cette température centrale, on aura simplement

$$u = \frac{v \sin \epsilon r}{\epsilon r},$$

où l'on voit que la température $u$ décroît continuellement en allant du centre à la surface, puisque l'arc $\epsilon r$ croît toujours plus rapidement que son sinus.

Si l'on fait $t = 0$ et $ru = fr$ dans l'équation (8), nous aurons

$$fr = \frac{2}{l}\Sigma \frac{[\rho^2l^2 + (1-pl)^2] \sin \rho r}{\rho^2l^2 - pl(1-pl)} \left(\int_0^l \sin \rho r . frdr\right),$$

pour toutes les valeurs de $r > 0$ et $< l$, quelle que soit la fonction

arbitraire $fr$. Pour que cette formule subsiste pour $r=0$, il faudra que $fr$ s'évanouisse à cette limite; et pour qu'elle ait aussi lieu à l'autre limite $r=l$, il sera nécessaire qu'on satisfasse à l'équation (2), en y faisant $u=\frac{1}{r}fr$ et supprimant la quantité $\zeta$, c'est-à-dire, qu'il faudra qu'on ait

$$r\frac{dfr}{dr}-(1-pl)fr=0,$$

pour $r=l$; ce qui résulte, en effet, de la formule précédente et de l'équation (7). Puisque nous avons prouvé préalablement (n° 84) que la série d'exponentielles dont nous sommes partis peut toujours représenter l'inconnue $u$ en fonction de $t$ et de $r$, et comme on peut admettre que les conditions du problème ne sont point incompatibles, de sorte qu'il est susceptible d'une solution, quel que soit l'état initial de la sphère, il s'ensuit que la formule précédente est une conséquence nécessaire de cette solution générale, sur laquelle il ne peut rester aucun doute; mais il serait à désirer que l'on pût parvenir plus directement à cette formule. Elle se vérifie dans le cas particulier où l'on a $pl=1$: abstraction faite du facteur $\rho l$, l'équation (7) se réduit à $\cos \rho l=0$; elle donne $\rho=\frac{(2n-1)\pi}{2l}$, en désignant par $n$ un nombre entier et positif; et l'expression de $fr$ dont il s'agit devient

$$fr=\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{(2n-1)\pi r}{2l}frdr\right)\sin\frac{(2n-1)\pi r}{2l};$$

ce qui coïncide avec la formule (12) du n° 96, quand on suppose dans celle-ci $f(-x)=-fx$, et que l'on y fait $x=r$.

(140). Au lieu de déduire la valeur de $u$ relative à une sphère entière, de celle qui répond à une couche sphérique, ainsi que nous venons de le faire, on peut aussi la déterminer directement. Dans ce cas, il serait difficile d'établir, *à priori*, la nécessité de l'équation (3) relative à $r=0$ ou au centre de la sphère; mais en prenant $ru$ pour l'inconnue du problème, et faisant $\frac{k}{c}=a^2$, comme plus haut, on remplacera l'équation (1) par celle-ci :

$$\frac{d.ru}{dt}=a^2\frac{d^2.ru}{dr^2}; \qquad (9)$$

en faisant $\zeta = 0$ dans l'équation (2) qui a lieu pour $r = l$, on pourra aussi l'écrire sous cette forme :

$$\frac{d.ru}{dr} + \left(p - \frac{1}{l}\right) ru = 0; \qquad (10)$$

et, enfin, on remplacera l'équation (3), relative à $r = 0$, par la condition $ru = 0$, nécessaire pour que la température $u$ ne devienne pas infinie au centre de la sphère.

Cela posé, la valeur de $ru$ en série d'exponentielles qui satisfait, de la manière la plus générale, à l'équation (9) et à la condition $ru = 0$ quand $r = 0$, sera évidemment

$$ru = \Sigma \mathrm{A} \sin \rho r \,.\, e^{-a^2 \rho^2 t};$$

la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, des deux constantes A et $\rho$. Afin qu'elle satisfasse également à l'équation (10) pour $r = l$ et pour toutes les valeurs de $t$, il faudra que les valeurs de $\rho$ soient déterminées par l'équation (7). En supposant donc que l'on n'emploie que des valeurs de $\rho^2$ tirées de cette équation et différentes entre elles, de sorte que les exponentielles contenues dans la somme $\Sigma$ soient toutes distinctes les unes des autres, il ne s'agira plus que de déterminer, en fonction de $\rho$, le coefficient A d'un terme quelconque, d'après l'état initial de la sphère.

Pour cela, conformément au procédé général, indiqué dans le n° 85, je multiplie par $\sin \rho r dr$ les deux membres de l'équation (9), et je les intègre ensuite depuis $r = 0$ jusqu'à $r = l$; ce qui donne

$$\frac{d.\int_0^l ru \sin \rho r dr}{dt} = a^2 \int_0^l \sin \rho r \frac{d^2.ru}{dr^2} dr.$$

En intégrant deux fois de suite par partie, et ayant égard à l'équation (10) qui a lieu à la limite $r = l$, il vient

$$\int_0^l \sin \rho r \frac{d^2.ru}{dr^2} dr = -\left[\left(p - \frac{1}{l}\right) \sin \rho l + \rho \cos \rho l\right] \lambda + \rho^2 \int_0^l ru \sin \rho r dr;$$

$\lambda$ désignant la valeur de $ru$ qui répond à $r = l$. En vertu de l'équation (7), le terme compris hors du signe $\int$ s'évanouit; par consé-

quent, on aura simplement

$$\frac{d.\int_0^l ru \sin \rho r dr}{dt} = a^2\rho^2 \int_0^l ru \sin \rho r dr;$$

et en intégrant, on en conclura

$$\int_0^l ru \sin \rho r dr = \mathrm{D}e^{-a^2\rho^2 t}$$

D étant la constante arbitraire. Pour la déterminer, je suppose que l'on ait, comme plus haut, $ru = fr$ quand $t = 0$; il en résultera

$$\mathrm{D} = \int_0^l \sin \rho r.frdr;$$

et nous aurons, à un instant quelconque,

$$\int_0^l ru \sin \rho r dr = e^{-a^2\rho^2 t} \int_0^l \sin \rho r.frdr.$$

En substituant dans cette équation la valeur de $ru$ en série, et comparant les termes semblables dans ses deux membres, j'en conclus

$$\int_0^l \sin \rho r \sin \rho' r dr = 0, \qquad (11)$$

tant que $\rho$ et $\rho'$ sont des racines de l'équation (7), qui ont des carrés différens, et, en particulier,

$$\mathrm{A}\int_0^l \sin^2 \rho r dr = \int_0^l \sin \rho r.frdr,$$

dans le cas de $\rho'^2 = \rho^2$. De cette dernière équation, on déduit

$$\mathrm{A} = \frac{2\rho\int_0^l \sin \rho r.frdr}{\rho l - \sin \rho l \cos \rho l};$$

et il en résulte

$$u = \frac{2}{r}\Sigma \frac{\rho\int_0^l \sin \rho r.frdr}{\rho l - \sin \rho l \cos \rho l} \sin \rho r.e^{-a^2\rho^2 t},$$

pour la valeur de $ru$ complètement déterminée.

Cette expression de la température dans une sphère entière dont tous les points, également éloignés du centre, sont également échauffés, et que l'on suppose placée dans un milieu qui a une température invariable, est celle que Fourier a donnée le premier, sans démontrer, toutefois, qu'elle convienne à une valeur initiale de la température représentée par une fonction de la distance $r$ entièrement arbitraire, ou, autrement dit, sans avoir prouvé, directement ou indirectement, que la valeur de $ru$ qui en sera déduite pour $t=0$ puisse représenter une fonction quelconque $fr$. Au moyen de l'équation (7), il est facile de faire coïncider cette formule de Fourier avec l'équation (8).

Au moyen de cette même équation (7), on peut aussi vérifier l'équation (11). En effet, en effectuant l'intégration, on a

$$2\int_0^l \sin\rho r \sin\rho' r dr = \frac{\sin(\rho-\rho')l}{\rho-\rho'} - \frac{\sin(\rho+\rho')l}{\rho+\rho'},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\int_0^l \sin\rho r \sin\rho' r dr = \frac{\rho'\sin\rho l\cos\rho' l - \rho\sin\rho' l\cos\rho l}{\rho^2-\rho'^2};$$

mais, d'après l'équation (7) dont $\rho$ et $\rho'$ sont des racines, on a

$$\sin\rho l = \frac{\rho l}{1-pl}\cos\rho l, \qquad \sin\rho' l = \frac{\rho' l}{1-pl}\cos\rho' l;$$

ce qui réduit à zéro le numérateur de la fraction précédente, et, par conséquent, la fraction elle-même, quand son dénominateur n'est pas nul. Dans le cas de $\rho'^2=\rho^2$, la fraction n'est plus zéro; elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; et sa véritable valeur est $\frac{1}{2}l - \frac{l}{2\rho}\sin\rho l\cos\rho l$, comme cela doit être. L'équation (11), ainsi vérifiée, sert à prouver (n° 90) que toutes les racines de l'équation (7) sont réelles. Il s'ensuit que toutes les valeurs de $\rho^2$ sont positives; ce que l'on reconnaît, d'ailleurs, en remplaçant dans l'équation (7) $\sin\rho l$ et $\cos\rho l$ par leurs développemens : après avoir supprimé le facteur $\rho l$, commun à tous les termes, il en résulte effectivement

$$pl - \frac{\rho^2 l^2}{1.2.3}(2+pl) + \frac{\rho^4 l^4}{1.2.3.4.5}(4+pl) - \text{etc.} = 0;$$

et en observant que la quantité $p$ est essentiellement positive, on voit que cette équation ne peut être satisfaite par aucune valeur négative de $\rho^2$.

(141). Lorsque le rayon $l$ est très petit, le produit $pl$ l'est aussi, en général, et la valeur de $\rho l$, qui répond à la plus petite racine $\epsilon$ de l'équation (7), est également très petite. D'après l'équation précédente, cette plus petite racine est, à très peu près,

$$\epsilon = \sqrt{\frac{3p}{l}}.$$

Les autres valeurs de $\rho l$ tirées de l'équation (7) n'étant pas très petites, il s'ensuit que la somme $\Sigma$ contenue dans la formule (8) se réduira très promptement au terme correspondant à $\rho = \epsilon$; d'ailleurs, la variable $r$ étant aussi très petite, la valeur de $\epsilon r$ ou $\sqrt{\frac{3pr^2}{l}}$ le sera également; en prenant donc $\epsilon r$ au lieu de $\sin \epsilon r$, on aura, après un temps très court,

$$u = \frac{2[\epsilon^2 l^2 + (1 - pl)^2]\epsilon^2}{l[\epsilon^2 l^2 - pl(1 - pl)]} \left(\int_0^l rfrdr\right) e^{-a^2\epsilon^2 t},$$

ou, à très peu près,

$$u = \frac{3}{l^3}\left(\int_0^l rfrdr\right) e^{-\frac{3a^2pt}{l}},$$

d'après la valeur de $\epsilon$.

La température initiale à la distance $r$ étant $\mathrm{F}r$, si l'on appelle $\gamma$ la moyenne de ses valeurs dans le volume entier $\frac{4\pi l^3}{3}$ de la sphère, on aura évidemment

$$4\pi\int_0^l r^2\mathrm{F}rdr = \frac{4\pi l^3}{3}\gamma;$$

et comme $fr$ est le produit $r\mathrm{F}r$, il s'ensuit que le coefficient de l'exponentielle dans la formule précédente est égal à $\gamma$. D'un autre côté, le flux de chaleur à travers la surface sphérique dont le rayon est $r$, dans le sens du prolongement de son rayon et rapporté à l'unité de temps, a pour expression $-4\pi r^2 k\frac{du}{dr}$ (n° 52); d'après l'équation (10)

relative à la surface de la sphère, ce flux est donc égal à $4\pi l^2 pku$ à cette surface ; donc en appelant $\mathfrak{C}$ le rapport de son coefficient $4\pi l^2 pk$ au produit $\frac{4\pi l^3 c}{3}$ du volume de la sphère et de sa chaleur spécifique, nous aurons

$$\mathfrak{C} = \frac{3pk}{cl}.$$

Or, nous avons fait $\frac{k}{c} = a^2$ ; par conséquent, la valeur de la température $u$, à un instant quelconque, est la même chose que

$$u = \gamma e^{-\mathfrak{C}t};$$

et il est facile de voir qu'elle coïncide avec celle que nous avons trouvée dans le n° 40, pour le cas d'un très petit corps de forme quelconque, en supposant, comme ici, le flux extérieur de chaleur proportionnel à l'excès de la température de ce corps sur la température du dehors, et faisant celle-ci égale à zéro.

(142). En général, si l'on désigne par $n$ un nombre entier et positif, et par $\delta_n$ une quantité positive ou négative, dépendante de $n$ et moindre que $\pi$, abstraction faite du signe, on pourra représenter par

$$\rho l = n\pi + \delta_n,$$

toute valeur positive de $\rho l$ qui satisfait à l'équation (7). En la substituant dans cette équation, on aura

$$(1 - pl) \sin \delta_n = (n\pi + \delta_n) \cos \delta_n;$$

et si l'on fait successivement $n = 1, = 2, = 3$, etc., il sera facile de déterminer, par des essais, les valeurs approchées de $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, etc., quand la valeur numérique de $1 - pl$ sera donnée. Lorsque $n$ sera devenu un très grand nombre, on pourra négliger $\delta_n$ par rapport à $n\pi$, dans le second membre de cette équation ; de cette manière, on aura

$$\operatorname{tang} \delta_n = \frac{n\pi}{1 - pl};$$

ce qui fera connaître immédiatement la valeur de $\delta_n$ correspondante à chaque valeur très grande de $n$.

Si le rayon $l$ est très grand, et que le produit $pl$ le soit aussi, on aura, à très peu près,

$$\delta_n = -\frac{n\pi}{pl},$$

pour les valeurs de $n$ qui ne seront pas très grandes; d'où il suit que pour ces valeurs, celles de $\rho l$ croîtront par des différences à très peu près égales à $\pi - \frac{\pi}{pl}$, ou simplement à $\pi$. Pour de très grands nombres $n$, deux valeurs consécutives de $\delta_n$ étant déterminées par les équations

$$\text{tang}\,\delta_n = -\frac{n\pi}{pl}, \quad \text{tang}\,\delta_{n+1} = -\frac{(n+1)\pi}{pl},$$

il en résultera

$$\text{tang}\,(\delta_n - \delta_{n+1}) = \frac{\pi pl}{(n+1)\,n\pi^2 + p^2l^2};$$

et cette quantité étant très petite, la différence $\delta_n - \delta_{n+1}$ le sera également; d'où il suit que les valeurs de $\rho l$ relatives à de très grands nombres $n$, croîtront aussi par des différences égales à $\pi$. On conclut de là que si le rayon $l$ devient infini, toutes les valeurs de $\rho$ croîtront par des différences infiniment petites, et rigoureusement égales à $\frac{\pi}{l}$; en sorte que si nous faisons, dans ce cas,

$$\rho = \frac{n\pi}{l} = \alpha, \quad \frac{\pi}{l} = d\alpha,$$

la somme $\Sigma$ relative aux valeurs positives de $\rho$, se changera en une intégrale relative à $\alpha$, qui s'étendra depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \infty$. En même temps, la fraction $\frac{\rho^2l^2 + (1 - pl)^2}{\rho^2l^2 - pl(1 - pl)}$, contenue dans la formule (8), sera égale à l'unité; par conséquent, cette formule pourra s'écrire ainsi :

$$ru = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\alpha r' \sin\alpha r . e^{-a^2\alpha^2 t} fr'dr'd\alpha;$$

et elle fera connaître la température en un point quelconque d'un corps homogène et infini en tous sens, lorsqu'on la suppose égale en

38

tous les points également éloignés de celui d'où l'on compte les distances $r$.

Si l'on fait $t=0$ et $ru=fr$, il faudra qu'on ait

$$fr=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\alpha r'\sin\alpha r.fr'dr'd\alpha,$$

pour toutes les valeurs positives de $r$, depuis $r=0$ jusqu'à $r=\infty$; ce qu'il est aisé de vérifier. En effet, d'après la formule (14) du n° 102, on a

$$fr=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \sin\alpha r'\sin\alpha r.fr'dr'd\alpha,$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \cos\alpha r'\cos\alpha r.fr'dr'd\alpha,$$

depuis $r=-\infty$ jusqu'à $r=\infty$, et quelle que soit la fonction $fr$. Or, si l'on suppose que cette fonction soit telle que l'on ait $f(-r')=-fr'$, tous les élémens de l'intégrale relative à $r'$ seront deux à deux, égaux et de même signe dans la première intégrale double, égaux et de signes contraires dans la seconde; par conséquent, on pourra supprimer la seconde intégrale double, et doubler la première, en y étendant l'intégrale relative à $r'$, seulement depuis $r'=0$ jusqu'à $r'=\infty$; ce qui fera coïncider cette dernière expression de $fr$ avec la précédente, qu'il s'agissait de vérifier.

(143). On peut aussi effectuer l'intégration relative à $\alpha$, et réduire à une intégrale simple l'expression de $ru$. D'après une formule connue, qui se déduit facilement de celle que nous avons employée dans le n° 74, on a

$$\int_0^\infty e^{-\gamma^2\alpha^2}\cos 2\epsilon\alpha\, d\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma}e^{-\frac{\epsilon^2}{\gamma^2}};$$

$\epsilon$ et $\gamma$ étant des constantes dont la première peut être réelle ou imaginaire. Si donc on fait $\gamma=a\sqrt{t}$, que l'on prenne successivement $\epsilon=\frac{1}{2}(r-r')$ et $\epsilon=\frac{1}{2}(r+r')$, et que l'on retranche l'une de l'autre les deux équations qui en résulteront, on aura

$$2\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2t}\sin\alpha r'\sin\alpha r.d\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\left[e^{-\frac{(r-r')^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(r+r')^2}{4a^2t}}\right],$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{1}{ar\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{(r-r')^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(r+r')^2}{4a^2t}} \right] r'\mathrm{F}r'.dr',$$

en remettant $r'\mathrm{F}r'$ au lieu de $fr'$. On parviendrait également à ce résultat au moyen de l'intégrale, sous forme finie, de l'équation générale du mouvement de la chaleur, que l'on a trouvée dans le n° 76, et dans laquelle on prendrait pour la fonction arbitraire $\mathrm{F}(x, y, z)$, qui exprime la température initiale du point dont $x, y, z$, sont les trois coordonnées orthogonales, une fonction $\mathrm{F}r$ de la seule variable $r$ ou $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Si l'échauffement primitif a été renfermé dans un espace limité autour du point d'où l'on compte la distance $r$, de sorte que $\mathrm{F}r'$ soit zéro pour toute valeur de $r'$ plus grande qu'une ligne donnée $\varepsilon$, il suffira d'étendre l'intégrale relative à $r'$ depuis $r' = 0$ jusqu'à $r' = \varepsilon$. En dehors de cet échauffement primitif, et quand la quantité $a\sqrt{t}$ sera devenue très grande par rapport à $\varepsilon$, on pourra développer les exponentielles contenues sous le signe $\int$, en séries très convergentes, ordonnées suivant les puissances de $\frac{r'}{a\sqrt{t}}$; et si l'on néglige ensuite le carré de cette fraction, on aura

$$u = \frac{1}{a^3 t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} \int_0^\varepsilon r'^2\mathrm{F}r'dr'.$$

Mais, en appelant A la totalité de la chaleur communiquée primitivement au corps que nous considérons, et observant que $c$ est la chaleur spécifique, on a

$$\mathrm{A} = 4\pi c \int_0^\varepsilon r'^2\mathrm{F}r'dr';$$

nous aurons donc

$$u = \frac{\mathrm{A}}{4c(a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}},$$

pour la température qui aura lieu au bout du temps $t$ et à la distance $r$ du centre de l'échauffement primitif.

Si $u_{,}$ est le *maximum* de cette température, et $t_{,}$ le temps correspondant, c'est-à-dire, les valeurs de $t$ et $u$ qui répondent à $\frac{du}{dt}=0$, on aura

$$u_{,}=\frac{2A}{c}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{3}{2\pi e}}\right)^3,$$

$$t_{,}=\frac{r^2}{6a^2}=\frac{r^2c^2}{6k^2},$$

en remettant pour $a^2$ sa valeur $\frac{k}{c}$. On peut comparer ces valeurs de $u_{,}$ et $t_{,}$ aux résultats analogues que nous avons trouvés dans le n° 136, pour la propagation de la chaleur dans une barre cylindrique et homogène, qui se prolonge indéfiniment de part et d'autre du lieu de l'échauffement initial.

(144). Déterminons actuellement la distribution de la chaleur dans une sphère composée d'un noyau sphérique et homogène, recouvert par une couche sphérique d'une épaisseur constante, également homogène, mais d'une matière différente de celle du noyau. Nous supposerons toujours la température égale à chaque instant, en tous les points également éloignés du centre de la sphère; de sorte qu'en appelant $r$ le rayon mené de ce centre à un point quelconque, soit du noyau, soit de la couche extérieure, la température de ce point au bout du temps $t$ sera, comme précédemment, une fonction de $r$ et $t$.

Nous représenterons cette inconnue par $u$ pour tous les points du noyau, et par $u'$ pour tous ceux de la couche extérieure. Soient, de plus, $c$ et $k$ la chaleur spécifique et la conductibilité de la matière du noyau, $c'$ et $k'$ les mêmes quantités relativement à la matière de l'autre partie de la sphère, $h$ le rayon du noyau, $l$ l'épaisseur de cette autre partie, et, conséquemment, $h+l$ le rayon de la sphère entière. Faisons ensuite $\frac{k}{c}=a^2$ et $\frac{k'}{c'}=a'^2$. Les équations du mouvement de la chaleur dans les deux parties de cette sphère, pourront être mises sous cette forme :

$$\frac{d.ru}{dt}=a^2\frac{d^2.ru}{dr^2},\quad \frac{d.ru'}{dt}=a'^2\frac{d^2.ru'}{dr^2};\qquad (12)$$

la première ayant lieu depuis $r=0$ jusqu'à $r=h$, et la seconde depuis $r=h$ jusqu'à $r=h+l$.

Si la sphère est placée, comme précédemment, dans un milieu dont la température est zéro, et que l'état de sa surface soit partout le même, l'équation relative à cette surface sera

$$k'\frac{du'}{dr}+p'u'=0;$$

$p'$ étant un coefficient constant et positif, qui dépendra de la densité de l'air dans lequel la sphère sera placée, et de l'état de sa surface. Cette équation n'aura lieu que pour la valeur particulière $r=h+l$; et en faisant $p'=k'\mathcal{C}$, on pourra l'écrire sous la forme :

$$\frac{d.ru'}{dr}+\left(\mathcal{C}-\frac{1}{h+l}\right)ru'=0. \qquad (13)$$

Nous aurons encore les équations du n° 90, relatives à la surface de séparation des deux parties de la sphère, savoir :

$$k\frac{du}{dr}+q(u-u')=0, \quad k'\frac{du'}{dr}+q(u-u')=0;$$

$q$ étant une constante positive, dépendante des matières de ces deux parties, et dont la valeur numérique sera aussi donnée dans chaque exemple. Ces deux équations ne subsisteront que pour la valeur particulière $r=h$; et si l'on fait $\frac{q}{k}=b$ et $\frac{q}{k'}=b'$, on pourra les remplacer par celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d.ru}{dr}+\left(b-\frac{1}{h}\right)ru-bru'=0,\\&\frac{d.ru'}{dr}+b'ru-\left(b'+\frac{1}{h}\right)ru'=0.\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Enfin, il faudra joindre à ces différentes équations la condition $ru=0$ quand $r=0$, nécessaire pour que la température ne devienne pas infinie au centre de la sphère, et, de plus, les équations relatives à l'état initial de chacune des deux parties de la sphère, qui auront lieu pour $t=0$, et que nous représenterons par

$$ru=fr, \quad ru'=f'r;$$

$fr$ et $f'r$ étant deux fonctions données arbitrairement, la première depuis $r = 0$ jusqu'à $r = h$, la seconde depuis $r = h$ jusqu'à $r = h + l$. Si l'on désigne par $\mathrm{F}r$ et $\mathrm{F}'r$ les valeurs initiales de $u$ et $u'$, on aura $fr = r\mathrm{F}r$ et $f'r = r\mathrm{F}'r$.

Tel est donc le système d'équations qu'il faudra résoudre simultanément, pour déterminer les deux inconnues $u$ et $u'$ en fonctions de $r$ et $t$. Mais auparavant nous ferons remarquer que si l'on a $q = \infty$, il faudra, d'après les équations relatives à la surface de séparation des deux parties de la sphère, qu'on ait $u = u'$ pour $r = h$; en sorte qu'il n'y aura alors aucun changement brusque de température dans le passage de l'une de ces parties à l'autre, quoiqu'elles puissent être de matières différentes. Si l'on a, au contraire, $q = 0$, ces équations se réduiront à $\frac{du}{dr} = 0$ et $\frac{du'}{dr} = 0$; le flux de chaleur sera nul en tous les points de la surface de séparation; et, dans ce cas, la distribution de la chaleur dans chaque partie de la sphère sera indépendante de celle qui aura lieu dans l'autre partie. Elle sera la même, dans la couche extérieure, que si le noyau était remplacé par un espace vide, comme dans le n° 137; et, en même temps, la loi des températures dans le noyau intérieur sera celle qui a lieu dans une sphère homogène dont la surface est imperméable à la chaleur; laquelle loi se déduit de l'équation (8), en y faisant la quantité $p$ infiniment petite.

(145). Les valeurs de $ru$ et $ru'$ en séries d'exponentielles qui satisfont aux équations (12), et dont la première remplit, en outre, la condition $ru = 0$ quand $r = 0$, peuvent être représentées par

$$ru = \Sigma \mathrm{A} \sin \frac{mr}{a} e^{-m^2 t},$$

$$ru' = \Sigma \left(\mathrm{A}' \sin \frac{mr}{a'} + \mathrm{B}' \cos \frac{mr}{a'}\right) e^{-m^2 t};$$

les sommes $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, des constantes $m$, $\mathrm{A}$, $\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}'$. Pour que cette valeur de $ru'$ satisfasse, quelle que soit la variable $t$, à l'équation (13) relative à $r = h + l$, il faudra qu'on ait

$$A'\left[\frac{m}{a'}\cos\frac{m(h+l)}{a'}+\left(6-\frac{1}{h+l}\right)\sin\frac{m(h+l)}{a'}\right]$$
$$=B'\left[\frac{m}{a'}\sin\frac{m(h+l)}{a'}-\left(6-\frac{1}{h+l}\right)\cos\frac{m(h+l)}{a'}\right];$$

d'où l'on tire

$$A'=\left\{\frac{m(h+l)}{a'}\sin\frac{m(h+l)}{a'}-[6(h+l)-1]\cos\frac{m(h+l)}{a'}\right\}B,$$
$$B'=\left\{\frac{m(h+l)}{a'}\cos\frac{m(h+l)}{a'}+[6(h+l)-1]\sin\frac{m(h+l)}{a'}\right\}B;$$

B étant une constante qui demeure indéterminée.

En ayant égard à ces valeurs de $A'$ et $B'$, et substituant celles de $ru$ et $ru'$ dans les équations (14), qui ont lieu pour $r=h$ et pour toutes les valeurs de $t$, on en conclut

$$A\left[\frac{mh}{a}\cos\frac{mh}{a}+(bh-1)\sin\frac{mh}{a}\right]$$
$$=Bbh\left\{\frac{m(h+l)}{a'}\cos\frac{ml}{a'}+[6(h+l)-1]\sin\frac{ml}{a'}\right\},$$

$$B\left\{\left[\frac{mh}{a'}[6(h+l)-1]+\frac{m(h+l)}{a'}(b'h+1)\right]\cos\frac{ml}{a'}\right.$$
$$\left.-\left[\frac{m^2h(h+l)}{a'^2}-(b'h+1)[6(h+l)-1]\right]\sin\frac{ml}{a'}\right\}=Ab'h\sin\frac{mh}{a}.$$

On satisfait à l'une de ces deux équations, à la seconde, par exemple, en prenant

$$A=MQ,\quad B=M\sin\frac{mh}{a},$$

où l'on désigne par M une constante indéterminée, et l'on fait, pour abréger,

$$\left\{\frac{m}{a'b'}[6(h+l)-1]+\frac{m(h+l)(b'h+1)}{a'b'h}\right\}\cos\frac{ml}{a'}$$
$$-\left\{\frac{m^2(h+l)}{a'^2b'}-\frac{1}{b'h}(b'h+1)[6(h+l)-1]\right\}\sin\frac{ml}{a'}=Q.$$

En substituant ensuite ces valeurs de A et B dans la première de ces mêmes équations, et ayant égard à cette valeur de Q, on trouve

$$\left\{\frac{m^2h(h+l)}{a'^2}-(b'h+1)[6(h+l)-1]\right\}\frac{mh}{a}\cos\frac{mh}{a}\sin\frac{ml}{a'}$$

$$-\left\{\frac{mh}{a'}[6(h+l)-1]+\frac{m(h+l)}{a'}(b'h+1)\right\}\frac{mh}{a}\cos\frac{mh}{a}\cos\frac{ml}{a'} \qquad (15)$$

$$+\left\{\frac{m^2h(h+l)}{a'^2}(bh-1)+(b'h-bh+1)[6(h+l)-1]\right\}\sin\frac{mh}{a}\sin\frac{ml}{a'}$$

$$-\left\{\frac{mh}{a'}[6(h+l)-1](bh-1)-\frac{m(h+l)}{a'}(b'h-bh+1)\right\}\sin\frac{mh}{a}\cos\frac{ml}{a'}=0;$$

équation qui servira à déterminer les valeurs de $m$.

Maintenant, si nous faisons

$$R = Q\sin\frac{mr}{a},$$

$$R' = \left\{\frac{m(h+l)}{a'}\cos\frac{m(h+l-r)}{a'}+[6(h+l)-1]\sin\frac{m(h+l-r)}{a'}\right\}\sin\frac{mh}{a},$$

les valeurs de $ru$ et $ru'$ seront

$$ru = \Sigma \mathrm{MR}e^{-m^2t}, \qquad ru' = \Sigma \mathrm{MR}'e^{-m^2t}. \qquad (16)$$

Dans chaque somme $\Sigma$, on pourra supposer réunis en un seul les termes correspondans à des valeurs égales de $m$, ou à des valeurs égales et de signes contraires ; et cela étant, on n'étendra plus les sommes $\Sigma$ qu'aux racines de l'équation (15) dont les carrés sont des quantités inégales, de telle sorte que toutes les exponentielles comprises dans chaque somme seront distinctes l'une de l'autre. C'est dans cette supposition que nous allons déterminer M en fonction de $m$, au moyen du procédé général indiqué dans le n° 85, et d'après l'état initial des deux parties de la sphère.

(146). Chaque terme des valeurs de $ru$ et $ru'$ satisfaisant séparément aux mêmes équations que les valeurs entières, il s'ensuit que l'on aura, comme on peut d'ailleurs le vérifier,

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{dr^2} = -\frac{m^2}{a^2}\mathrm{R}, \qquad \frac{d^2\mathrm{R}'}{dr^2} = -\frac{m^2}{a'^2}\mathrm{R}', \qquad (17)$$

pour toutes les valeurs de $r$, et, en particulier,

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{R}=0, \quad \text{quand } r=0,\\
&\frac{d\mathrm{R}'}{dr}+\left(6-\frac{1}{h+l}\right)\mathrm{R}'=0, \quad \text{quand } r=h+l,\\
&\frac{d\mathrm{R}}{dr}+\left(b-\frac{1}{h}\right)\mathrm{R}-b\mathrm{R}'=0, \quad \text{quand } r=h,\\
&\frac{d\mathrm{R}'}{dr}+b'\mathrm{R}-\left(b'+\frac{1}{h}\right)\mathrm{R}'=0, \quad \text{quand } r=h.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Cela posé, je multiplie la première équation (12) par $\mathrm{R}dr$, la seconde par $\mathrm{R}'dr$; puis j'intègre leurs deux membres dans les limites où chacune de ces équations a lieu; ce qui donne

$$\frac{d.\int_0^h \mathrm{R}rudr}{dt}=a^2\int_0^h \frac{d^2.ru}{dr^2}\mathrm{R}dr,$$

$$\frac{d.\int_h^{h+l}\mathrm{R}'ru'dr}{dt}=a'^2\int_h^{h+l}\frac{d^2.ru'}{dr^2}\mathrm{R}'dr.$$

En intégrant deux fois de suite par partie, et mettant pour $\frac{d^2\mathrm{R}}{dr^2}$ et $\frac{d^2\mathrm{R}'}{dr^2}$ leurs valeurs données par les équations (17), il vient

$$\int\frac{d^2.ru}{dr^2}\mathrm{R}dr=\mathrm{R}\frac{d.ru}{dr}-ru\frac{d\mathrm{R}}{dr}-\frac{m^2}{a^2}\int\mathrm{R}rudr,$$

$$\int\frac{d^2.ru'}{dr^2}\mathrm{R}'dr=\mathrm{R}'\frac{d.ru'}{dr}-ru'\frac{d\mathrm{R}'}{dr}-\frac{m^2}{a'^2}\int\mathrm{R}'ru'dr.$$

Les termes compris hors du signe $\int$ dans la première de ces formules, disparaissent à la limite $r=0$, puisque R et $ru$ s'évanouissent avec $r$. Ces termes disparaissent aussi dans la seconde formule à la limite $r=h+l$; car, en combinant ensemble la seconde équation (18) et l'équation (13), qui ont lieu l'une et l'autre pour cette valeur de $r$, on en déduit

$$\mathrm{R}'\frac{d.ru'}{dr}-ru'\frac{d\mathrm{R}'}{dr}=\left(\frac{1}{h+l}-6\right)(\mathrm{R}'ru'-\mathrm{R}'ru')=0.$$

Enfin, à la limite $r=h$, les équations (14) et les deux dernières équations (18), qui ont lieu toutes les quatre pour $r=l$, donnent

$$R\frac{d.ru}{dr} - ru\frac{dR}{dr} = b\,[Rru' - R'ru],$$

$$R'\frac{d.ru'}{dr} - ru'\frac{dR'}{dr} = b'\,[Rru' - R'ru];$$

les quantités comprises entre les crochets se rapportant à cette valeur particulière $r = h$. D'après ces différentes valeurs, nous aurons

$$\frac{d.\int_0^h Rrudr}{dt} = a^2b\,[Rru' - R'ru] - m^2\int_0^h Rrudr,$$

$$\frac{d.\int_h^{h+l} R'ru'dr}{dt} = -a'^2b'\,[Rru' - R'ru] + m^2\int_h^{h+l} R'ru'dr.$$

Or, si la quantité $q$ relative à la surface de séparation des deux parties de la sphère est zéro, $b$ et $b'$ le seront aussi; les variables $u$ et $u'$ seront séparées dans ces deux équations, qui s'intégreront toutes deux immédiatement; et ces inconnues se détermineront indépendamment l'une de l'autre. Nous supposerons que ce cas particulier n'ait pas lieu; les quantités $b$ et $b'$ n'étant donc pas zéro, on pourra diviser la première équation par $a^2b$, et la seconde par $a'^2b'$; et en les ajoutant ensuite, les quantités comprises hors du signe $\int$ se détruiront. De cette manière, nous aurons

$$\frac{d.}{dt}\left(\frac{1}{a^2b}\int_0^h Rrudr + \frac{1}{a'^2b'}\int_h^{h+l} R'ru'dr\right)$$
$$+ m^2\left(\frac{1}{a^2b}\int_0^h Rrudr + \frac{1}{a'^2b'}\int_h^{h+l} R'ru'dr\right) = 0;$$

d'où l'on tirera, en intégrant,

$$\frac{1}{a^2b}\int_0^h Rrudr + \frac{1}{a'^2b'}\int_h^{h+l} R'ru'dr = De^{-m^2t}; \qquad (19)$$

D étant la constante arbitraire, que l'on déterminera en faisant $t = 0$ et mettant pour $ru$ et $ru'$ leurs valeurs initiales $fr$ et $f'r$; ce qui donne

$$D = \frac{1}{a^2b}\int_0^h Rfrdr + \frac{1}{a'^2b'}\int_h^{h+l} R'f'rdr.$$

Je substitue maintenant, dans cette équation (19), les formules (16)

à la place de $ru$ et $ru'$. Le coefficient d'une exponentielle distincte de $e^{-m^2t}$ dans le premier membre de cette équation, devra être égal à zéro; en sorte que, $m_i$ étant une racine de l'équation (15), dont le carré est différent de $m^2$, et en désignant par $R_i$ et $R'_i$, ce que deviennent R et R' quand on y met $m_i$ au lieu de $m$, il faudra qu'on ait

$$\frac{1}{a^2b}\int_0^h RR_i dr + \frac{1}{a'^2b'}\int_h^{h+l} R'R'_i dr = 0;$$

et comme $a^2b$ et $a'^2b'$ sont des quantités positives, cette équation servira à démontrer, par le raisonnement du n° 90, la réalité de toutes les racines de l'équation (15) qui entrent dans les formules (16). Dans le cas de $m_i^2 = m^2$, le coefficient de l'exponentielle contenue dans le premier membre de l'équation (19) devant être égal à D, comme dans le second membre, on en conclura

$$\left(\frac{1}{a^2b}\int_0^h R^2dr + \frac{1}{a'^2b'}\int_h^{h+l} R'^2dr\right)M = D;$$

ce qui détermine la valeur de M en fonction de $m$. D'après les valeurs de R et R', on a

$$\int_0^h R^2dr = \frac{1}{2}Q^2\left(h - \frac{a}{m}\sin\frac{mh}{a}\cos\frac{mh}{a}\right),$$

$$\int_h^{h+l} R'^2dr = \frac{1}{2}P\sin^2\frac{mh}{a},$$

en faisant, pour abréger,

$$P = \frac{m^2l(h+l)^2}{a'^2} + l[6(h+l)-1]^2 + (h+l)[6(h+l)-1]$$
$$+\left\{\frac{m(h+l)^2}{2a'} - \frac{a'}{2m}[6(h+l)-1]^2\right\}\sin\frac{2ml}{a'} - (h+l)[6(h+l)-1]\cos\frac{2ml}{a'};$$

et en mettant aussi pour D sa valeur, celle de M sera

$$M = \frac{2a'^2b'\int_0^h Rfrdr + 2a^2b\int_h^{h+l} R'f'rdr}{a'^2b'Q^2\left(h - \frac{a}{m}\sin\frac{mh}{a}\cos\frac{mh}{a}\right) + a^2bP\sin^2\frac{mh}{a}}.$$

Au moyen de cette valeur de M, les formules (16) ne contiendront plus rien d'inconnu, et elles donneront, à un instant quelconque, la température de tel point qu'on voudra, appartenant à l'une ou à l'autre des deux parties de la sphère que nous considérons. La même analyse s'étendra, sans autre difficulté que la longueur des calculs, au cas d'une sphère composée de trois ou d'un plus grand nombre de parties de matières différentes.

(147). On peut voir, *à priori*, que le terme de chaque somme $\Sigma$ qui répond à la racine $m = 0$ de l'équation (15), doit s'évanouir; car, s'il n'était pas nul, les températures des points de la sphère convergeraient, dans tous les cas, vers une valeur constante qui ne serait pas zéro, et qu'elles atteindraient après un certain temps; en sorte que la température finale et permanente de la sphère serait toujours différente de la température extérieure; ce qui ne peut avoir lieu, pour la sphère entière, ou seulement pour le noyau intérieur, que quand le flux de chaleur est nul à leurs surfaces respectives. On fera donc abstraction de la racine zéro de l'équation (15), et l'on étendra les sommes $\Sigma$ à toutes les valeurs positives de $m$, tirées de cette équation.

Dans le cas du flux de chaleur nul à la surface extérieure, on regardera le coefficient $p'$ relatif à cette surface, comme une quantité infiniment petite; la quantité $\zeta$ le sera également; et l'équation (15) admettra une racine qui sera aussi infiniment petite. Pour la déterminer, je développe suivant les puissances de $m$ les sinus et les cosinus contenus dans cette équation, puis je supprime le facteur $m^2$ commun à tous ses termes, et je néglige ensuite les termes qui ont $m^4$ ou $m^2\zeta$ pour facteur; il en résulte

$$m^2\left[\frac{hl(h+l)b'}{a'^2}+\frac{h^3b'}{3a^2}+\frac{l^3b}{3a'^2}\right]=(h+l)^2 b\zeta;$$

d'où l'on tirerait la valeur infiniment petite de $m$, s'il était nécessaire de la connaître. On aura, en même temps,

$$Q=\frac{mh}{a'},\quad R=\frac{m^2hr}{aa'},\quad R'=\frac{m^2hr}{aa'}.$$

Ces valeurs de R et R' étant égales et proportionnelles à $r$, on voit déjà que les termes correspondans des formules (16) divisées par $r$, seront

indépendans de $r$ et auront la même valeur pour les deux parties de la sphère; et les autres termes de ces formules disparaissant au bout d'un certain temps, à cause des exponentielles qu'ils contiennent, il s'ensuit que la température finale et permanente de la sphère entière sera la même en tous ses points. De plus, on aura aussi

$$\sin^2 \frac{mh}{a} = \frac{m^2h^2}{a^2},$$

$$h - \frac{a}{m} \sin \frac{mh}{a} \cos \frac{mh}{a} = \frac{2m^2h^3}{3a^2},$$

$$P = \frac{2m^2hl(h+l)}{a'^2} + \frac{2m^2l^3}{3a'^2};$$

et au moyen de ces valeurs et des précédentes, la valeur correspondante de $\frac{1}{r}$MR ou $\frac{1}{r}$ MR', c'est-à-dire la température finale dont il s'agit, aura pour expression

$$\frac{a'^2b' \int_0^h r^2 \mathrm{F}r dr + a^2 b \int_h^{h+l} r^2 \mathrm{F}'r dr}{\frac{1}{3} h^3 a'^2 b' + hl(h+l)a^2 b + \frac{1}{3} l^3 a^2 b},$$

en mettant $r\mathrm{F}r$ et $r\mathrm{F}'r$ dans M au lieu de $fr$ et $f'r$. Comme on a (n° 144)

$$a'^2b' = \frac{q}{c'}, \quad a^2b = \frac{q}{c},$$

on voit que cette température sera indépendante des conductibilités $k$ et $k'$ des deux parties de la sphère; elle ne dépendra pas non plus de la quantité $q$ relative à leur surface de séparation; mais elle variera avec le rapport de leurs chaleurs spécifiques.

En désignant par V et V' les volumes de ces deux parties, par C et C' les quantités de chaleur qui leur ont été primitivement communiquées, on aura

$$\mathrm{V} = \frac{4\pi}{3} h^3, \quad \mathrm{V}' = 4\pi hl(h+l) + \frac{4\pi}{3} l^3,$$

$$\mathrm{C} = 4\pi c \int_0^h r^2 \mathrm{F}r dr, \quad \mathrm{C}' = 4\pi c' \int_h^{h+l} r^2 \mathrm{F}'r dr;$$

la valeur précédente de la température finale deviendra donc

$$\frac{\mathrm{C}+\mathrm{C}'}{c\mathrm{V} + c'\mathrm{V}'};$$

résultat évident, qui peut servir de confirmation à notre analyse, et qui aurait également lieu dans un corps hétérogène de forme quelconque, dont la surface extérieure serait imperméable à la chaleur, comme celle de la sphère dans le cas que nous considérons.

(148). Toutefois, ce résultat suppose perméables à la chaleur les surfaces de séparation des différentes parties du corps : si elles étaient imperméables, comme sa surface extérieure, chaque partie conserverait toute sa chaleur primitive; et la température finale changerait, en général, d'une partie à une autre. Dans le calcul du n° 146, nous avons exclu ce cas particulier relativement à la surface de séparation du noyau et de la couche extérieure. S'il avait lieu, on aurait $b = 0$ et $b' = 0$; l'équation (19) serait remplacée par deux autres équations, savoir :

$$\int_0^h Rrudr = De^{-m^2t}, \quad \int_h^{h+l} R'ru'dr = D'e^{-m^2t};$$

D et D′ étant deux constantes arbitraires, dont la première se déterminerait d'après l'état initial du noyau, et la seconde d'après celui de la couche extérieure. La valeur du coefficient M en fonction de $m$ se déduirait ensuite de celle de D, pour la première formule (16), et de celle de D′, pour être employée dans la seconde. Enfin, en faisant $b = 0$ et $b' = 0$ dans l'équation (15), elle devient

$$\left\{\left[\frac{m^2h(h+l)}{a'^2} + 1 - 6(h+l)\right]\sin\frac{ml}{a'} - [l+6h(h+l)]\frac{m}{a'}\cos\frac{ml}{a'}\right\}\left(\sin\frac{mh}{a} - \frac{mh}{a}\cos\frac{mh}{a}\right) = 0;$$

elle se décomposera donc aussi en deux autres, qui seront

$$\sin\frac{mh}{a} - \frac{mh}{a}\cos\frac{mh}{a} = 0,$$

$$\left[\frac{m^2h(h+l)}{a'^2} + 1 - 6(h+l)\right]\sin\frac{ml}{a'} - [l+6h(h+l)]\frac{m}{a'}\cos\frac{ml}{a'} = 0.$$

La première déterminera les valeurs de $m$ que l'on devra employer dans la première formule (16), et la seconde celles que l'on devra substituer dans la seconde de ces deux formules.

On voit par là que dans le cas particulier de l'imperméabilité de la surface de séparation des deux parties de la sphère, les lois des températures, à un instant quelconque, se détermineront indépendamment l'une de l'autre dans ces deux parties, ainsi que nous l'avons dit plus haut. En mettant à la place de $m$, $\rho a$ dans les formules relatives au noyau, et $\rho a'$ dans celles qui répondent à la couche extérieure, il sera facile de voir qu'elles coïncident avec celles que nous avons trouvées précédemment, soit pour le cas d'une sphère entière, en y supposant zéro le flux de chaleur à la surface extérieure, soit pour le cas d'une couche sphérique qui termine un espace vide.

(149). La surface de séparation des deux parties de la sphère étant supposée perméable à la chaleur, nous allons actuellement considérer, en particulier, le cas où l'épaisseur $l$ de la couche extérieure est très petite. Cependant nous supposerons toujours cette épaisseur beaucoup plus grande que celle de la couche superficielle d'où émane et où est absorbée la chaleur rayonnante; ce qui n'empêchera pas que cette autre couche ne puisse avoir une épaisseur appréciable, dont la grandeur, jusqu'à ce qu'elle ait atteint un certain *maximum*, influe sur l'intensité du rayonnement extérieur (n° 41).

Si la constante $a'$ n'a pas une valeur très petite, les termes des formules (16) qui répondent à des valeurs de $m$ pour lesquelles $\frac{ml}{a'}$ n'est pas une très petite quantité en même temps que $l$, s'évanouiront très promptement, et l'on en pourra faire abstraction au bout d'un temps très court. Il suffira donc d'avoir égard aux très petites valeurs de $\frac{ml}{a'}$. Alors, en négligeant les termes multipliés par $\sin \frac{ml}{a'}$ dans l'équation (15), remplaçant $\cos \frac{ml}{a'}$ par l'unité et $h+l$ par $h$, et supprimant le facteur $\frac{mh^2}{a'}$ qui sera commun à tous les termes, on aura simplement

$$(\mathfrak{C} + b')\frac{mh}{a}\cos\frac{mh}{a} + (\mathfrak{C}bh - \mathfrak{C} - b')\sin\frac{mh}{a} = 0.$$

En remettant pour $\mathfrak{C}$, $b$, $b'$, leurs valeurs (n° 144), et faisant

$$\frac{m}{a}=\rho, \quad \frac{\mathcal{C}b}{b'+\mathcal{C}}=\frac{qp'}{(q+p')k}=\mathcal{C}',$$

cette équation deviendra

$$(1-\mathcal{C}'h)\sin\rho h=\rho h\cos\rho h;$$

et en la comparant à l'équation (7), on voit qu'elle sera la même que celle qui aurait lieu dans le cas d'une sphère homogène, d'un rayon $h$ égal à celui du noyau, qui aurait aussi la même conductibilité $k$, et pour laquelle le coefficient $p'$ relatif à sa surface extérieure serait diminué dans le rapport de $q$ à $q+p'$.

On aura aussi, à très peu près,

$$Q=\frac{a(b'+\mathcal{C})\rho h}{a'b'}, \quad P=0, \quad R=\frac{a(b'+\mathcal{C})\rho h}{a'b'}\sin\rho r;$$

on tire de l'équation précédente, comme dans le n° 139,

$$h-\frac{1}{\rho}\sin\rho h\cos\rho h=\frac{h[\rho^2h^2+\mathcal{C}'h(\mathcal{C}'h-1)]}{\rho^2h^2+(\mathcal{C}'h-1)^2};$$

et en négligeant, dans l'expression de M, l'intégrale dont les limites sont $h$ et $h+l$, la première formule (16) devient

$$ru=\frac{2}{h}\Sigma\frac{[\rho^2h^2+(\mathcal{C}'h-1)^2]\sin\rho r}{\rho^2h^2+\mathcal{C}'h(\mathcal{C}h-1)}\left(\int_0^h fr\sin\rho r dr\right)e^{-a^2\rho^2t}.$$

Dans toute l'épaisseur de la couche extérieure, la distance $r$ est à peu près constante et égale à $h+l$; la valeur de R′ se réduit donc à

$$R'=\frac{a}{a'}\rho h\sin\rho h;$$

et à cause de $\frac{b'}{b'+\mathcal{C}}=\frac{q}{q+p'}$, la seconde équation (16) devient

$$u'=\frac{2q}{(q+p')h^2}\Sigma\frac{[\rho^2h^2+(\mathcal{C}'h-1)^2]\sin\rho h}{\rho^2h^2+\mathcal{C}'h(\mathcal{C}'h-1)}\left(\int_0^h fr\sin\rho r dr\right)e^{-a^2\rho^2t}.$$

L'expression de $ru$, comparée à la formule (8), montre que la distribution de la chaleur dans une sphère recouverte par une couche très

mince et d'une matière différente de la sienne, est la même, après un temps très court et jusqu'à son refroidissement total, que si la sphère émettait directement sa chaleur au-dehors, mais que le coefficient $p'$ du flux de chaleur à travers la surface extérieure de la couche, fût diminué dans le rapport de $q$ à $q+p'$; la quantité $q$ étant relative au passage de la chaleur à travers la surface intérieure de la couche, et dépendant de la matière de cette couche et de celle de la sphère.

La valeur de $u'$ nous fait aussi voir que la couche extérieure, quelle que mince qu'on la suppose, ne prend pas, en général, la température de la sphère près de leur surface de séparation; car si l'on appelle U la valeur de $u$ qui répond à $r=h$, on aura, à un instant quelconque,

$$u'=\frac{q\text{U}}{q+p'};$$

en sorte qu'il faudrait que la quantité $q$ fût extrêmement grande et comme infinie par rapport à $p'$, pour que l'on eût $u'=\text{U}$. Nous avons indiqué dans le n° 124, un moyen de déterminer la valeur de $q$ qui a lieu dans le contact de deux matières données; en la comparant à celle de $p'$, on en conclura le rapport des températures $u'$ et U qu'il serait difficile d'observer directement.

(150). Nous appliquerons encore les formules précédentes au cas où l'épaisseur de la couche extérieure et le rayon $h$ du noyau seront des lignes très petites, sans que les constantes $a$ et $a'$ soient aussi très petites. Parmi les racines de l'équation (15), il y en aura deux pour lesquelles les quantités $\frac{mh}{a}$ et $\frac{ml}{a'}$ seront, dans ce cas, de très petites fractions, et qu'il suffira d'employer, après un temps très court, dans les formules (16), ainsi qu'on va le voir.

Pour déterminer leurs valeurs approchées, je développe le premier membre de l'équation (15) en une série ordonnée suivant les puissances de $m^2$; je supprime le facteur $m^2$ commun à tous ses termes, puis je néglige le cube et les puissances supérieures de $m^2$; et dans les coefficiens de chacun des termes restans, je conserve seulement les parties de la moindre dimension par rapport à $h$ et $l$. En remettant pour $a^2$, $a'^2$, $b$, $b'$, leurs valeurs, il vient

$$qp'(h+l)^2 - \frac{1}{3}m^2[qch^3 + qc'l^3 + 3qc'hl(h+l) + p'ch(h+l)^2]$$
$$+ \frac{1}{9}m^4cc'hl[l^2 + 3h(h+l)] = 0. \qquad (20)$$

On tirera de cette équation deux valeurs de $m^2$, que nous représenterons par $m'^2$ et $m''^2$, et qui seront de la dimension $-1$ par rapport à $h$ et $l$; d'où l'on peut aisément conclure que tous les termes du développement de l'équation (15), que nous avons négligés, seraient d'une dimension plus élevée que ceux qui ont été conservés, et qu'ainsi les racines $m'^2$ et $m''^2$ sont deux valeurs d'autant plus approchées de $m^2$, que ces lignes $h$ et $l$ seront plus petites. Quant aux autres valeurs de $m^2$ que l'on déduirait de l'équation (15), elles seraient toutes de la dimension $-2$ par rapport à $h$ et $l$, et, conséquemment, très grandes relativement à $m'^2$ et $m''^2$; les termes qui leur répondent dans les formules (16) s'évanouiront donc les premiers, et très promptement; en sorte qu'après un très court intervalle de temps, dont nous ferons abstraction, ces formules se réduiront sensiblement aux termes correspondans à $m'$ et $m''$.

En conservant la lettre $m$ pour représenter l'une ou l'autre des quantités $m'$ et $m''$, les valeurs approchées de P, Q, R, R', seront

$$P = \frac{2m^2}{3a'^2}[l^3 + 3hl(h+l)],$$
$$Q = \frac{m}{a'}\left\{h + \frac{(h+l)^2 \mathcal{C}}{hb'} - \frac{m^2[l^3 + 3hl(h+l)]}{3a'^2b'h}\right\},$$
$$R = \frac{m^2r}{aa'}\left\{h + \frac{(h+l)^2 \mathcal{C}}{hb'} - \frac{m^2[l^3 + 3hl(h+l)]}{3a'^2b'h}\right\},$$
$$R' = \frac{m^2hr}{aa'};$$

on aura, en même temps,

$$\sin\frac{mh}{a} = \frac{mh}{a}, \quad h - \frac{a}{m}\sin\frac{mh}{a}\cos\frac{mh}{a} = \frac{2m^2h^3}{3a^2};$$

d'où il résultera, en remettant toujours pour $a^2$, $a'^2$, $b$, $b'$, $\mathcal{C}$, leurs valeurs

$$\frac{m^2hM}{aa'}=\frac{3c\left\{1+\frac{(h+l)^2p'}{qh^2}-\frac{m^2c'[l^3+3hl(h+l)]}{3qh^2}\right\}\int_0^h r^2\mathrm{F}r\,dr+3c'\int_h^{h+l} r^2\mathrm{F}'r\,dr}{ch^3\left\{1+\frac{(h+l)^2p'}{qh^2}-\frac{m^2c'[h^3+3hl(h+l)]}{3qh^2}\right\}^2+c'[l^3+3hl(h+l)]},$$

où l'on a aussi substitué $r\mathrm{F}r$ et $r\mathrm{F}'r$ à $fr$ et $f'r$. Donc, en désignant par $\mu'$ et $\mu''$ ce que devient cette dernière quantité quand on y met successivement $m'$ et $m''$ à la place de $m$, et réduisant les seconds membres des équations (16) aux termes correspondans à ces racines de l'équation (15), nous aurons

$$\left.\begin{aligned} u = {} & \mu'\left\{1+\frac{(h+l)^2p'}{qh^2}-\frac{m'^2c'[l^3+3hl(h+l)]}{3qh^2}\right\}e^{-m'^2t} \\ & +\mu''\left\{1+\frac{(h+l)^2p'}{qh^2}-\frac{m''^2c'[l^3+3hl(h+l)]}{3qh^2}\right\}e^{-m''^2t}, \\ u' = {} & \mu'e^{-m'^2t}+\mu''e^{-m''^2t}, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

où l'on voit que la température sera la même dans toute l'étendue de chaque partie de la sphère, et indépendante des conductibilités $k$ et $k'$, mais différente, en général, pour ses deux parties, quelle que petites qu'elles soient. Pour qu'elle fut la même pour la sphère entière, il faudrait que la quantité $q$ relative à la surface de séparation des deux parties, fût infinie.

(151). L'hypothèse du n° 37, relative aux corps d'un très petit volume, ne convient donc au cas de la non homogénéité que quand la matière varie par degrés insensibles dans leur intérieur; et pour pouvoir l'étendre, comme le font généralement les physiciens, à des corps composés de deux ou d'un plus grand nombre de parties contiguës, de matières différentes, il serait nécessaire que le coefficient de la différence des températures, dans le flux de chaleur qui a lieu au passage d'une partie à une autre, eût une valeur infinie, ou extrêmement grande, ce que l'expérience pourrait seule nous apprendre.

Au reste, on peut aussi parvenir d'une manière directe au résultat que nous venons d'obtenir, en admettant seulement que la température est la même dans toute l'étendue de chacune des deux parties de la sphère, du moins après un intervalle de temps assez court pour qu'on en puisse faire abstraction.

40..

Pour le faire voir, je conserverai toutes les notations précédentes, de manière que $u'$ et $u$ soient, au bout du temps $t$, les températures de la couche extérieure et de la sphère qu'elle recouvre; $c'$ et $c$ leurs chaleurs spécifiques; $l$ l'épaisseur de la couche, et $h$ le rayon de l'autre partie; $p'u'$ et $q(u-u')$ les flux de chaleur rapportés aux unités de surface et de temps, qui ont lieu, de dedans en dehors, à la surface de la sphère entière et à celle de la sphère intérieure. Cette dernière surface étant égale à $4\pi h^2$, la perte de chaleur de la sphère intérieure, pendant l'instant $dt$, sera $4\pi h^2 q(u-u')$; prise avec un signe contraire, cette quantité exprimera donc l'augmentation de chaleur correspondante à l'accroissement $du$ de la température; et cette augmentation étant aussi égale au produit de $cdu$ et du volume $\frac{4\pi h^3}{3}$ de cette sphère, il s'ensuit qu'on aura

$$ch\frac{du}{dt} + 3q(u-u') = 0.$$

De même, l'augmentation de chaleur de la couche extérieure pendant le même instant, sera égale à l'excès de la quantité de chaleur $4\pi h^2 q(u-u')dt$ qui lui est communiquée par la sphère intérieure sur celle que la couche émet au dehors, et qui est exprimée par $4\pi(h+l)^2 p'u'dt$; par conséquent, cet excès devra être égal à l'augmentation de chaleur correspondante à l'accroissement $du'$ de la température, c'est-à-dire, au produit de $c'du'$ et du volume $\frac{4\pi}{3}[l^3 + 3hl(h+l)]$ de la couche extérieure; nous aurons donc aussi

$$[l^3 + 3hl(h+l)]c'\frac{du'}{dt} + 3(h+l)^2 p'u' + 3qh^2(u'-u) = 0.$$

On intégrera ces deux équations, en prenant

$$u = \mu e^{-m^2 t}, \quad u' = \mu' e^{-m^2 t};$$

$\mu$, $\mu'$, $m$, étant des constantes indéterminées. En y substituant ces valeurs de $u$ et $u'$, il vient

$$(3q - chm^2)\mu = 3q\mu',$$
$$\{3p'(h+l)^2 + 3qh^2 - c'[l^3 + 3hl(h+l)]m^2\}\mu' = 3qh^2\mu;$$

et si l'on multiplie celles-ci membre à membre, et que l'on supprime ensuite le facteur commun $\mu\mu'$, on aura

$$(3q - chm^2)\{3p'(h+l)^2 + 3qh^2 - c'[l^3 + 3hl(h+l)]m^2\} = 9q^2h^2;$$

équation qui servira à déterminer $m$, et qui coïncide avec l'équation (20) que l'on a trouvée d'une autre manière. Il s'ensuit que l'on pourra désigner, comme plus haut, par $m'^2$ et $m''^2$ les deux valeurs de $m^2$ que l'on en déduit; et il est visible que ces quantités seront réelles et positives : l'une d'elles sera comprise entre zéro et la plus petite des deux quantités $\frac{3q}{ch}$ et $\frac{3p'(h+l)^2 + 3qh^2}{c'l^3 + 3c'hl(h+l)}$, et l'autre surpassera la plus grande de ces deux quantités; lesquelles sont les valeurs de $m^2$ qui rendraient nul le premier membre de l'équation précédente.

L'une des deux équations d'où elle a été déduite, la seconde, par exemple, déterminera le coefficient $\mu$ au moyen de $\mu'$; et en employant les deux valeurs $m'^2$ et $m''^2$ de $m^2$, les formules (21) seront les deux intégrales complètes qu'il s'agissait d'obtenir; $\mu'$ et $\mu''$ désignant les deux constantes arbitraires.

Il ne restera donc plus qu'à déterminer ces constantes; ce que l'on fera en représentant par $4\pi c\delta$ et $4\pi c'\delta'$ les quantités de chaleur initiales de la sphère intérieure et de la couche qui la recouvre, c'est-à-dire, les valeurs de $\frac{4\pi h^3cu}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}[l^3 + 3hl(h+l)]c'u'$, qui répondent à $t = 0$, de sorte que l'on ait, en vertu des équations (21),

$$3\delta = \left\{1 + \frac{(h+l)^2p'}{qh^2} - \frac{m'^2c'[l^3 + 3hl(h+l)]}{3qh^2}\right\}h^3\mu'$$
$$+ \left\{1 + \frac{(h+l)^2p'}{qh^2} - \frac{m''^2c'[l^3 + 3hl(h+l)]}{3qh^2}\right\}h^3\mu'',$$
$$3\delta' = [l^3 + 3hl(h+l)](\mu' + \mu'').$$

Pour comparer les valeurs de $\mu'$ et $\mu''$ qui en résulteront à celles du numéro précédent, il est nécessaire que la valeur de $\mu'$ soit exprimée au moyen de la seule racine $m'$, et que celle de $\mu''$ contienne seulement $m''$; or, d'après l'équation (20), on a

$$cc'hl[l^2+3(h+l)^2](m'^2+m''^2) = 3qch^3\left[1+\frac{(h+l)^2p'}{qh^2}\right] + 3qc'l[l^2+3h(h+l)],$$

$$cc'hl[l^2+3(h+l)^2]m'^2m''^2 = 9qp'(h+l)^2;$$

d'où l'on conclut

$$ch^3\left\{1+\frac{(h+l)^2p'}{qh^2}-\frac{m'^2c'[l^3+3hl(h+l)]}{3qh^2}\right\}\left(1+\frac{(h+l)^2p'}{qh^2}-\frac{m''^2c'[l^3+3hl(h+l)]}{3qh^2}\right) + c'[l^3+3hl(h+l)] = 0;$$

au moyen de quoi la valeur de $\mu'$ pourra être exprimée ainsi :

$$\mu' = \frac{3c\delta\left\{1+\frac{(h+l)^2p'}{qh^2}-\frac{m'^2c'[l^3+3hl(h+l)]}{3qh^2}\right\}+3c'\delta'}{ch^3\left\{1+\frac{(h+l)^2p'}{qh^2}-\frac{m'^2c'[l^3+3hl(h+l)]}{3qh^2}\right\}^2+c'[l^3+3hl(h+l)]},$$

et celle de $\mu''$ s'en déduira par le changement de $m'$ en $m''$.

Ces expressions de $\mu'$ et $\mu''$ coïncident, comme on voit, avec celles du numéro précédent, en observant que les intégrales $\int_0^h r^2 F r dr$ et $\int_h^{h+l} r^2 F' r dr$ sont les valeurs de $\delta$ et $\delta'$. Il s'ensuit donc que les expressions de $u$ et $u'$ en fonctions de $t$, que l'on obtient directement pour le cas où les lignes $h$ et $l$ sont supposées très petites, ne diffèrent pas de celles que nous avions d'abord déduites des formules générales ; ce qui fournit une confirmation remarquable de ces formules.

Si les deux parties de la petite sphère sont de la même matière et forment un corps homogène, il faudra que les valeurs de $u$ et $u'$ soient égales pour $r = h$, ce qui exige que l'on ait $q = \infty$. L'une des deux racines de l'équation (20) sera infinie, et l'on devra, en conséquence, supprimer le terme contenant l'exponentielle qui lui correspond dans les formules (21). Nous supposerons que $m''^2$ soit cette racine ; les deux quantités $c$ et $c'$ étant égales, l'équation (20) donnera, pour la valeur de l'autre racine,

$$m'^2 = \frac{3p'}{(h+l)c};$$

on aura donc

$$u' = u = \mu' e^{-\frac{3p't}{(h+l)c}};$$

et comme la valeur précédente de $\mu'$ se réduira à

$$\mu' = \frac{3(\delta + \delta')}{(h+l)^3},$$

c'est-à-dire, à la moyenne des températures, il s'ensuit que la valeur commune de $u$ et $u'$ coïncidera avec le résultat du n° 141.

(152). Les lignes $h$ et $l$ étant toujours très petites, supposons de plus que l'épaisseur $l$ de la couche extérieure soit très petite, même par rapport au rayon $h$ de la sphère qu'elle recouvre, de sorte que le rapport $\frac{l}{h}$ soit une très petite fraction. L'une des deux racines de l'équation (20), par exemple $m''^n$, sera très grande et en raison inverse de $l$; par conséquent, après un très court intervalle de temps, il faudra supprimer le terme qui contient l'exponentielle correspondante à cette racine dans chacune des formules (21). La valeur approchée de l'autre racine $m'^n$ s'obtiendra en négligeant $l$ dans l'équation (20); et l'on aura, de cette manière,

$$m'^n = \frac{3qp'}{(q+p')ch}.$$

La valeur correspondante de $\mu'$ sera aussi, à très peu près,

$$\mu' = \frac{3q}{(q+p')h^3}\int_0^h r^2 Fr dr = \frac{q\gamma}{q+p'},$$

en désignant par $\gamma$ la moyenne des températures de la sphère intérieure.

Cela posé, les expressions de $u$ et $u'$ données par les formules (21), se réduiront à

$$u = \gamma e^{-\frac{3qp't}{(q+p')ch}}, \quad u' = \frac{q\gamma}{q+p'} e^{-\frac{3qp't}{(q+p')ch}};$$

ce qui montre que les températures $u$ et $u'$ des deux parties de la sphère conserveront constamment entre elles le rapport que nous

avons déjà trouvé entre ces quantités (n° 149); en sorte que ce rapport constant subsistera encore malgré la petitesse de l'une des parties relativement à l'autre.

Quelle que mince que soit l'enveloppe de la boule d'un thermomètre, il n'est donc pas certain qu'elle prenne la température du fluide intérieur, pendant que l'instrument s'échauffe ou se refroidit, avant de parvenir, dans toute sa masse, à la température extérieure. Pour que l'enveloppe et le fluide aient, à chaque instant, des températures égales, ainsi qu'on le suppose ordinairement, il faut que la quantité $p'$ relative au flux de chaleur à travers la surface extérieure de l'enveloppe, soit très petite et puisse être négligée par rapport à la quantité $q$ correspondante à son autre surface en contact avec le fluide intérieur. Sur ce point, l'extension que nous avons donnée à l'hypothèse du n° 37 doit être restreinte à ce cas particulier. La quantité $q$ peut dépendre de la nature du fluide intérieur et de celle de l'enveloppe, et variera, par exemple, selon que ce liquide sera le mercure ou l'alcool; mais il y a lieu de croire qu'elle ne dépendra pas de l'état de la surface intérieure de l'enveloppe, c'est-à-dire, de son degré de poli et de sa coloration; car on peut comparer la chaleur qui passe de l'enveloppe dans le liquide, à celle qui est enlevée à un corps solide par l'air en contact avec sa surface, et qui ne varie pas, comme on sait (n° 39), avec l'état de sa superficie. Toutefois, cette conjecture aurait besoin d'être vérifiée par l'expérience; et, pour cela, il faudrait observer, avec une grande précision, les vitesses du refroidissement d'un même liquide, contenu dans une même enveloppe, dont la surface intérieure serait successivement dans différens états de coloration et de poli. Si l'on trouvait des valeurs inégales pour ces vitesses, on en conclurait que la quantité $q$ varie avec l'état de cette surface; si, au contraire, ces valeurs étaient égales, cela prouverait que la quantité $q$ est indépendante de l'état de la surface en contact avec le liquide, à moins qu'elle ne soit très grande par rapport à la quantité $p'$ relative à la surface extérieure de l'enveloppe, de telle sorte que la fraction $\frac{q}{q+p'}$ fût toujours sensiblement égale à l'unité.

L'expression que nous venons de trouver pour la température $u$ à

un instant quelconque, montre aussi que le procédé suivi par les physiciens pour comparer les chaleurs spécifiques des corps d'après les temps de leur refroidissement, n'est pas aussi propre qu'on l'a pensé à cette comparaison. En effet, ce procédé exige que l'on amène les surfaces des deux corps à un même état, en les recouvrant l'une et l'autre d'une couche formée de la même matière, d'une très petite épaisseur, mais assez grande pour que le flux de chaleur extérieure atteigne son *maximum* (n° 41). Or, dans cet état, supposons que la sphère du rayon $h$ que nous venons de considérer, emploie un temps $\theta$ à passer de sa température initiale $\gamma$ à une autre température $\gamma'$; d'après la valeur précédente de $u'$, nous aurons

$$\frac{3qp'\theta}{(q+p')ch} = \log\frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Pour une autre sphère d'un rayon $h$ comme la première, enduite d'une couche très mince de la même matière que celle qui recouvrait cette première sphère, si l'on appelle $\theta_{,}$ le temps que la température emploie aussi à passer de $\gamma$ à $\gamma'$, on aura de même

$$\frac{3q_{,}p'\theta_{,}}{(q_{,}+p')c_{,}h} = \log\frac{\gamma}{\gamma'};$$

$c_{,}$ étant la chaleur spécifique de cette seconde sphère, et $q_{,}$ la quantité relative au passage de la chaleur de cette sphère dans la couche extérieure qui la recouvre. De ces deux équations, on déduit

$$\frac{(q_{,}+p')q\theta}{(q+p')q_{,}\theta_{,}} = \frac{c}{c_{,}};$$

équation qui ne peut s'accorder avec celle du n° 40, et servir à déterminer le rapport des chaleurs spécifiques $c$ et $c_{,}$, d'après celui des temps $\theta$ et $\theta_{,}$, qu'autant que les quantités $q$ et $q_{,}$ sont très grandes, l'une et l'autre, par rapport à $p'$, ou qu'elles sont indépendantes des matières des deux sphères, et par conséquent égales.

Réciproquement, si le rapport $\frac{c}{c_{,}}$ est connu, cette dernière équation fera connaître celui des deux quantités $\frac{q}{p'}$ et $\frac{q_{,}}{p'}$, d'après les temps $\theta$ et $\theta_{,}$ observés. L'intensité du flux de chaleur à travers la surface de

contact de deux matières différentes, sur laquelle nous n'avons jusqu'à présent aucune notion, est cependant indispensable à connaître dans un grand nombre de questions; et il serait à désirer qu'on s'occupât d'en déterminer la grandeur, comparée à celle qui a lieu à la surface extérieure des corps, soit au moyen de l'équation précédente, soit autrement (n° 124).

(153). Revenons maintenant au cas de la sphère homogène d'un rayon quelconque $l$, auquel se rapporte la formule (8). Mettons dans cette équation $l - x$ au lieu de $r$, puis $x'$ à la place de $x$ sous le signe $\int$; l'intégrale relative à $x'$ devra s'étendre depuis $x' = l$ jusqu'à $x' = 0$; mais en intervertissant l'ordre de ces limites, et changeant le signe du résultat, nous aurons

$$u = \frac{1}{l(l-x)} \Sigma \frac{\rho^2 l^2 + (pl - 1)^2}{\rho^2 l^2 + pl(pl - 1)} \left\{ \int_0^l [\cos \rho (x - x') \right.$$
$$\left. - \cos \rho(2l - x - x')] (l - x') \operatorname{F}(l - x') dx' \right\} e^{-a^2 \rho^2 t}.$$

D'après les valeurs de $\sin \rho l$ et $\cos \rho l$, que l'on tire de l'équation (7), on aura aussi

$$\cos \rho (2l - x - x') = \frac{[(pl-1)^2 - \rho^2 l^2] \cos \rho (x + x') - (pl - 1) \rho l \sin \rho (x + x')}{\rho^2 l^2 + (pl - 1)^2}.$$

La quantité $u$ sera la température qui a lieu, au bout du temps $t$, à la distance $x$ de la surface; en appelant $fx$ sa valeur initiale, il faudra mettre $fx'$ au lieu de $\operatorname{F}(l - x')$; et cela étant, la valeur de $u$ prendra la forme :

$$u = \frac{2}{l} \Sigma \frac{\rho l \cos \rho x + (pl - 1) \sin \rho x}{\rho^2 l^2 + pl(pl - 1)} \left\{ \int_0^l [\rho l \cos \rho x' + (pl - 1) \sin \rho x'] \left( \frac{l - x'}{l - x} \right) fx' dx' \right\} e^{-a^2 \rho^2 t}.$$

Supposons actuellement que le rayon $l$ devienne infini, on verra, comme dans le n° 142, que les valeurs de $\rho$ croîtront par degrés infiniment petits, de telle sorte qu'en désignant par $n$ un nombre entier et positif, et faisant

$$\rho = \frac{n\pi}{l} = z, \quad \frac{\pi}{l} = dz,$$

la somme $\Sigma$ se changera en une intégrale relative à $z$, qui s'éten-

dra depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$. De plus, on pourra réduire le facteur $\frac{l - x'}{l - x}$ à l'unité, et la quantité $pl - 1$ à $pl$. Il en résultera donc

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(z \cos zx + p \sin zx)(z \cos zx' + p \sin zx')}{z^2 + p^2} e^{-a^2 z^2 t} fx' dx' dz. \quad (22)$$

Cette formule représentera la loi des températures dans un corps homogène, terminé par un plan indéfini, rayonnant à travers cette surface dans un milieu dont la température est zéro, et s'étendant indéfiniment de l'autre côté de ce plan, qui est partout dans le même état. On suppose la température égale, à chaque instant, en tous les points de chaque section parallèle au plan; et, pour cela, il suffit que cette condition ait été remplie à l'époque d'où l'on compte le temps $t$. A cette époque, la température à la profondeur $x$ étant $fx$, il faut qu'on ait, quelle que soit cette fonction,

$$fx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(z \cos zx + p \sin zx)(z \cos zx' + p \sin zx')}{z^2 + p^2} fx' dx' dz,$$

pour toutes les valeurs de $x$ plus grandes que zéro.

Pour vérifier cette équation, j'observe que d'après la formule (14) du n° 102, on a

$$fx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \cos zx \cos zx' fx' dx' dz,$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \sin zx \sin zx' fx' dx' dz;$$

je suppose que dans cette formule la fonction arbitraire $fx'$ soit telle que l'on ait $f(-x') = fx'$; la seconde intégrale double s'évanouira, et dans la première on pourra intégrer seulement depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$, en doublant le résultat; de sorte que l'on aura

$$fx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos zx \cos zx' fx' dx' dz.$$

En retranchant cette équation de celle qu'il s'agit de vérifier, il en résultera

$$\int_0^\infty \left[ \int_0^\infty \frac{z \sin z(x + x') - p \cos z(x + x')}{z^2 + p^2} dz \right] fx' dx' = 0.$$

41..

Or, $x$ et $g$ étant des quantités positives quelconques, on a (n° 135)

$$\int_0^\infty \frac{z \sin xz dz}{z^2+g^2} = \frac{2}{\pi} e^{-gx}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos xz\, dz}{z^2+g^2} = \frac{\pi}{2g} e^{-gx};$$

si donc on remplace dans ces équations $g$ et $x$ par $p$ et $x+x'$, on en conclura

$$\int_0^\infty \frac{z \sin z(x+x') - p \cos z(x+x')}{z^2+p^2} dz = 0;$$

ce qui rend effectivement nulle l'intégrale double précédente.

On peut remarquer que l'équation (22) coïncide, comme cela devrait être, avec celle que nous avons trouvée dans le n° 131, pour le cas d'une barre dont la longueur est infinie, quand on n'a point égard au rayonnement latéral, et que l'on fait, en conséquence, $b=0$ dans cette autre formule. Au moyen de la formule employée dans le n° 74, l'intégration relative à $z$ s'effectue sous forme finie dans les deux cas particuliers de $p=0$ et $p=\infty$, et la valeur de $u$ s'exprime alors par une intégrale simple, relative à $x'$.

(154). Lorsque le temps $t$ est devenu très grand, on peut développer la formule (22) en une série convergente, ordonnée suivant les puissances descendantes de $t$.

En effet, en développant suivant les puissances croissantes de $z$, on a

$$\frac{(z \cos zx + p \sin zx)(z \cos zx' + p \sin zx')}{z^2+p^2} = Pz^2 + P'z^4 + P''z^6 + \text{etc.};$$

P, P', P'', etc., étant des coefficiens indépendans de $z$, dont il sera facile de former les valeurs, et dont le premier, par exemple, sera

$$P = \frac{1}{p^2}(1+px)(1+px').$$

D'ailleurs, en désignant par $n$ un nombre entier et positif, on aura (n° 75)

$$\int_0^\infty e^{-a^2z^2t} z^{2n} dz = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2^n a^{2n} t^n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}};$$

nous aurons donc

$$\int_0^\infty \frac{(z\cos zx + p\sin zx)(z\cos zx' + p\sin zx')dz}{z^2+p^2}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\left(\frac{P}{2a^2t} + \frac{1.3.P'}{4a^4t^2} + \frac{1.3.5.P''}{6a^6t^3} + \text{etc.}\right);$$

et si nous faisons généralement

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2^n}\int_0^\infty P^{(n-1)} fx'dx' = Q^{(n-1)},$$

la formule (22) deviendra

$$u = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\left(\frac{Q}{a^2t} + \frac{Q'}{a^4t^2} + \frac{Q''}{a^6t^3} + \text{etc.}\right).$$

Or, si l'on excepte le cas où les quantités Q, Q', Q'', etc., deviendraient infinies par la nature de la fonction $fx'$, ou bien parce qu'on aurait $p=0$, on voit que le temps $t$ pourra toujours devenir assez grand pour que cette série soit aussi convergente que l'on voudra; mais comme les numérateurs de ses termes successifs renfermeront les puissances croissantes de la variable $x$, on voit aussi qu'il faudra, pour cette convergence, que le produit $a\sqrt{t}$ soit d'autant plus grand que cette distance $x$ sera plus considérable.

Avant de devenir tout-à-fait zéro, comme la température extérieure, par l'effet du rayonnement à la surface, la température $u$ se réduira sensiblement au premier terme de la série précédente; et en y mettant pour Q sa valeur, on aura

$$u = \frac{1+px}{p^2a^3t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty (1+px') fx'dx';$$

ce qui montre que dans cet état final du corps, les températures de ses différens points croîtront proportionnellement à leurs distances à la surface, et varieront, en général, en raison inverse de la puissance $\frac{3}{2}$ du temps. Je dis *en général;* car la série précédente et cette loi finale n'auraient plus lieu si l'intégrale relative à $x'$ était infinie.

Supposons, par exemple, que la température initiale soit la même

et égale à une constante $\gamma$ dans tous les points du corps. Au lieu de prendre $fx = \gamma$, faisons d'abord

$$fx = \gamma e^{-gx};$$

$g$ étant une constante positive et infiniment petite. Nous aurons, par les règles ordinaires,

$$\int_0^\infty e^{-gx'} (z \cos zx' + p \sin zx') dx' = \frac{z(p+g)}{z^2+g^2},$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{2\gamma(p+g)}{\pi} \int_0^\infty \frac{(z \cos zx + p \sin zx) z}{(z^2+g^2)(z^2+p^2)} e^{-a^2z^2t} dz.$$

On pourra réduire à $z^2$ le facteur $z^2 + g^2$ du dénominateur, excepté pour les valeurs infiniment petites de $z$; mais, pour ces valeurs, le numérateur étant aussi infiniment petit, et le coefficient de $dz$ sous le signe $\int$ ne devenant point infini, on pourra, sans aucune erreur, négliger la partie correspondante de l'intégrale; en sorte que l'on aura exactement

$$u = \frac{2\gamma p}{\pi} \int_0^\infty \frac{(z \cos zx + p \sin zx)}{z(z^2+p^2)} e^{-a^2z^2t} dz.$$

Maintenant, en développant, comme plus haut, suivant les puissances croissantes de $x$, le coefficient de l'exponentielle sous le signe $\int$, et intégrant ensuite, on en conclura

$$u = \frac{\gamma}{a\sqrt{\pi t}} \left( Y + \frac{Y'}{a^2t} + \frac{Y''}{a^4t^2} + \text{etc.} \right);$$

Y, Y′, Y″, etc., étant des quantités indépendantes de $t$ et faciles à déterminer. La température $u$ sera donc sensiblement nulle, comme précédemment, au bout d'un temps très grand; mais avant d'être égale à zéro, elle se réduira au premier terme de cette série, et variera seulement en raison inverse de la puissance $\frac{1}{2}$ de $t$, au lieu de la puissance $\frac{3}{2}$; ce qui montre que la loi des variations finales de la température $u$, par rapport au temps, dépendra de la loi des températures initiales. La série précédente, réduite à son premier

terme, donnera

$$u = \frac{\gamma(1 + px)}{pa\sqrt{\pi t}};$$

en sorte que la température finale croîtra toujours proportionnellement à la distance $x$, comme dans le cas général.

(155). Dans ce chapitre et dans celui qui précède, nous avons toujours supposé la température extérieure constante et égale à zéro; mais quand on a déterminé la distribution de la chaleur dans un corps, soumis à une température extérieure égale à zéro, il est facile, en général, d'étendre la solution du problème au cas où la température est une fonction quelconque du temps. Le procédé le plus direct pour y parvenir est celui que j'ai suivi dans mon premier mémoire sur *la Distribution de la Chaleur*, et auquel on a cherché depuis à substituer d'autres méthodes dont les principes et les résultats ne sont pas exempts de difficulté. Un exemple suffira pour expliquer ce procédé. Nous choisirons, à cet effet, la question précédente, relative à une sphère extrêmement grande, que l'on considère comme un corps terminé par un plan, et qui rayonne à travers cette surface dans un milieu dont la température $\zeta$ sera maintenant une fonction donnée du temps.

En mettant $l - x$ à la place de $r$ dans l'équation (2), qui doit avoir lieu à la surface, on aura

$$\frac{du}{dx} = p(u - \zeta),$$

pour $x = 0$; en même temps, l'équation commune à tous les points du corps, ou relative à toutes les valeurs de $x$, sera

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2};$$

et, comme précédemment, on aura enfin $u = fx$ pour $t = 0$. Dans chaque cas, cette température initiale et la température extérieure seront données, la première depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$; et la seconde, en fonction de $t$, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$.

Or, pour satisfaire à ces trois équations du problème, je ferai

$$u = u_{,} + U;$$

$u_{,}$ étant une nouvelle inconnue, et U une quantité dont je disposerai à volonté. Je la supposerai telle que l'on ait

$$\frac{dU}{dx} = p(U - \zeta),$$

pour $x = 0$ seulement, et

$$\frac{dU}{dt} = a^2 \frac{d^2U}{dx^2},$$

pour toutes les valeurs de $x$. Il faudra alors que l'on ait

$$\frac{du_{,}}{dx} = pu_{,}, \quad \frac{du_{,}}{dt} = a^2 \frac{d^2u_{,}}{dx^2};$$

la première équation ayant lieu pour $x = 0$, et la seconde pour toutes les valeurs de $x$. De plus, si l'on appelle $\psi x$ la valeur de U qui répond à $t = 0$, il faudra que l'on ait aussi $u_{,} = fx - \psi x$ pour cette valeur particulière $t = 0$. On conclut de là que l'expression de $u_{,}$ en fonction de $t$ et $x$ sera donnée par la formule (22), dans laquelle on mettra $fx - \psi x$ à la place de $fx$. Par conséquent, nous aurons

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(z\cos zx + p\sin zx)(z\cos zx' + p\sin zx')}{z^2 + p^2}(fx' - \psi x')e^{-a^2z^2t}dx'dz + U, \quad (23)$$

pour l'expression de $u$, dans laquelle il ne restera plus qu'à déterminer la quantité U, dont la valeur dépendra de celle de $\zeta$.

Représentons par $\alpha$, A, $\varepsilon$, des constantes quelconques, dont la première est une quantité réelle et positive, et supposons que l'on ait d'abord

$$\zeta = A\cos(\alpha t + \varepsilon).$$

Si la valeur de $\zeta$ se compose de plusieurs termes semblables à celui-là, il résulte de la forme linéaire des équations auxquelles U doit satisfaire, que sa valeur se composera aussi d'autant de termes correspondans à ceux de $\zeta$, qui se détermineront tous de la même manière. De plus, en supposant les termes de $\zeta$ infiniment petits et

en nombre infini, on pourra représenter par une intégrale double une valeur quelconque de $\zeta$ en fonction de $t$; l'expression correspondante de U se changera aussi en une pareille intégrale; et, de cette manière, la détermination générale de cette partie de la température se trouvera ramenée au cas particulier de la valeur précédente de $\zeta$.

Dans ce cas, je fais

$$U = X \sin(\alpha t + \varepsilon) + X' \cos(\alpha t + \varepsilon);$$

X et X′ étant des fonctions de $x$. En substituant cette valeur de U dans l'équation à laquelle elle doit satisfaire pour toutes les valeurs de $x$, et égalant les coefficiens des termes semblables dans les deux membres, on aura

$$\alpha X - a^2 \frac{d^2X'}{dx^2} = 0, \quad \alpha X' + a^2 \frac{d^2X}{dx^2} = 0.$$

D'après l'équation relative à $x = 0$, on aura de même

$$\frac{dX}{dx} - pX = 0, \quad \frac{dX'}{dx} - p(X' - A) = 0,$$

pour cette valeur particulière de $x$. Les intégrales complètes des deux premières équations sont

$$X = \left(C \sin\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + C' \cos\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}$$
$$+ \left(C'' \cos\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + C''' \sin\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) e^{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}},$$
$$X' = \left(C \cos\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - C' \sin\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}$$
$$+ \left(C'' \sin\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - C''' \cos\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) e^{\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}};$$

C, C′, C″, C‴, étant les quatre constantes arbitraires. Il suffira de deux de ces constantes pour satisfaire aux deux autres équations; celles qui resteraient indéterminées entreraient dans U et dans $\psi x$, et devraient disparaître dans $u$. On pourra donc déterminer comme on voudra deux de ces quatre quantités; et nous ferons C″ = 0

et $C''' = 0$, afin que les exponentielles qui ont des exposans positifs disparaissent des valeurs de X et X', et que la valeur de U ne croisse pas indéfiniment avec $x$, pour une valeur quelconque de $\alpha$. En déterminant ensuite C et C', au moyen des deux équations relatives à $x = 0$, et faisant, pour abréger,

$$\frac{\alpha}{a^2} + \frac{p\sqrt{2\alpha}}{a} + p^2 = q^2,$$

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = q \sin \omega,$$

$$p + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = q \cos \omega,$$

nous aurons

$$X = \frac{p}{q} A e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \sin\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \omega\right),$$

$$X' = \frac{p}{q} A e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \omega\right),$$

et, par conséquent,

$$U = \frac{p}{q} A e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\alpha t + \varepsilon - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right). \quad (24)$$

Maintenant, soit $\varphi t$ une fonction quelconque de $t$, continue ou discontinue, et supposons qu'on ait $\zeta = \varphi t$. D'après ce qu'on a vu dans le n° 143, on aura

$$\varphi t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos \alpha t \cos \alpha t' \varphi t' dt' d\alpha, \quad (25)$$

pour toutes les valeurs positives de $t$, y compris $t = 0$. Si donc on fait

$$\varepsilon = 0, \quad A = \frac{2}{\pi} \varphi t' \cos \alpha t' dt' d\alpha;$$

que l'on donne successivement à $\alpha$ et $t'$ toutes les valeurs comprises depuis $\alpha = 0$ et $t' = 0$ jusqu'à $\alpha = \infty$ et $t' = \infty$, et qu'on prenne pour $\zeta$ la somme des valeurs correspondantes de $A \cos(\alpha t + \varepsilon)$, et, par conséquent, pour U la somme des valeurs de la formule (24), on aura

$$\mathrm{U} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{p\cos \alpha t'\varphi t' e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{a^2}+\frac{p\sqrt{2\alpha}}{a}+p^2}}\cos\left(\alpha t-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}-\omega\right)dt'd\alpha, \quad (26)$$

pour l'expression générale de U qu'il s'agissait de déterminer.

(156). Cette valeur de U étant exprimée par une intégrale double, il en sera de même à l'égard de la valeur de $\psi x$, qui s'en déduit en faisant $t=0$; par conséquent, la partie de la formule (23) qui dépend de $\psi x$ aura d'abord pour expression une intégrale quadruple, relative à $z, x', \alpha, t'$, et prise depuis zéro jusqu'à l'infini pour chacune de ces quatre variables; mais l'intégration relative à $x'$ s'effectuera, sous forme finie, par les règles ordinaires; et cette partie de la formule (23) se trouvera réduite à une intégrale triple. La valeur complète de $u$ sera donc exprimée par cette intégrale triple, et par deux intégrales doubles, l'une relative à $z$ et $x'$, l'autre à $\alpha$ et $t'$. Au bout d'un temps suffisamment grand, l'intégrale triple sera insensible, aussi bien que la première intégrale double, dépendante de $fx$ ou des températures initiales; à cette époque, la valeur de $u$ sera donc sensiblement égale à U, de sorte qu'elle ne dépendra plus que de la fonction $\varphi t$, ou de la loi des températures extérieures.

Désignons par $\tau$ une valeur particulière de $t$ assez grande pour que cette réduction de $u$ à U ait eu lieu à l'époque qui répond à $t=\tau$; supposons qu'à cet instant la loi des températures extérieures vienne à changer par une cause quelconque; on pourra considérer $\zeta$ comme une fonction discontinue de $t$, et représenter cette quantité pour toutes les valeurs de $t$, depuis $t=0$ jusqu'à $t=\infty$, par

$$\zeta = \varphi t + \varphi' t;$$

$\varphi t$ étant la même fonction que précédemment, et $\varphi' t$ une autre fonction dont les valeurs seront aussi données arbitrairement pour $t > \tau$, mais qui sera zéro pour $t < \tau$ et pour $t = \tau$. De cette manière, la valeur de $u$, réduite à sa partie dépendante de $\zeta$ après un temps $\tau$ extrêmement grand, se composera de deux termes, l'un relatif à $\varphi t$, qui sera toujours exprimé par la formule (26), l'autre correspondant à $\varphi' t$, qui se déduira de cette formule en y mettant $\varphi' t$ au lieu de $\varphi t$,

et que nous désignerons par U′. A cette époque, on aura donc

$$u = \mathrm{U} + \mathrm{U}'$$

pour la valeur complète de la température $u$.

L'expression de $\varphi' t$ se déduira de la formule (25) par la substitution de $\varphi' t'$ au lieu de $\varphi t'$; mais la fonction $\varphi' t'$ étant supposée nulle depuis $t' = 0$ jusqu'à $t' = \tau$ inclusivement, il suffira d'étendre l'intégrale relative à $t'$, depuis $t' = \tau$ jusqu'à $t' = \infty$; et l'on aura alors

$$\varphi' t = \frac{2}{\pi}\int_\tau^\infty\int_0^\infty \cos\alpha t \cos\alpha t' \varphi' t' dt' d\alpha.$$

D'après la formule (26), on aura, de la même manière,

$$\mathrm{U}' = \frac{2}{\pi}\int^\infty\int_0^\infty \frac{p\cos\alpha t'\varphi' t' e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{a^2}+\frac{p\sqrt{2\alpha}}{a^2}+p^2}} \cos\left(\alpha t - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right) dt' d\alpha.$$

Soit $\theta$ le temps écoulé depuis l'époque qui répond à $t = \tau$, de sorte qu'on ait

$$t = \tau + \theta;$$

faisons aussi

$$t' = \tau + t_{,}, \quad \varphi' t' = \varphi_{,} t_{,};$$

les limites de l'intégrale relative à $t_{,}$ seront zéro et l'infini, et la valeur de U′ prendra la forme

$$\mathrm{U}' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{p\varphi_{,} t_{,} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{a^2}+\frac{p\sqrt{2\alpha}}{a}+p^2}} \cos\left[\alpha(\theta - t_{,}) - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right] dt_{,} d\alpha$$
$$+ \int_0^\infty f\alpha \cos 2\tau\alpha d\alpha + \int_0^\infty f'\alpha \sin 2\tau\alpha d\alpha;$$

$f\alpha$ et $f'\alpha$ désignant, pour abréger, des intégrales relatives à $t_{,}$, dont nous n'aurons pas besoin d'écrire les valeurs. Il nous suffira de remarquer que ces fonctions de $\alpha$ ne varieront pas très rapidement avec la variable $\alpha$, et qu'elles s'évanouiront à la limite $\alpha = \infty$; or, la constante $\tau$ étant, par hypothèse, extrêmement grande et comme infinie,

il s'ensuit que les deux dernières intégrales relatives à $\alpha$, seront tout-à-fait insensibles. C'est ce que l'on voit en les réduisant par l'intégration par partie en séries ordonnées suivant les puissances négatives de $\tau$. Cela résulte aussi de ce qu'elles expriment les aires de courbes dont les ordonnées passent très rapidement du positif au négatif, ce qui rend insensibles les sommes des élémens de ces intégrales. En les supprimant donc, on aura simplement

$$U' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{p\varphi_{,}t_{,}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{a^2}+\frac{p\sqrt{2\alpha}}{a}+p^2}} \cos\left[\alpha(\theta-t_{,})-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}-\omega\right]dt_{,}d\alpha; \quad (27)$$

expression qui ne dépendra plus que du temps $\theta$ écoulé depuis l'époque où la loi des températures extérieures a changé, et qui fera connaître l'accroissement positif ou négatif des températures intérieures résultant de ce changement.

Maintenant, je suppose que la fonction $\varphi' t$ redevienne égale à zéro, après un intervalle de temps donné, que je désignerai par $\delta$, de sorte qu'elle soit nulle, non-seulement depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \tau$, mais aussi depuis $t = \tau + \delta$ jusqu'à $t = \infty$ ; il suffira alors d'étendre depuis $t' = \tau$ jusqu'à $t' = \tau + \delta$, l'intégrale relative à $t'$ dans l'expression de $\varphi' t$, qui deviendra, en conséquence,

$$\varphi' t = \frac{2}{\pi}\int_{\tau}^{\tau+\delta}\int_0^{\infty} \cos\alpha t \cos\alpha t' \varphi' t' dt' d\alpha; \quad (28)$$

et pour toutes les valeurs de $t$ qui tombent hors des limites $\tau$ et $\tau + \delta$, ou qui leur sont égales, cette formule devra être égale à zéro : pour les valeurs de $t$ comprises entre ces limites, elle représentera les valeurs correspondantes de $\varphi' t$. La fonction $\varphi_{,} t_{,}$ sera zéro pour $t_{,} = \delta$ et pour $t_{,} > \delta$; par conséquent, l'intégrale relative à $t_{,}$ dans la formule (27), ne s'étendra plus que depuis $t_{,} = 0$ jusqu'à $t_{,} = \delta$ ; mais au-delà de $t = \delta$, cette formule ne se réduira pas à zéro, parce que le changement survenu dans la loi des températures extérieures, et qui n'a duré qu'un temps égal à $\delta$, influe encore sur les températures extérieures, après qu'il a cessé.

(157). Voici un exemple propre à vérifier l'exactitude de la formule (28).

Désignons par A, $c$, $\delta$, trois constantes données, dont la première est une température et chacune des deux autres un intervalle de temps. Prenons

$$\varphi' t = A \cos \frac{t - c}{\delta},$$

entre les limites $t = c \pm \frac{1}{2}\pi\delta$; et supposons que $\varphi' t$ soit nulle en dehors de ces limites : la formule (28) deviendra

$$\varphi' t = \frac{2A}{\pi} \int_0^\infty \left( \int_{c - \frac{1}{2}\pi\delta}^{c + \frac{1}{2}\pi\delta} \cos \alpha t' \cos \frac{t' - c}{\delta} dt' \right) \cos \alpha t d\alpha.$$

On aura immédiatement

$$2 \int_{c - \frac{1}{2}\pi\delta}^{c + \frac{1}{2}\pi\delta} \cos \alpha t' \cos \frac{t' - c}{\delta} dt' = \frac{\cos (c + \frac{1}{2}\pi\delta)\alpha + \cos (c - \frac{1}{2}\pi\delta)\alpha}{\frac{1}{\delta} - \alpha}$$
$$+ \frac{\cos (c + \frac{1}{2}\pi\delta)\alpha + \cos (c - \frac{1}{2}\pi\delta)\alpha}{\frac{1}{\delta} + \alpha};$$

d'ailleurs on peut évidemment étendre l'intégrale relative à $\alpha$, depuis $\alpha = -\infty$ jusqu'à $\alpha = +\infty$, pourvu que l'on réduise le résultat à moitié; nous aurons donc

$$\varphi' t = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\cos (c + \frac{1}{2}\pi\delta)\alpha + \cos (c - \frac{1}{2}\pi\delta)\alpha] \cos \alpha t}{\frac{1}{\delta} - \alpha} d\alpha$$
$$+ \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\cos (c + \frac{1}{2}\pi\delta)\alpha + \cos (c - \frac{1}{2}\pi\delta)\alpha] \cos \alpha t}{\frac{1}{\delta} A + \alpha} d\alpha.$$

Sans changer les limites de ces dernières intégrales, on peut mettre à la place de $\alpha$, dans la première $\alpha + \frac{1}{\delta}$, et dans la seconde $\alpha - \frac{1}{\delta}$. Toutes réductions faites, il en résultera

$$\varphi' t = \frac{A \cos (c+t)\frac{1}{\delta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(c+\tfrac{1}{2}\pi\delta+t\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}$$
$$+\frac{A \cos (c-t)\frac{1}{\delta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(c+\tfrac{1}{2}\pi\delta-t\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}$$
$$-\frac{A \cos (c+t)\frac{1}{\delta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(c-\tfrac{1}{2}\pi\delta+t\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}$$
$$-\frac{A \cos (c-t)\frac{1}{\delta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(c-\tfrac{1}{2}\pi\delta-t\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

On pourra maintenant réduire les limites de chacune de ces quatre intégrales à zéro et l'infini, en doublant le résultat; mais d'après une formule connue, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\alpha}d\alpha = 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\alpha}d\alpha = \pm\pi,$$

selon que la constante $n$ est positive ou négative; chacune des quantités $t$, $c+\frac{1}{2}\pi\delta$, $c-\frac{1}{2}\pi\delta$, étant positive, on aura donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(c\pm\tfrac{1}{2}\pi\delta+t\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}=\pi;$$

ce qui réduira d'abord l'expression de $\varphi' t$ à

$$\varphi' t = \frac{A\cos(c-t)\frac{1}{\delta}}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\sin\left(c+\tfrac{1}{2}\pi\delta-t\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}\right.$$
$$\left.-\int_0^{\infty}\sin\left(c-\tfrac{1}{2}\pi\delta-t\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}\right].$$

De plus, si l'on a $t > c+\frac{1}{2}\pi\delta$, on aura aussi $t > c-\frac{1}{2}\pi\delta$; les deux dernières intégrales seront l'une et l'autre égales à $-\frac{1}{2}\pi$; et il en résultera $\varphi' t = 0$. Si l'on a $t < c-\frac{1}{2}\pi\delta$, et conséquemment $t < c+\frac{1}{2}\pi\delta$, ces deux intégrales seront l'une et l'autre égales à $+\frac{1}{2}\pi$; en sorte que l'on aura encore $\varphi' t = 0$. Enfin, si l'on a $t > c-\frac{1}{2}\pi\delta$ et $t < c+\frac{1}{2}\pi\delta$, on en conclura

$$\int_0^{\infty}\sin\left(c\pm\tfrac{1}{2}\pi\delta-t\right)\alpha\frac{d\alpha}{\alpha}=\pm\tfrac{1}{2}\pi;$$

ce qui réduit à A cos $\frac{c-t}{\delta}$ la valeur précédente de $\varphi' t$, et complète la vérification de la formule (28).

(158). Appliquons aussi la formule (27) à un exemple; et pour cela, prenons

$$\varphi_{,}\theta = \mathrm{A}e^{-gt}\sin \alpha'\theta;$$

$e$ désignant la base des logarithmes népériens, et A, $g$, $\alpha'$, des constantes données, dont les deux dernières seront supposées positives. Par les règles ordinaires, on trouve

$$\int_0^\infty e^{-gt_{,}} \sin(at_{,} + b)\, dt_{,} = \frac{a\cos b + g\sin b}{a^2 + g^2}; \qquad (29)$$

$a$ et $b$ étant des constantes quelconques. On conclut de là

$$2\int_0^\infty e^{-gt_{,}} \sin \alpha' t_{,} \cos\left[\alpha(\theta - t_{,}) - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right] dt_{,} =$$

$$\frac{(\alpha' - \alpha)\cos\left(\alpha\theta - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right) + g\sin\left(\alpha\theta - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right)}{(\alpha' - \alpha)^2 + g^2}$$

$$+ \frac{(\alpha' + \alpha)\cos\left(\alpha\theta - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right) - g\sin\left(\alpha\theta - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right)}{(\alpha' + \alpha)^2 + g^2};$$

d'après la formule (27), nous aurons donc

$$\begin{aligned} \mathrm{U}' = {} & \int_0^\infty \frac{(\alpha' - \alpha)\cos(\alpha\theta - h)\,\mathrm{H}d\alpha}{(\alpha' - \alpha)^2 + g^2} + \int_0^\infty \frac{g\sin(\alpha\theta - h)\,\mathrm{H}d\alpha}{(\alpha' - \alpha)^2 + g^2} \\ & + \int_0^\infty \frac{(\alpha' + \alpha)\cos(\alpha\theta - h)\,\mathrm{H}d\alpha}{(\alpha' + \alpha)^2 + g^2} - \int_0^\infty \frac{g\sin(\alpha\theta - h)\,\mathrm{H}d\alpha}{(\alpha' + \alpha)^2 + g^2}, \end{aligned} \qquad (30)$$

en faisant pour abréger,

$$h = \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \omega, \quad \mathrm{H} = \frac{Ape^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{a^2} + \frac{p\sqrt{2\alpha}}{a} + p^2}}.$$

Si l'on fait $g = 0$, l'accroissement de température $\varphi_{,}\theta$ deviendra une variation périodique de la température extérieure,

commençant à l'époque d'où l'on compte le temps $\theta$, et qui se prolongera indéfiniment. Quand $\theta$ sera devenu extrêmement grand, il est évident que l'expression de U' devra être la même que si cette partie $\varphi_{,}t$ de la valeur $\zeta$ eût toujours existé; elle se déduira donc alors de la formule (24), qui répond au terme $A \cos(\alpha t + \varepsilon)$ de $\zeta$, en y faisant

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\pi, \quad \alpha = \alpha', \quad t = \theta.$$

Par conséquent, si l'on désigne par $\omega'$ ce que devient $\omega$ quand on y change $\alpha$ en $\alpha'$, on aura

$$U' = \frac{Ap\,e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha'}{a^2} + \frac{p\sqrt{2\alpha'}}{a} + p^2}} \sin\left(\alpha'\theta - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} - \omega'\right), \qquad (31)$$

au bout d'un temps $\theta$ supposé extrêmement grand. Mais jusque là, la valeur exacte de U' sera donnée par la formule (30), en y considérant $g$ comme un infiniment petit.

La quatrième intégrale contenue dans cette formule sera aussi infiniment petite ou nulle; car $\alpha'$ et $\alpha$ étant des quantités positives, dont la première n'est pas nulle, le dénominateur $(\alpha' + \alpha)^2 + g^2$ ne deviendra jamais infiniment petit. Par la même raison, on réduira ce dénominateur à $(\alpha' + \alpha)^2$ dans la troisième intégrale. Le dénominateur $(\alpha' - \alpha)^2 + g^2$ étant infiniment petit pour les valeurs de $\alpha$ infiniment peu différentes de $\alpha'$, la seconde intégrale ne sera pas nulle comme la quatrième. Mais il sera permis de ne l'étendre qu'à ces valeurs de $\alpha$; en y faisant donc $\alpha = \alpha' + y$, on pourra considérer la variable $y$, positive ou négative, comme un infiniment petit, et réduire en conséquence, cette intégrale à

$$H' \sin(\alpha'\theta - h') \int \frac{g\,dy}{y^2 + g^2};$$

H' et $h'$ étant ce que deviennent H et $h$ quand on y met $\alpha'$ au lieu de $\alpha$. La première limite de l'intégrale relative à $y$ sera négative, et la seconde positive; elles pourront être aussi grandes que l'on voudra; car l'intégrale s'évanouit, dès que la variable n'est plus infiniment petite. Elle aura $\pi$ pour valeur, quelles que soient ses li-

43

mites de grandeur finie. Par conséquent, $\pi H' \sin(\alpha'\theta - h')$ sera la valeur de la seconde intégrale contenue dans la formule (30). Quant à la première, on voit qu'elle se compose d'élémens qui sont égaux et de signes contraires dans une étendue infiniment petite de part et d'autre de $\alpha = \alpha'$; on pourra donc négliger cette partie de l'intégrale, et y réduire, en conséquence, à $(\alpha' - \alpha)^2$ le dénominateur $(\alpha' - \alpha)^2 + g^2$. D'après ces diverses considérations, la valeur complète de U' relative à $g = 0$, et déduite de la formule (30) sera

$$U' = \pi H' \sin(\alpha'\theta - h') + \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\theta - h)H d\alpha}{\alpha' - \alpha} + \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\theta - h)H d\alpha}{\alpha' + \alpha}, \quad (32)$$

pour une valeur quelconque de $\theta$.

Pour qu'elle coïncide avec la formule (31), lorsque le temps $\theta$ est devenu extrêmement grand, il faudra, pour toute valeur très grande de $\theta$, que l'on ait, en remettant pour H' et $h'$ leurs valeurs,

$$\frac{A p^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}}}{2\sqrt{\frac{\alpha'}{a^2} + \frac{p\sqrt{2\alpha'}}{a} + p^2}} \sin\left(\alpha'\theta - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} - \omega'\right)$$
$$= \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\theta - h)H d\alpha}{\alpha' - \alpha} + \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\theta - h)H d\alpha}{\alpha' + \alpha}.$$

C'est ce que l'on peut effectivement vérifier de la manière suivante.

La dernière intégrale que renferme le second membre de cette équation est de la forme $\int_0^\infty \cos(\alpha\theta - h) f\alpha d\alpha$, où l'on désigne par $f\alpha$ une fonction qui ne varie pas très rapidement avec $\alpha$, et qui s'évanouit à la limite $\alpha = \infty$; d'où l'on conclut, comme dans le nº 156, que cette intégrale est zéro pour $\theta = \infty$, et peut être négligée quand $\theta$ est un très grand nombre. La première intégrale contenue dans ce second membre, est aussi de la même forme; mais pour celle-là, le facteur $f\alpha$ varie très rapidement pour les valeurs de $\alpha$ très peu différentes de $\alpha'$; par conséquent, si l'on désigne par $\delta$ une quantité aussi petite que l'on voudra, et si l'on divise cette intégrale en deux parties dont l'une soit prise depuis $\alpha = \alpha' - \delta$ jusqu'à $\alpha = \alpha' + \delta$, on pourra seulement négliger l'autre partie, mais il faudra conserver

celle dont les limites seront $\alpha' \pm \delta$. En faisant, dans cette partie, $\alpha = \alpha' + y$ et $d\alpha = dy$, elle deviendra d'abord

$$\int_{-\delta}^{\delta} \text{H} \sin(\alpha'\theta - h) \frac{\sin \theta y}{y} dy - \int_{-\delta}^{\delta} \text{H} \cos(\alpha'\theta - h) \frac{\cos \theta y}{y} dy.$$

De plus, si l'on développe les facteurs H $\sin(\alpha'\theta - h)$ et H $\cos(\alpha'\theta - h)$ suivant les puissances de $y$, il suffira de conserver les termes indépendans de $y$; car les termes des intégrales relatives à $y$, correspondans à ceux qui dépendent de cette variable, auraient des puissances de $\theta$ pour diviseurs et pourraient être négligés. En mettant H' et $h'$ au lieu de H et $h$ dans la quantité précédente, on aura donc

$$\text{H}' \sin(\alpha'\theta - h') \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \theta y}{y} dy - \text{H}' \cos(\alpha'\theta - h') \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\cos \theta y}{y} dy.$$

La dernière intégrale relative à $y$, qui est ici à la place de

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{y \cos \theta y \, dy}{y^2 + g^2},$$

sera égale à zéro, comme étant composée d'élémens qui sont deux à deux égaux et de signes contraires. Je ferai $\theta y = z$ et $\theta dy = dz$, dans la première; les limites relatives à $z$ seront extrêmement grandes, et comme infinies; il en résultera

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \theta y}{y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi,$$

d'après la formule connue dont nous avons fait usage dans le numéro précédent. Cela posé, le second membre de l'équation précédente se réduira à $\pi \text{H}' \sin(\alpha'\theta - h')$; et d'après ce que H' et $h'$ représentent, il sera identique avec le premier; ce qu'il s'agissait de vérifier.

On peut remarquer que la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin az}{z} dz$, dans laquelle $a$ est une constante quelconque, ou celle de $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin dz}{z} dz$, égale évidemment à la moitié de la première, se déduit de la formule (26). En y faisant $b = \frac{1}{2}\pi$, et mettant $z$ au lieu de $t$, on a

$$\int_{0}^{\infty} e^{-gz} \cos azdz = \frac{g}{g^2 + a^2};$$

43..

je multiplie cette équation par $da$, puis j'intègre ses deux membres par rapport à $a$, et je fais commencer leurs intégrales à $a = 0$; il vient

$$\int_0^\infty e^{-gz} \frac{\sin az}{z} dz = arc\left(\text{tang} = \frac{a}{g}\right);$$

et si la constante positive $g$ est supposée infiniment petite, il en résultera

$$\int_0^\infty \frac{\sin az}{z} dz = \tfrac{1}{2}\pi, \quad = -\tfrac{1}{2}\pi, \quad = 0,$$

selon que la constante $a$ sera positive, négative, ou zéro; ce qui est le résultat que nous avons déjà cité dans le n° 113.

(159). La température intérieure U′ provenant de l'accroissement $\varphi\theta$ de la température extérieure, qui commence à l'époque d'où l'on compte le temps $\theta$ et est nul quand $\theta = 0$, il est évident qu'on doit aussi avoir $U' = 0$ à cet instant. Cela étant, si l'on fait $\theta = 0$ et $U' = 0$ dans l'équation (32), et que l'on y mette pour $H$, $h$, $H'$, $h'$ leurs valeurs, on en conclura

$$\frac{\pi e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}} \sin\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} + \alpha'\right)}{2\alpha'\sqrt{\frac{\alpha'}{a^2} + \frac{p\sqrt{2\alpha'}}{a} + p^2}} = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \alpha\right) d\alpha}{(\alpha'^2 - \alpha^2)\sqrt{\frac{\alpha}{a^2} + \frac{p\sqrt{2\alpha}}{a} + p^2}},$$

pour toutes les valeurs de $x$ positives ou zéro; ce qui nous fait connaître la valeur d'une intégrale définie que l'on n'obtiendrait par aucun procédé direct, mais qui n'en est pas moins certaine, puisqu'elle est une conséquence nécessaire de notre analyse.

Si l'on a égard à ce que représente $\omega$ et $\omega'$, et que l'on mette $\alpha a^2$ et $\alpha' a^2$ au lieu de $\alpha$ et $\alpha'$, ce qui fait disparaître la constante $a$, cette équation devient

$$\frac{\pi e^{-x\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}}\left[\left(p + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\right)\sin x\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\cos x\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\right]}{2\alpha'(\alpha' + p\sqrt{2\alpha'} + p^2)} =$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\left[\left(p + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\cos x\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sin x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right] d\alpha}{(\alpha'^2 - \alpha^2)(\alpha + p\sqrt{2\alpha} + p^2)}. \quad (33)$$

Dans le cas de $x = 0$, elle se réduit à

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2\alpha'}\left(\alpha' + p\sqrt{2\alpha'} + p^2\right)} = \int_0^\infty \frac{\left(p + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) d\alpha}{(\alpha'^2 - \alpha^2)\left(\alpha + p\sqrt{2\alpha} + p^2\right)};$$

et l'intégrale qu'elle renferme peut être rendue rationnelle, et déterminée par les règles ordinaires.

Je partage cette intégrale en deux parties, dont l'une s'étendra depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \alpha'$, et l'autre depuis $\alpha = \alpha'$ jusqu'à $\alpha = \infty$; je fais $\alpha = \alpha' z$ et $d\alpha = \alpha' dz$; les limites relatives à $z$ seront $z = 0$ et $z = 1$ dans la première partie, $z = 1$ et $z = \infty$ dans la seconde; je mets aussi $p\sqrt{\alpha'}$ au lieu de $p$; la constante $\alpha'$ disparaît; et l'on a

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}\left(1 + p\sqrt{2} + p^2\right)} = \int_0^1 \frac{\left(p + \sqrt{\frac{z}{2}}\right) dz}{(1 - z^2)\left(z + p\sqrt{2z} + p^2\right)} + \int_1^\infty \frac{\left(p + \sqrt{\frac{z}{2}}\right) dz}{(1 - z^2)\left(z + p\sqrt{2z} + p^2\right)}.$$

Je fais, dans la seconde intégrale, $z = \frac{1}{y}$ et $dz = -\frac{dy}{y^2}$; les limites relatives à $y$ seront $y = 1$ et $y = 0$; en les intervertissant, et changeant le signe du résultat, il vient

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}\left(1 + p\sqrt{2} + p^2\right)} = \int_0^1 \frac{\left(p + \sqrt{\frac{z}{2}}\right) dz}{(1 - z^2)\left(z + p\sqrt{2z} + p^2\right)} - \int_0^1 \frac{\left(p\sqrt{y} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{y}\, dy}{(1 - y^2)\left(1 + p\sqrt{2y} + p^2 y\right)},$$

ou bien, en employant la lettre $z$ au lieu de $y$ dans la seconde intégrale, et réduisant ensuite les deux intégrales à une seule,

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}\left(1 + p\sqrt{2} + p^2\right)} = \int_0^1 \frac{\left[p(1 + z) + (1 + p^2)\sqrt{\frac{z}{2}}\right] dz}{(1 + z)\left(z + p\sqrt{2z} + p^2\right)\left(1 + p\sqrt{2z} + p^2 z\right)}.$$

ou bien encore

$$\frac{\pi}{4(1+p\sqrt{2}+p^2)}=\int_0^1\frac{[(1+y^4)p\sqrt{2}+(1+p^2)y]\,y\,dy}{(1+y^4)(y^2+yp\sqrt{2}+p^2)(1+yp\sqrt{2}+y^2p^2)},$$

en faisant $z=y^2$ et $dz=2y\,dy$, et divisant par $\sqrt{2}$. Or, on vérifie sans difficulté cette dernière équation, en effectuant l'intégration indiquée par la règle relative aux fractions rationnelles.

Par des différentiations ou des intégrations relatives aux quantités $p$ et $x$, on déduira de l'équation (33) d'autres résultats concernant les intégrales définies, que l'on n'avait pas encore obtenus. Par exemple, si l'on y remplace les sinus et cosinus par des exponentielles imaginaires, que l'on différentie ensuite cette équation quatre fois par rapport à $x$, que l'on remette pour les exponentielles leurs valeurs en sinus et cosinus, et que l'on ajoute l'équation ainsi obtenue à l'équation (33) multipliée par $\alpha'^2$, son premier membre disparaît, ainsi que le dénominateur $\alpha'^2-\alpha^2$ compris sous le signe intégral dans le second, et il vient

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\left[\left(p+\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\cos x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sin x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right]d\alpha}{\alpha+p\sqrt{2\alpha}+p^2}=0.$$

Dans le cas de $p=0$, et en mettant $2\alpha^2$ et $4\alpha d\alpha$ au lieu de $\alpha$ et $d\alpha$, on en déduit

$$\int_0^\infty e^{-x\alpha}\cos x\alpha\,d\alpha=\int e^{-x\alpha}\sin x\alpha\,d\alpha;$$

résultat que l'on vérifie immédiatement au moyen de l'équation (29). Dans le cas de $p=\infty$, et en mettant toujours $2\alpha^2$ et $4\alpha d\alpha$ à la place de $\alpha$ et $d\alpha$, on a

$$\int_0^\infty e^{-x\alpha}\,\alpha\cos x\alpha\,d\alpha=0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x(1+\sqrt{-1})}\,\alpha\,d\alpha+\int_0^\infty e^{-\alpha x(1-\sqrt{-1})}\,\alpha\,d\alpha=0.$$

Or, en mettant au lieu de $\alpha$, dans la première intégrale $\frac{1}{2}\alpha(1-\sqrt{-1})$, et dans la seconde $\frac{1}{2}\alpha(1+\sqrt{-1})$, il vient

$$\tfrac{1}{4}[(1-\sqrt{-1})^2+(1+\sqrt{-1})^2]\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha d\alpha=0;$$

ce qui est une équation identique.

Ces diverses vérifications et beaucoup d'autres que l'on pourra facilement imaginer, serviraient, s'il en était besoin, à confirmer notre analyse.

(260). On peut considérer l'influence de l'accroissement $\varphi_{,}\theta$ de la température extérieure sous un autre point de vue qui nous conduira à l'expression la plus simple et la plus générale de la température intérieure.

Fixons pour un moment l'époque de l'état initial du corps à l'instant d'où l'on compte le temps $\theta$ et où commence cet accroissement $\varphi_{,}\theta$. Supposons qu'à cet instant la température de tous les points du corps soit zéro, et qu'au bout du temps $\theta$ la température extérieure tout entière soit exprimée par $\varphi_{,}\theta$. Au bout du même temps la température $u$ en un point quelconque se déduira des formules (23) et (26) dans lesquelles on supprimera la fonction $f$, et l'on remplacera par $\varphi_{,}$ la fonction $\varphi$, en sorte que l'on aura

$$u=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{p\cos\alpha t'\,\varphi_{,}t'\,e^{-x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{a^2}+\frac{p\sqrt{2\alpha}}{a}+p^2}}\cos\left(\alpha\theta-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}-\omega\right)dt'd\alpha$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(z\cos zx+p\sin zx)(z\cos zx'+p\sin zx')}{z^2+p^2}\psi_{,}x'e^{-a^2z^2t}dx'dz,$$

où l'on désigne par $\psi_{,}x'$ ce que devient la première partie de cette valeur de $u$, quand on y fait $\theta=0$ et que l'on y met $x'$ au lieu de $x$.

Or, dans le cas auquel cette formule répond, il est évident que la valeur de $u$ doit coïncider avec la température $U'$ déterminée par la formule (27); et comme la fonction $\varphi_{,}$ est arbitraire, il s'ensuit que cette coïncidence aura encore lieu lorsque l'on remplacera $\varphi_{,}$ par la fonction $\varphi$ contenue dans la formule (23), et $\psi_{,}$ par la fonction corres-

pondante $\psi$; donc en mettant aussi $t$ au lieu du temps quelconque $\theta$, et remplaçant $t$, par $t'$ dans la formule (27), il en résultera

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(z\cos zx + p\sin zx)\,(z\cos zx' + p\sin zx')}{z^2+p^2}\,\psi x' e^{-a^2z^2t}\,dx'dz =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{p\varphi t' e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{p\sqrt{2\alpha}}{a}+p^2}}\cos\left[\alpha(t+t')-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}-\varpi\right].$$

Ainsi, la partie de la formule (23), dépendante de la fonction $\psi$, qui se trouve d'abord exprimée par une intégrale quadruple, réductible par les règles ordinaires à une intégrale triple (n° 156), est équivalente, comme on voit, à une intégrale double. On peut observer que le temps $t$ se trouve en exposant dans la première intégrale, et sous un cosinus dans la seconde; circonstance semblable à celle que j'ai déjà remarquée dans un autre cas (*), où une quantité indéterminée, contenue dans une intégrale, se trouvait dans la valeur de cette intégrale, soit en exposant, soit sous des sinus ou cosinus, tandis que sous le signe $\int$, elle était au contraire sous des sinus ou cosinus, ou en exposant.

Maintenant, d'après cette dernière équation, et en vertu de la formule (26) où l'on mettra pour $\sin\varpi$ et $\cos\varpi$, leurs valeurs (n° 155), la formule (22) deviendra

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(z\cos zx + p\sin zx)\,(z\cos zx' + p\sin zx')}{z^2+p^2}\,fx' e^{-a^2z^2t}\,dx'dz$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{p\left(p+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\varphi t'}{\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{p\sqrt{2\alpha}}{a}+p^2}\,e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\cos\left[\alpha(t-t')-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right]dt'd\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\frac{p}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,\varphi t'}{\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{p\sqrt{2\alpha}}{a}+p^2}\,e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\sin\left[\alpha(t-t')-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right]dt'd\alpha.$$

Telle est donc l'expression complète et sous la forme la plus simple,

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 18e cahier, page 298.

de la température qui a lieu au bout du temps $t$ et à la distance $x$ de la surface, lorsque la température initiale et la température extérieure sont exprimées par des fonctions $fx$ et $\varphi t$, entièrement arbitraires.

Cette formule se rapporte à un corps terminé par un plan indéfini, et qui s'étend indéfiniment d'un côté de ce plan; par des considérations semblables à celles qui nous y ont conduits, on obtiendra sans difficulté une formule applicable à un corps compris entre deux plans parallèles, dont l'épaisseur sera donnée : on pourra, si l'on veut supposer que la température de l'un de ces plans soit constamment entretenue à zéro; et alors en remplaçant la température initiale et la température à un instant quelconque par les produits de ces quantités et de la distance à ce plan, du point auquel elles répondent, n° (140), on obtiendra une formule qui conviendra à une sphère d'un rayon donné, placée dans un milieu dont la température varie suivant une fonction du temps aussi donnée. Mais ces formules générales n'ont pas d'applications utiles; et d'après l'exemple que nous venons de donner, leur formation ne présentera plus actuellement d'autre difficulté que la complication des expressions analytiques qu'il faudrait écrire.

(161). En général, les formules précédentes deviennent beaucoup plus simples lorsqu'on y fait $p=\infty$, quoiqu'elles soient toujours exprimées par des intégrales doubles dans le cas d'une loi quelconque de la température extérieure. La dernière formule du numéro précédent se réduit alors à

$$u=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a^2z^2t} fx' \sin zx \sin zx'\, dx'dz$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\varphi t' \cos\left[\alpha(t-t')-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right]dt'd\alpha.$$

Ce sera la température en un point et à un instant quelconques.

Lorsque le temps $t$ est devenu extrêmement grand, la température finale U, déterminée par l'équation (26), devient

$$\mathrm{U}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\varphi t' \cos\alpha t' \cos\left(\alpha t-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)dt'd\alpha,$$

en observant que $p=\infty$ rend zéro l'angle $\varpi$ du n° (155).

Pour cette valeur de $p$, l'équation relative à la surface se réduit à $u = \zeta$ (n° 137); et ce cas est celui où le corps que l'on considère, au lieu de rayonner à travers le plan qui le termine, a une température donnée en tous les points de ce plan, et exprimée par $\zeta$ ou $\varphi t$. Le problème a alors pour objet de comparer les températures qui ont lieu à différentes distances de la surface, à celle qui répond à la surface même, et non plus à la température extérieure.

Dans le même cas de $p = \infty$, la formule (24) se réduit à

$$U = Ae^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\alpha t + \varepsilon - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

En supposant que la température $\zeta$ de la surface soit une fonction périodique qui reprenne la même valeur toutes les fois que $t$ augmente d'un temps donné $\theta$, et représentant, en conséquence, cette température par une série de sinus et de cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{\theta}$, on pourra appliquer successivement cette dernière formule à tous les termes de cette série; en prenant ensuite pour U la somme des valeurs qui en résulteront, on aura l'expression de la température finale dans l'intérieur du corps, qui répondra à la valeur entière de $\zeta$, et sera périodique comme la température du plan qui le termine. Cette expression de U est celle que Fourier a donnée le premier pour ce cas particulier.

# CHAPITRE XI.

*Distribution de la chaleur dans quelques corps, et spécialement dans une sphère homogène primitivement échauffée d'une manière quelconque.*

(162). J'appellerai A le corps que nous allons considérer. Soient M un point quelconque de ce corps; $x$, $y$ $z$, les trois coordonnées rectangulaires de M; et $u$ la température qui a lieu en ce point au bout du temps quelconque $t$, et qui sera une fonction inconnue de $t$, $x$, $y$, $z$. On comptera le temps $t$ à partir de l'état initial de A, de sorte que la valeur de $u$ qui répond à $t = 0$, sera donnée en fonction de $x, y, z$. Le corps A sera homogène; on représentera par $c$ et $k$, la chaleur spécifique et la conductibilité de la matière dont il est formé; on supposera d'abord que la température $u$ n'est pas assez élevée pour influer sensiblement sur les deux élémens $c$ et $k$; et l'on négligera également dans toute l'étendue de A, les variations de densité dues à l'inégalité des températures; variations qui sont en effet très petites dans les corps solides, et dans le cas des températures ordinaires. De cette manière, $k$ et $c$ seront deux quantités constantes, dont les valeurs numériques devront être données. Enfin, on regardera comme insensible l'étendue du rayonnement moléculaire dans l'intérieur de A.

L'équation du mouvement intérieur de la chaleur, que nous avons obtenue dans le n° 49, sera alors

$$\frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right), \qquad (1)$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{k}{c} = a^2,$$

de sorte que $a$ soit une constante donnée, que nous regarderons comme positive.

Indépendamment de cette équation, commune à tous les points de A, qui ne font pas partie de la couche superficielle où la température varie très rapidement, il y a une autre équation qui n'a lieu que pour les points situés à la limite intérieure de cette couche, dont nous considérerons l'épaisseur comme insensible. Supposons que M soit un de ces points; abaissons de M une perpendiculaire sur la surface de A, qui la rencontre en un point O; menons par ce point O, en dehors de A, une normale à sa surface; et soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, les angles que cette droite fait avec des parallèles aux axes des $x$, $y$, $z$, menés aussi par le point O. Représentons par $\zeta$ la température extérieure qui répond à ce point, et par $p$ une quantité positive dépendante de l'état de la surface en ce même point, qui varierait, en outre, avec les températures $u$ et $\zeta$, si elles étaient très élevées. Si nous faisons, pour abréger,

$$\frac{p}{k} = b,$$

nous aurons pour la seconde équation dont il s'agit

$$\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma + b(u - \zeta) = 0. \qquad (2)$$

La température $u$ appartient au point M et non au point O; mais dans son expression relative aux points intérieurs, on pourra, sans erreur sensible, mettre à la place de $x$, $y$, $z$, les coordonnées du point O, pour en déduire la valeur de $u$ à laquelle convient cette équation (2).

Soit $L = 0$, l'équation donnée de la surface de A; en faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2 = \Lambda^2,$$

on aura, d'après les formules connues,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\Lambda}\frac{dL}{dx}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\Lambda}\frac{dL}{dy}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\Lambda}\frac{dL}{dz}, \qquad (3)$$

où l'on prendra le signe du radical que $\Lambda$ représente, de manière

que ces cosinus répondent à la partie de la normale comprise en dehors de A.

Telles sont donc les équations différentielles du problème; mais avant de nous occuper de les résoudre, il faut entrer dans quelques détails sur ce qu'on entend par la température extérieure, et sur sa détermination.

(163). D'après la manière dont nous avons obtenu l'équation (2), n° (67), si $\omega$ représente l'élément de la surface de A qui comprend le point O, le produit $p(u-\zeta)$ exprime la quantité de chaleur perdue par le corps A, à travers l'élément $\omega$ et pendant l'instant $dt$. La température $\zeta$ est la valeur de $u$ qui devrait avoir lieu pour qu'il n'y eût ni perte ni gain de chaleur au point O; et lorsqu'elle surpassera la température $u$ qui existe réellement au point M, ou qu'elle sera moindre, il y aura gain ou perte de chaleur à travers $\omega$. Si A était renfermé dans une enceinte vide, fermée de toutes parts, et dont la température fût partout la même, $\zeta$ serait cette température, et $p$ la mesure du pouvoir rayonnant de A au point O; mais en général, il faudra déterminer $p$ et $\zeta$ par la considération des diverses sources de la chaleur extérieure.

Or, la perte de chaleur $p(u-\zeta)\,\omega dt$, positive ou négative, pourra provenir de trois causes distinctes : 1°. de l'échange de chaleur rayonnante, soit entre A et d'autres corps voisins ou éloignés, soit entre A et les molécules de l'air ou du gaz dans lequel ce corps est placé; 2°. de la chaleur enlevée à A par la couche très mince de ce fluide, en contact avec sa surface; 3°. de la chaleur rayonnante émanée d'un ou de plusieurs foyers incandescens, qui vient tomber sur la surface de A, et est absorbée par ce corps suivant une proportion déterminée. Je représenterai par $\lambda(u-\xi)\,\omega dt$ la partie de $p(u-\zeta)\,\omega dt$ due à la première cause; $\xi$ désignant une température qui se déduira de celle des corps rayonnans, y compris l'air dans lequel A est placé, et en ayant égard à l'absorption qui aura lieu dans ce fluide; et le coefficient $\lambda$ étant la mesure du pouvoir rayonnant de A au point O. La partie due à la seconde cause sera représentée par $\lambda_{1}(u-\eta)\,\omega dt$, en désignant par $\eta$ la température de la couche d'air contigue à la surface de A en ce même point O, et par $\lambda_{1}$ la mesure du pouvoir refroidissant de ce fluide,

que nous regarderons comme indépendant de $u$ et de $\eta$, et qui ne variera pas non plus avec l'état de cette surface, en sorte que $\eta$ sera une fonction donnée de $t$, $x$, $y$, $z$, et $\lambda_1$ une constante donnée. Enfin pour exprimer la partie due à la troisième cause, je supposerai qu'il n'existe qu'un seul foyer qui envoie de la chaleur au corps A, et que ce foyer soit le soleil, par exemple, si A est exposé à l'air libre. Soit alors $\sigma$ la quantité de chaleur solaire qui vient tomber pendant l'unité de temps, sur une surface prise aussi pour unité, perpendiculaire à la direction de cette chaleur, et passant par le point O; celle qui tombera sur l'élément $\omega$ pendant l'instant $dt$, aura pour valeur $\sigma\omega \cos\theta dt$, où l'on désigne par $\theta$ l'angle aigu que fait cette direction avec la normale menée par le point O à la surface de A, c'est-à-dire avec la droite déterminée par les angles $\alpha$, $\epsilon$, $\gamma$; par conséquent, la portion de cette chaleur qui traverse $\omega$, pourra être représentée par $\epsilon\sigma\omega \cos\theta dt$; le facteur $\epsilon$ étant une fraction qui dépendra de l'état de la surface au point O, et qui pourra, en outre, varier avec l'angle d'incidence $\theta$. Nous regarderons $\epsilon$ comme une fonction donnée de $\theta$, et cet angle $\theta$ sera aussi une fonction connue de $t$, $x$, $y$, $z$, ainsi que la quantité $\sigma$.

Cela posé, si l'on fait la somme des deux premières quantités de chaleur $\lambda(u-\xi)\omega dt$ et $\lambda_1(u-\eta)\omega dt$, et si l'on en retranche la troisième $\epsilon\sigma\omega \cos\theta dt$, on aura la valeur complète de $p(u-\zeta)\omega dt$, et en supprimant le facteur commun $\omega dt$, il en résultera

$$p(u-\zeta) = \lambda(u-\xi) + \lambda_1(u-\eta) - \epsilon\sigma\cos\theta; \qquad (4)$$

équation dans laquelle il ne restera plus qu'à substituer l'expression du flux de chaleur rayonnante $\lambda(u-\xi)$.

Si le corps A était placé dans une enceinte vide, fermée de toutes parts, et dont la température fût partout la même, ce flux de chaleur, rapporté aux unités de temps et de surface, aurait pour valeur (n° 24)

$$\lambda(u-\xi) = n(\mathrm{F}u - \mathrm{F}\xi);$$

$\xi$ étant alors la température de l'enceinte, F indiquant une fonction qui est la même pour tous les corps, et $n$ un coefficient dépendant de leur matière et de l'état de leur surface. Mais soit que la quantité déterminée de chaleur, qui traverse la surface de dehors en dedans, provienne d'une enceinte fermée, ou qu'elle ait toute autre origine,

le flux de chaleur devra évidemment avoir la même expression, sauf à déterminer convenablement la température $\xi$, d'après la quantité de chaleur incidente et l'état de la surface. Or, si l'on met dans l'équation précédente, à la place de $n$ sa valeur trouvée dans le n° 24, on aura

$$\lambda(u-\xi)=\frac{1}{2}\mathrm{F}u\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\alpha\cos\theta\sin\theta d\theta+\frac{1}{2}(\mathrm{F}\xi-\mathrm{F}u)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\alpha\varphi\cos\theta\sin\theta d\theta$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{F}\xi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\alpha\cos\theta\sin\theta d\theta;$$

$\alpha$ étant une fraction qui mesure le pouvoir absorbant à travers l'élément $\omega$ et sous l'angle d'incidence $\theta$; et $\varphi$ désignant une quantité qui provient de la variation rapide de température dans la couche superficielle de A. De plus, le dernier terme de cette expression du flux de chaleur, pris avec le signe $+$ et multiplié par $\omega dt$ exprimera la quantité de chaleur rayonnante venue du dehors, et qui traverse l'élément $\omega$ suivant toutes les directions pendant l'instant $dt$; si donc on détermine dans chaque cas cette quantité, et qu'on la représente par $\mathrm{Q}\omega dt$, il en résultera

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{2}\mathrm{F}\xi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\alpha\cos\theta\sin\theta d\theta,$$

pour l'équation qui servira à déterminer la valeur de $\xi$. Les deux premiers termes de la valeur de $\lambda(u-\xi)$, multipliés aussi par $\omega dt$, exprimeront la quantité de chaleur qui traversera de dedans en dehors et suivant toutes les directions, l'élément $\omega$ pendant l'instant $dt$; en sorte que cette quantité dépend à la fois des températures intérieure et extérieure $u$ et $\xi$. On ne doit pas perdre de vue, en effet, que le corps A s'échauffant ou se refroidissant, il s'établit dans sa couche superficielle, d'où émane cette quantité de chaleur, une loi de température inconnue, mais qui résulte de la chaleur que cette couche reçoit du dedans, et de celle qui lui vient du dehors; et c'est cette circonstance qui donne lieu à une émission de chaleur dépendante en même temps de $u$ et de $\xi$.

D'après l'expérience, on a (n° 26)

$$\mathrm{F}u=g\mu^u+\mathrm{C},\quad \mathrm{F}\xi=g\mu^\xi+\mathrm{C};$$

$g$ et C étant des quantités de chaleur qui sont les mêmes pour tous les corps, et $\mu$ désignant le nombre 1,0077, peu différent de l'unité. Il n'y aurait aucun moyen de connaître ces constantes $g$ et C; mais dans les applications que nous ferons de l'équation précédente, on verra qu'elles entrent aussi dans la valeur de Q, et qu'elles disparaissent toujours de cette équation; de sorte que la température $\xi$ sera, dans tous les cas, complétement déterminée. En développant ces valeurs de $Fu$ et $F\xi$ suivant les puissances de $u$ et de $\xi$, celle de $\lambda(u-\xi)$ deviendra

$$\lambda(u-\xi)=ng\log\mu\,(u-\xi)\left[1+\frac{1}{2}(u+\xi)\log\mu+\frac{1}{2.3}(u^2+u\xi+\xi^2)\log^2\mu+\text{etc.}\right].$$

Si les températures $u$ et $\xi$ ne sont pas très élevées, on pourra, à raison de la petitesse de $\log\mu$, réduire à l'unité le dernier facteur de cette formule; on aura alors

$$\lambda = gn\log\mu,$$

en sorte que la quantité $\lambda$ sera constante par rapport aux températures, et ne variera qu'à raison de l'état de la surface. Après avoir calculé la valeur de $u$ dans cette hypothèse, on pourra, si l'on veut, dans une seconde approximation, augmenter $\lambda$ dans le rapport de $1+\frac{1}{2}(u+\xi)\log\mu$ à l'unité, en négligeant seulement le carré de $\log\mu$. Dans tous les cas la première valeur de $\lambda$ devra être donnée en fonction de $x$, $y$, $z$, si l'état de la surface de A varie d'un point à un autre.

Maintenant on déduit de l'équation (4)

$$p=\lambda+\lambda_1,\quad \zeta=\frac{\lambda\xi+\lambda_1\eta+\iota\sigma\cos^2\theta}{\lambda+\lambda_1}; \qquad (5)$$

ce qui fera connaître la quantité $p$ et la température $\zeta$, au moyen de quantités qui seront toutes données dans chaque cas, ou qui auront été préalablement déterminées d'après d'autres quantités données.

(164). Ce sera principalement dans le chapitre suivant que nous aurons recours à cette manière de déterminer la température extérieure,

au moyen des diverses données de la question. Dans celui-ci, nous supposerons que la valeur de $\zeta$ soit donnée immédiatement en fonction de $x, y, z$; nous supposerons aussi que l'état de la surface de A soit partout le même; et nous négligerons, en général, l'influence des températures sur la valeur de $\lambda$, qui sera alors une quantité constante, ainsi que $\lambda_1$. La quantité $p$ sera donc aussi une constante donnée; et il en sera de même à l'égard du coefficient $b$ de l'équation (2). Toutefois, lorsque A sera un polyèdre, on pourra, pour plus de généralité, supposer que ce coefficient ait des valeurs inégales pour les différentes faces de A, mais dont chacune sera toujours la même dans toute l'étendue de la face à laquelle elle répond.

On résout toujours aisément l'équation (1) relative aux corps homogènes; la difficulté du problème est de tenir compte de la forme du corps, et de satisfaire à l'équation (2), abstraction faite de la température extérieure $\zeta$, à laquelle il est facile ensuite d'avoir égard. Il n'y a qu'un petit nombre de corps dans lesquels on soit parvenu jusqu'à présent à déterminer la distribution de la chaleur; c'est-à-dire la valeur de $u$ en fonction de $t, x, y, z$; cependant leur nombre est encore trop grand, et les solutions des problèmes qui s'y rapportent exigent trop de développement, pour que nous puissions les exposer toutes, sans donner beaucoup trop d'étendue à ce chapitre; c'est pourquoi nous nous bornerons à énoncer les différens cas que l'on a considérés jusqu'ici, en renvoyant aux Mémoires où ces questions particulières ont été résolues.

Ces cas sont ceux de la sphère primitivement échauffée d'une manière quelconque, qui sera l'objet principal de ce chapitre; du cylindre à base circulaire, pour lequel je renverrai à mon premier Mémoire sur la *Distribution de la Chaleur dans les corps solides* (*), où l'on trouve la solution du problème, soit que le cylindre se prolonge indéfiniment, soit qu'il ait une longueur déterminée, et quelle que soit la loi des températures initiales; du parallélépipède rectangle, que nous allons considérer tout à l'heure dans toute sa généralité; de différens prismes triangulaires; de l'ellipsoïde parvenu à son état perma-

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 19e cahier.

nent, qui a déjà été indiqué dans le préambule de cet Ouvrage ; et pour ces deux derniers cas, je renverrai aux Mémoires de M. Lamé, qui les a considérés (*).

(165). Supposons que A soit un parallélépipède rectangle, et que la température extérieure soit constante et égale à zéro; prenons l'un de ses sommets pour origine des coordonnées $x, y, z$; et faisons coïncider leur direction avec celles des côtés adjacens. Désignons par $l, l', l''$, les longueurs des trois côtés qui tombent respectivement sur les axes des $x$, $y$, $z$. La constante $b$ appartiendra à la face $l'l''$, perpendiculaire à $l$ et passant par l'origine des coordonnées; elle deviendra $b'$ et $b''$ pour les faces $ll''$ et $ll'$, passant par le même point et respectivement perpendiculaires à $l'$ et $l''$; les trois quantités $b, b', b''$, se changeront en $b_{,}$, $b'_{,}$, $b''_{,}$, pour les trois autres faces de A. En vertu de l'équation (2) et à cause de $\zeta = 0$, on aura, d'après ces notations,

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{du}{dx} = bu, & \text{quand } x = 0,\\
\frac{du}{dx} = -b_{,}u, & \text{quand } x = l,\\
\frac{du}{dy} = b'u, & \text{quand } y = 0,\\
\frac{du}{dy} = -b'_{,}u, & \text{quand } y = l',\\
\frac{du}{dz} = b''u, & \text{quand } z = 0,\\
\frac{du}{dz} = -b''_{,}u, & \text{quand } z = l''.
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Si l'on désigne par $\lambda, \lambda', \lambda''$, trois constantes arbitraires, et que l'on fasse, pour abréger,

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 = \rho^2,$$

l'intégrale complète de l'équation (1) que l'on a trouvée dans le n° 76, pourra être représentée par

(*) Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, tome V; *Journal de l'École Polytechnique*, 22e cahier.

$$
\begin{aligned}
u = & \Sigma \mathrm{A} e^{-a^2 p^2 t} \cos \lambda x \cos \lambda' y \cos \lambda'' z \\
& + \Sigma \mathrm{B} e^{-a^2 p^2 t} \sin \lambda x \cos \lambda' y \cos \lambda'' z \\
& + \Sigma \mathrm{C} e^{-a^2 p^2 t} \cos \lambda x \sin \lambda' y \cos \lambda'' z \\
& + \Sigma \mathrm{D} e^{-a^2 p^2 t} \sin \lambda x \sin \lambda' y \cos \lambda'' z \\
& + \Sigma \mathrm{E} e^{-a^2 p^2 t} \cos \lambda x \cos \lambda' y \sin \lambda'' z \\
& + \Sigma \mathrm{F} e^{-a^2 p^2 t} \sin \lambda x \cos \lambda' y \sin \lambda'' z \\
& + \Sigma \mathrm{G} e^{-a^2 p^2 t} \cos \lambda x \sin \lambda' y \sin \lambda'' z \\
& + \Sigma \mathrm{H} e^{-a^2 p^2 t} \sin \lambda x \sin \lambda' y \sin \lambda'' z;
\end{aligned}
$$

A, B, C, D, E, F, G, H, étant aussi des constantes arbitraires, et les sommes $\Sigma$ s'étendant à toutes leurs valeurs possibles, et à toutes celles de $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$.

Les deux premières équations (5) ayant lieu pour toutes les valeurs de $t$, $y$, $z$, si l'on y substitue cette expression de $u$, la comparaison des termes semblables, par rapport à ces variables, fournira ces huit équations

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{B}\lambda - b\mathrm{A} = 0, \quad (\mathrm{B}\cos\lambda l - \mathrm{A}\sin\lambda l)\lambda + (\mathrm{B}\sin\lambda l + \mathrm{A}\cos\lambda l)\, b_{,} = 0, \\
&\mathrm{D}\lambda - b\mathrm{C} = 0, \quad (\mathrm{D}\cos\lambda l - \mathrm{C}\sin\lambda l)\lambda + (\mathrm{D}\sin\lambda l + \mathrm{C}\cos\lambda l)\, b_{,} = 0, \\
&\mathrm{F}\lambda - b\mathrm{E} = 0, \quad (\mathrm{F}\cos\lambda l - \mathrm{E}\sin\lambda l)\lambda + (\mathrm{F}\sin\lambda l + \mathrm{E}\cos\lambda l)\, b_{,} = 0, \\
&\mathrm{H}\lambda - b\mathrm{G} = 0, \quad (\mathrm{H}\cos\lambda l - \mathrm{G}\sin\lambda l)\lambda + (\mathrm{H}\sin\lambda l + \mathrm{G}\cos\lambda l)\, b_{,} = 0;
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire d'abord

$$\mathrm{B} = \frac{b}{\lambda}\mathrm{A}, \quad \mathrm{D} = \frac{b}{\lambda}\mathrm{C}, \quad \mathrm{F} = \frac{b}{\lambda}\mathrm{E}, \quad \mathrm{H} = \frac{b}{\lambda}\mathrm{G};$$

et ensuite une seule équation, pour déterminer les valeurs de $\lambda$, savoir :

$$(b + b_{,})\lambda \cos\lambda l + (bb_{,} - \lambda^2)\sin\lambda l = 0.$$

Les troisième et quatrième équations (5) donneront de même

$$\mathrm{C} = \frac{b'}{\lambda'}\mathrm{A}, \quad \mathrm{D} = \frac{b'}{\lambda'}\mathrm{B}, \quad \mathrm{G} = \frac{b'}{\lambda'}\mathrm{E}, \quad \mathrm{H} = \frac{b'}{\lambda'}\mathrm{F};$$

et en outre

$$(b' + b'_{,})\lambda' \cos \lambda' l' + (b' b'_{,} - \lambda'^{2}) \sin \lambda' l' = 0,$$

pour déterminer les valeurs de $\lambda'$.

Enfin, on déduira des deux dernières équations (5),

$$E = \frac{b''}{\lambda''} A, \quad F = \frac{b''}{\lambda''} B, \quad G = \frac{b''}{\lambda''} C, \quad H = \frac{b''}{\lambda''} D;$$

et de plus

$$(b'' + b''_{,}) \lambda'' \cos \lambda'' l'' + (b'' b''_{,} - \lambda''^{2}) \sin \lambda'' l'' = 0,$$

pour déterminer les valeurs de $\lambda''$.

Les douze dernières équations, déduction faite des trois qui doivent servir à déterminer $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, se réduisent à sept; elles laissent donc indéterminée l'une des huit quantités A, B, C, D, E, F, G, H, la première, par exemple; les valeurs qu'on en déduit pour les sept autres sont

$$B = \frac{b}{\lambda} A, \quad C = \frac{b'}{\lambda'} A, \quad D = \frac{bb'}{\lambda\lambda'} A,$$

$$E = \frac{b''}{\lambda''} A, \quad F = \frac{bb''}{\lambda\lambda''} A, \quad G = \frac{b'b''}{\lambda'\lambda''} A, \quad H = \frac{bb'b''}{\lambda\lambda'\lambda''} A.$$

Par conséquent, si nous faisons, pour abréger,

$$\begin{aligned}
P = {} & \cos \lambda x \cos \lambda' y \cos \lambda'' z \\
& + \frac{b}{\lambda} \sin \lambda x \cos \lambda' y \cos \lambda'' z \\
& + \frac{b'}{\lambda'} \cos \lambda x \sin \lambda' y \cos \lambda'' z \\
& + \frac{bb'}{\lambda\lambda'} \sin \lambda x \sin \lambda' y \cos \lambda'' z \\
& + \frac{b''}{\lambda''} \cos \lambda x \cos \lambda' y \sin \lambda'' z \\
& + \frac{bb''}{\lambda\lambda''} \sin \lambda x \cos \lambda' y \sin \lambda'' z \\
& + \frac{b'b''}{\lambda'\lambda''} \cos \lambda x \sin \lambda' y \sin \lambda'' z \\
& + \frac{bb'b''}{\lambda\lambda'\lambda''} \sin \lambda x \sin \lambda' y \sin \lambda'' z,
\end{aligned}$$

l'expression de $u$ deviendra

$$u = \Sigma \mathrm{AP} e^{-a^2 \rho^2 t},$$

et la somme $\Sigma$ ne s'étendra plus qu'aux valeurs de $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, déterminées par les équations précédentes. On pourra employer seulement pour chacune de ces trois quantités, les valeurs dont les carrés sont différens; et il ne restera plus qu'à déterminer le coefficient A en fonction de $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, par la méthode générale du n° (85).

Pour cela, je désigne par $\mathrm{P}_{\prime}$ et $\rho_{\prime}$, ce que P et $\rho$ deviennent quand on y met pour $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, des valeurs de ces quantités représentées par $\lambda_{\prime}$, $\lambda'_{\prime}$, $\lambda''_{\prime}$. La quantité $\mathrm{P}_{\prime} e^{-a^2 \rho_{\prime}^2 t}$ sera une valeur particulière de $u$; le coefficient $\mathrm{P}_{\prime}$ satisfera donc à l'équation

$$\mathrm{P}_{\prime}\rho_{\prime}^2 + \frac{d^2\mathrm{P}_{\prime}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{P}_{\prime}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{P}_{\prime}}{dz^2} = 0,$$

pour toutes les valeurs de $x$, $y$, $z$; et, en outre, aux équations (5) pour les valeurs particulières de ces variables, auxquelles ces équations répondent. Cela étant, je multiplie l'équation (1) par $\mathrm{P}_{\prime} dxdydz$, puis j'intègre ses deux membres dans toute l'étendue du parallélépipède. En faisant pour abréger

$$\int_0^l \int_0^{l'} \int_0^{l''} \mathrm{P}_{\prime} u \, dxdydz = v,$$

il en résulte

$$\frac{dv}{dt} = a^2 \int_0^l \int_0^{l'} \int_0^{l''} \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) \mathrm{P}_{\prime} dxdydz.$$

Par le procédé de l'intégration par partie, et en ayant égard aux équations (5), on a

$$\int_0^l \frac{d^2u}{dx^2} \mathrm{P}_{\prime} dx = \int_0^l \frac{d^2\mathrm{P}_{\prime}}{dx^2} u dx,$$
$$\int_0^{l'} \frac{d^2u}{dy^2} \mathrm{P}_{\prime} dy = \int_0^{l'} \frac{d^2\mathrm{P}_{\prime}}{dy^2} u dy,$$
$$\int_0^{l''} \frac{d^2u}{dz^2} \mathrm{P}_{\prime} dz = \int_0^{l''} \frac{d^2\mathrm{P}_{\prime}}{dz^2} u dz;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dv}{dt} = a^2\int_0^l\int_0^{l'}\int_0^{l''}\left(\frac{d^2P_,}{dx^2} + \frac{d^2P_,}{dy^2} + \frac{d^2P_,}{dz^2}\right)udxdydz,$$

ou ce qui est la même chose, d'après les équations précédentes,

$$\frac{dv}{dt} + a^2\rho_,^2 v = 0.$$

En intégrant et désignant par K la constante arbitraire, on aura donc

$$v = Ke^{-a^2\rho_,^2 t}.$$

Pour déterminer cette constante, je suppose qu'on ait

$$u = F(x, y, z),$$

quand $t = 0$, de sorte que la fonction F soit donnée pour tous les points du parallélépipède, et représente son état initial. En faisant $t = 0$ dans l'équation qui précède, on aura

$$K = \int_0^l\int_0^{l'}\int_0^{l''} P_, F(x, y, z)dxdydz.$$

D'après cette valeur de K et celle de $v$, on aura donc

$$\int_0^l\int_0^{l'}\int_0^{l''} P_, udxdydz = e^{-a^2\rho_,^2 t}\int_0^l\int_0^{l'}\int_0^{l''} P_, F(x, y, z)dxdydz,$$

pour toutes les valeurs de $t$. Je substitue dans cette dernière équation, à la place de $u$, sa valeur en série d'exponentielles; en égalant les coefficiens des termes semblables dans les deux membres, on en conclut

$$\int_0^l\int_0^{l'}\int_0^{l''} PP_, dxdydz = 0,$$

pour toutes les valeurs de $\rho^2$ et $\rho_,^2$ qui ne sont point égales; et dans le cas de $\rho_,^2 = \rho^2$, on aura, en particulier,

$$A\int_0^l\int_0^{l'}\int_0^{l''} P^2 dxdydz = \int_0^l\int_0^{l'}\int_0^{l''} PF(x, y, z)\, dxdydz;$$

ce qui fait connaître la valeur de A qu'il s'agissait d'obtenir.

L'équation précédente servira, comme dans le n° 90, à prouver la réalité de toutes les valeurs de $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$. Par les règles ordinaires, on obtiendra sous forme finie, la valeur de l'intégrale triple, par laquelle la quantité A est multipliée; en la représentant par $\Delta$, nous aurons

$$u = \Sigma \left[ \frac{e^{-a^2 \rho^2 t}}{\Delta} \mathrm{P} \int_0^l \int_0^{l'} \int_0^{l''} \mathrm{PF}(x, y, z)\, dx dy dz \right],$$

pour l'expression générale de la température, à une époque quelconque et en tel point qu'on voudra du parallélépipède; ce qui est la solution complète du problème. En y faisant $t = 0$, il en résultera une expression de la fonction arbitraire $\mathrm{F}(x, y, z)$ en série de quantités périodiques, qui ne subsistera que pour les valeurs de $x, y, z$, comprises entre les limites $x = 0$ et $x = l$, $y = 0$ et $y = l'$, $z = 0$ et $z = l''$, et qui n'aura lieu aux limites mêmes que quand la fonction $\mathrm{F}(x, y, z)$ et ses coefficiens différentiels satisferont aux équations (5), relatives à ces limites.

(166). Lorsque le corps A sera une sphère ou un sphéroïde quelconque, au lieu de déterminer ses différens points par leurs coordonnées rectangulaires, il sera mieux de faire usage de leurs coordonnées polaires et de transformer, en conséquence, les équations (1) et (2).

Soit donc $r$ le rayon vecteur du point quelconque M de A, qui répond aux coordonnées rectangulaires $x, y, z$; soient aussi $\theta$ l'angle que fait ce rayon avec l'axe de $z$, et $\psi$ l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des $x$ et $z$; nous aurons

$$z = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad x = r\sin\theta\cos\psi. \qquad (6)$$

L'origine de ces coordonnées $r, \theta, \psi$, sera un point de l'intérieur de A, pour lequel on prendra le centre de ce corps, lorsqu'il en aura un. Le rayon $r$ sera une quantité positive, qui s'étendra depuis $r = 0$ jusqu'à une valeur de $r$ en fonction de $\theta$ et $\psi$, donnée par l'équation $\mathrm{L} = 0$ de la surface de A, après qu'on aura mis dans L les valeurs précédentes de $x, y, z$; les angles $\theta$ et $\psi$ pourront s'étendre depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi = 2\pi$.

Il s'agira donc, par les règles connues de la transformation des différences partielles, de changer celles qui sont contenues dans les

équations (1), (2), (3), et qui se rapportent aux variables $x$, $y$, $z$, en d'autres qui soient relatives à $r$, $\theta$, $\psi$; mais pour effectuer cette transformation de la manière la plus simple, j'appellerai $r'$ la projection du rayon vecteur $r$ sur le plan des $x$ et $y$, de sorte que l'on ait

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}.$$

On en déduit

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr'}\frac{dr'}{dx} + \frac{du}{d\psi}\frac{d\psi}{dx} = \frac{du}{dr'}\frac{x}{r'} - \frac{du}{d\psi}\frac{y}{r'^2},$$
$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr'}\frac{dr'}{dy} + \frac{du}{d\psi}\frac{d\psi}{dy} = \frac{du}{dr'}\frac{y}{r'} + \frac{du}{d\psi}\frac{x}{r'^2}.$$

En différentiant la seconde valeur de $\frac{du}{dx}$ par rapport à $x$ et celle de $\frac{du}{dy}$ par rapport à $y$, on aura donc

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dxdr'}\frac{x}{r'} - \frac{d^2u}{dxd\psi}\frac{y}{r'^2} + \frac{du}{dr'}\frac{y^2}{r'^3} + 2\frac{du}{d\psi}\frac{xy}{r'^4},$$
$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dydr'}\frac{y}{r'} + \frac{d^2u}{dyd\psi}\frac{x}{r'^2} + \frac{du}{dr'}\frac{x^2}{r'^3} - 2\frac{du}{d\psi}\frac{yx}{r'^4}.$$

En mettant successivement dans ces mêmes valeurs, $\frac{du}{dr'}$ et $\frac{du}{d\psi}$ à la place de $u$, on aura aussi

$$\frac{d^2u}{dxdr'} = \frac{d^2u}{dr'^2}\frac{x}{r'} - \frac{d^2u}{dr'd\psi}\frac{y}{r'^2},$$
$$\frac{d^2u}{dxd\psi} = \frac{d^2u}{dr'd\psi}\frac{x}{r'} - \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{y}{r'^2},$$
$$\frac{d^2u}{dydr'} = \frac{d^2u}{dr'^2}\frac{y}{r'} + \frac{d^2u}{dr'd\psi}\frac{x}{r'^2},$$
$$\frac{d^2u}{dyd\psi} = \frac{d^2u}{dr'd\psi}\frac{y}{r'} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{x}{r'^2};$$

d'où il résultera

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr'^2}\frac{x^2}{r'^2} - 2\frac{d^2u}{dr'd\psi}\frac{xy}{r'^3} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{y^2}{r'^4} + \frac{du}{dr'}\frac{y^2}{r'^3} + 2\frac{du}{d\psi}\frac{xy}{r'^4},$$
$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr'^2}\frac{y^2}{r'^2} + 2\frac{d^2u}{dr'd\psi}\frac{yx}{r'^3} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{x^2}{r'^4} + \frac{du}{dr'}\frac{x^2}{r'^3} - 2\frac{du}{d\psi}\frac{yx}{r'^4},$$

et par conséquent

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr'^2} + \frac{1}{r'^2}\frac{d^2u}{d\psi^2} + \frac{1}{r'}\frac{du}{dr'}.$$

Si l'on observe que l'on a de même

$$r = \sqrt{z^2 + r'^2}, \quad \text{tang}\,\theta = \frac{r'}{z},$$

on en conclut que l'équation précédente devra encore subsister, lorsqu'on y changera $x, y, r', \psi$, en $z, r', r, \theta$; ce qui donne

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2u}{dr'^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr};$$

et en ajoutant ces deux équations, il en résultera

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r'^2}\frac{d^2u}{d\psi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{r'}\frac{du}{dr'} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}.$$

Mais d'après les valeurs de $r$ et tang $\theta$, on aura aussi

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\frac{z}{r} - \frac{du}{d\theta}\frac{r'}{r^2},$$
$$\frac{du}{dr'} = \frac{du}{dr}\frac{r'}{r} + \frac{du}{d\theta}\frac{z}{r^2}.$$

Donc, en substituant cette valeur de $\frac{du}{dr'}$ dans l'équation précédente, et mettant aussi $r\sin\theta$ et $r\cos\theta$ au lieu de $r'$ et $z$, la transformation du second membre de l'équation (1) se trouvera effectuée; et si l'on multiplie cette équation par $r$, on verra qu'elle peut s'écrire ainsi :

$$\frac{d.ru}{dt} = a^2\left[\frac{d^2.ru}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d\left(\sin\theta\,\frac{d.ru}{d\theta}\right)}{d\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2.ru}{d\psi^2}\right]. \quad (7)$$

En substituant aussi cette valeur de $\frac{du}{dr'}$ dans celles de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, joignant celles-ci à la valeur de $\frac{du}{dz}$, et ayant égard aux équations (6),

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{du}{dr}\sin\theta\cos\psi + \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta},\\
\frac{du}{dy} &= \frac{du}{dr}\sin\theta\sin\psi + \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{du}{d\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta},\\
\frac{du}{dz} &= \frac{du}{dr}\cos\theta + \frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta}{r};
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

au moyen de quoi, l'équation (2) deviendra

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dr}\left(\cos\alpha\sin\theta\cos\psi + \cos6\sin\theta\sin\psi + \cos\gamma\cos\theta\right)\\
&+ \frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}\left(\cos\alpha\cos\theta\cos\psi + \cos6\cos\theta\sin\psi - \cos\gamma\sin\theta\right) \quad (9)\\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{du}{d\psi}\left(\cos6\cos\psi - \cos\alpha\sin\psi\right) + b(u-\zeta) = 0.
\end{aligned}$$

Les équations (8) ayant lieu pour une fonction quelconque $u$ de $x$, $y$, $z$, on y pourra mettre L à la place de $u$, et elles donneront les valeurs de $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dL}{dz}$, que l'on devra employer dans les équations (3), d'où il résultera les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos6$, $\cos\gamma$, qui devront être substituées dans l'équation (9).

Outre les équations (7) et (9), auxquelles la valeur de $u$ devra satisfaire, il faudra encore qu'elle soit telle que l'on ait $ru = 0$ quand $r = 0$, afin que la température $u$ ne soit point infinie au point du sphéroïde que l'on aura pris pour origine des coordonnées. Cela étant, si l'on désigne par $f(r, \theta, \psi)$, une fonction donnée pour tous les points du sphéroïde, d'après son état primitif, il faudra joindre à l'équation (7), commune à tous ces points, et à l'équation (9) relative à ceux de la surface, les deux équations

$$ru = 0, \quad ru = f(r, \theta, \psi), \qquad (10)$$

dont la première aura lieu pour $r = 0$, et la seconde pour $t = 0$: la fonction $f(r, \theta, \psi)$ exprimera, dans chaque cas, la température initiale du point M qui répond aux coordonnées $r$, $\theta$, $\psi$, multipliée par son rayon vecteur $r$.

Le problème qui va nous occuper dans la suite de ce chapitre, consistera donc à résoudre simultanément les équations (7), (9), (10),

lorsque le corps A sera une sphère d'un rayon quelconque, qui aura son centre à l'origine des coordonnées.

(167). Quelle que soit la valeur inconnue de $ru$, on peut toujours, d'après le théorème du n° (105), l'exprimer par une série de cette forme :

$$ru = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n + \text{etc.}, \qquad (11)$$

dont le terme général $V_n$ est une fonction des trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, rationnelle, entière et du degré $n$, qui satisfait à l'équation

$$\frac{d\left(\sin\theta\frac{dV_n}{d\theta}\right)}{\sin\theta d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2V_n}{d\psi^2} + n(n+1)V_n = 0,$$

et qui dépend, en outre, des variables $r$ et $t$. En substituant cette série dans l'équation (7), ayant égard à l'équation relative à $V_n$, et faisant, pour un moment,

$$\frac{dV_n}{dt} - a^2\left[\frac{d^2V_n}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}V_n\right] = V'_n,$$

nous aurons

$$V'_0 + V'_1 + V'_2 + V'_3 + \ldots V'_n + \text{etc.} = 0.$$

Or, $V'_n$ sera une fonction de la même nature que $V_n$; d'après les propriétés de ce genre de quantités, il faudra donc que chaque terme du premier membre de cette dernière équation soit séparément nul (n° 111); on aura donc $V'_n = 0$, c'est-à-dire,

$$\frac{dV_n}{dt} = a^2\left[\frac{d^2V_n}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}V_n\right]. \qquad (12)$$

L'intégrale complète de cette équation peut être représentée (n° 84) par

$$V_n = \Sigma Q e^{-a^2\rho^2 t};$$

$e$ étant la base des logarithmes népériens; $\rho$ une constante arbitraire, Q une fonction de $r$ et $\rho$, qui peut contenir encore d'autres constantes arbitraires, et la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs

possibles, réelles ou imaginaires, de $\rho$ et des autres constantes; on aura pour déterminer Q, l'équation

$$\frac{d^2Q}{dr^2} + \left[\rho^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right] Q = 0,$$

dont nous avons donné, dans le n° 82, l'intégrale complète et sous forme finie. Mais la valeur de $ru$ ne pouvant devenir infinie pour $r=0$, et étant, au contraire, nulle à l'origine des coordonnées, il en sera de même à l'égard de chaque terme de la série (11); on devra donc réduire la valeur de Q, à la partie qui ne devient point infinie pour $r=0$, et qui sera, d'après la formule (17) du numéro cité,

$$Q = A_n r^{n+1} \int_0^\pi \cos(\rho r \cos\omega) \sin^{2n+1}\omega d\omega;$$

$A_n$ étant un coefficient indépendant de $r$.

La formule (19) du même numéro donnera, si l'on veut, sous forme finie et en fonction de $r$ et $n$, la valeur de l'intégrale contenue dans cette expression de Q. Relativement aux variables $\theta$ et $\psi$, le coefficient $A_n$ sera une fonction de la même nature que $V_n$, c'est-à-dire que $A_n$ sera aussi une fonction de $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, rationnelle, entière et du degré $n$, qui satisfera à l'équation

$$\frac{d\left(\sin\theta\frac{dA_n}{d\theta}\right)}{\sin\theta d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2A_n}{d\psi^2} + n(n+1)A_n = 0,$$

et dont l'expression la plus générale pourra contenir un nombre $2n+1$ de constantes arbitraires (n° 105). Les valeurs de Q et $V_n$, et par suite tous les termes de la série (11) s'évanouiront pour $r=0$; en sorte que la condition exprimée par la première équation (10) sera remplie.

Cela étant, si nous faisons, pour abréger,

$$\varphi(r,\rho) = \int_0^\pi (A_0 + A_1 r\sin^2\omega + A_2 r^2 \sin^4\omega + \dots \\ \dots + A_n r^n \sin^{2n}\omega + \text{etc.}) \cos(\rho r\cos\omega)\sin\omega d\omega, \quad (13)$$

nous aurons, en vertu de la série (11) et de l'expression de $V_n$ en

série,

$$u = \Sigma\varphi(r,\rho)\, e^{-a^2\rho^2 t}; \qquad (14)$$

la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs possibles de $\rho$ et des constantes contenues dans $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc. Ce sera l'intégrale de l'équation (7), indépendante de la forme du corps A, mais assujettie à la condition particulière $ru = 0$ quand $r = 0$. Son intégrale complète, dont nous n'avons pas besoin, renfermerait une autre série ordonnée suivant les puissances négatives de $r$.

(168). Dans le cas de la sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées, on aura

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos 6 = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r};$$

par conséquent, en vertu des formules (6), l'équation (9) se réduira à

$$\frac{du}{dr} + b(u - \zeta) = 0.$$

Si l'on représente par $l$ le rayon de la sphère, cette équation relative à la surface, aura lieu pour $r = l$, et pourra s'écrire ainsi :

$$\frac{d.ru}{dr} + (bl - 1)\frac{ru}{l} = bl\zeta.$$

D'ailleurs, quelle que soit la valeur de $\zeta$ en fonction de $\theta$ et $\psi$, on peut la représenter par une série de cette forme (n° 105) :

$$\zeta = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n + \text{etc.};$$

$Z_n$ étant une fonction de $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, rationnelle entière et du degré $n$, qui pourra, en outre, contenir le temps $t$, et qui satisfera à l'équation

$$\frac{d\left(\sin\theta\,\frac{dZ_n}{d\theta}\right)}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2 Z_n}{d\psi^2} + n(n+1)\, Z_n = 0.$$

Or, en substituant cette série à la place de $\zeta$ et la série (11) au lieu de $ru$ dans l'équation précédente, relative à la surface, et égalant ensuite dans les deux membres, les quantités qui répondent à un même in-

dice quelconque $n$ (nº 111), il en résultera

$$\frac{dV_n}{dr} + (bl-1)\frac{V_n}{l} = bl\,Z_n, \qquad (15)$$

toujours pour la valeur particulière $r = l$.

Nous supposerons d'abord que la température extérieure $\zeta$ soit égale à zéro ; ce qui rendra nul le second membre de cette dernière équation. En substituant alors dans son premier membre, la valeur de $V_n$ en série d'exponentielles, et égalant à zéro le coefficient d'une exponentielle quelconque $e^{-a^2\rho^2 t}$, on aura

$$\frac{dQ}{dr} + (bl-1)\frac{Q}{l} = 0;$$

donc en ayant égard à la valeur de Q, cette équation relative à $r = l$, deviendra

$$\int_0^\pi [(bl+n)\cos(\rho l\cos\omega) - \rho l\cos\omega\sin(\rho l\cos\omega)]\sin^{2n+1}\omega d\omega = 0; \ (16)$$

et ce sera celle qui devra servir à déterminer la quantité $\rho$.

Pour chaque valeur de $n$, cette équation transcendante donnera une infinité de valeurs de $\rho^2$ qui seront toutes réelles, comme on le verra tout à l'heure. De plus, si l'on développe suivant les puissances de $\rho$, le premier membre de cette équation (16), on obtiendra une série qui ne contiendra que des puissances paires, et dont les coefficiens seront alternativement positifs et négatifs; d'où il résulte qu'aucune des valeurs de $\rho^2$ ne pourra être négative.

Pour obtenir, sous forme finie, l'intégrale indiquée dans cette équation, j'observe qu'en vertu de l'équation (19) du nº (82), on a

$$x^{2n+1}\int_0^\pi \cos(\rho x\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega d\omega = E\,(X\sin\rho x - X'\cos\rho x);$$

X et X′ désignant des fonctions rationnelles et entières de $x$, et E étant un coefficient indépendant de cette variable. En différentiant par rapport à $x$, nous aurons

$$x^{2n}\int_0^\pi [(2n+1)\cos(\rho x\cos\omega) - \rho x\cos\omega\sin(\rho x\cos\omega)]\sin^{2n+1}\omega d\omega$$
$$= E\left[\left(\frac{dX}{dx}+\rho X'\right)\sin\rho x - \left(\frac{dX'}{dx}-\rho X\right)\cos\rho x\right];$$

de cette équation et de la précédente, on déduit

$$x^{2n+1}\int_0^\pi \rho x\cos\omega\sin(\rho x\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega d\omega$$
$$= E\left\{\left[(2n+1)X - \rho x X' - x\frac{dX}{dx}\right]\sin\rho x\right.$$
$$\left. - \left[(2n+1)X' + \rho x X - x\frac{dX'}{dx}\right]\cos\rho x\right\};$$

et si l'on met dans ces formules les valeurs de X et X′ du numéro cité, dans lesquelles on fera $a=\rho$, $i=n$, $x=l$, on en déduira ensuite la valeur demandée de l'intégrale qui forme le premier membre de l'équation (16).

En supprimant le facteur E de cette intégrale égalée à zéro, on trouvera que l'équation (16) prend la forme

$$h\sin\rho l - k\rho l\cos\rho l = 0; \qquad (17)$$

$h$ et $k$ étant des fonctions rationnelles et entières de $\rho^2 l^2$, dont chacune est la somme de deux polynomes d'un degré dépendant de $n$, savoir :

$$h = bl - n - 1 - \frac{2^2 n(n-1)(bl-n+1)}{1.2.2n.2n-1}\rho^2 l^2$$
$$+ \frac{2^4 n(n-1)(n-2)(n-3)(bl-n+3)}{1.2.3.4.2n.2n-1.2n-2.2n-3}\rho^4 l^4 - \text{etc.}$$
$$+ \frac{2n}{2n}\rho^2 l^2 - \frac{2^3 n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n.2n-1.2n-2}\rho^4 l^4 + \text{etc.}$$

$$k = \frac{2n(bl-n)}{2n} - \frac{2^3 n(n-1)(n-2)(bl-n+2)}{1.2.3.2n.2n-1.2n-2}\rho^2 l^2$$
$$+ \frac{2^5 n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(bl-n+4)}{1.2.3.4.5.2n.2n-1.2n-2.2n-3.2n-4}\rho^4 l^4 - \text{etc.}$$
$$- 1 + \frac{2^2 n(n-1)}{1.2.2n.2n-1}\rho^2 l^2 - \frac{2^4 n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.2n.2n-1.2n-2.2n-3}\rho^4 l^4 + \text{etc.}$$

On doit remarquer que la valeur de E du n° (82) ayant $\rho$ pour diviseur,

la suppression de ce facteur E a introduit dans l'équation (17) une racine $\rho = 0$ qui n'était pas dans l'équation (16), et dont il faudra toujours faire abstraction.

Pour les valeurs particulières $n = 0, = 1, = 2$, etc., l'équation (17) sera

$$(bl - 1) \sin \rho l + \rho l \cos \rho l = 0,$$
$$(bl - 2 + \rho^2 l^2) \sin \rho l - (bl - 2)\rho l \cos \rho l = 0,$$
$$[bl - 3 - \tfrac{1}{3}(bl - 4)\rho^2 l^2] \sin \rho l - (bl - 3 + \tfrac{1}{3}\rho^2 l^2)\rho l \cos \rho l = 0,$$
etc.;

où l'on voit que pour $n = 0$, cette équation (17) coïncide avec l'équation (7) du n° 139, relative au cas d'une sphère dont tous les points également éloignés du centre, sont également échauffés. Dans tous les cas, on tire de l'équation (17)

$$\sin \rho l = \frac{k \rho l}{\sqrt{k^2 \rho^2 l^2 + h^2}}, \quad \cos \rho l = \frac{h}{\sqrt{k^2 \rho^2 l^2 + h^2}}.$$

Quand la valeur numérique de $bl$ sera donnée, on déduira de ces équations, sous cette forme ou développées en séries, les valeurs numériques de $\rho l$ qui ne seront pas très grandes. Quant à celles qui seront très grandes, on les obtiendra en conservant seulement dans une première approximation, la plus haute puissance de $\rho l$ en dehors de sin $\rho l$ et cos $\rho l$. Alors si $n$ est pair, l'équation (17) se réduira à $(\rho l)^{2n} \sin \rho l = 0$, et si $n$ est impair, à $(\rho l)^{2n+1} \cos \rho l = 0$; on aura donc $\rho l = i\pi$ dans le premier cas, et $\rho l = \frac{1}{2}(2i + 1)\pi$ dans le second; $i$ étant un nombre entier très grand, afin que les valeurs de $\rho l$ soient aussi très grandes, comme on le suppose. Si l'on veut ensuite obtenir une valeur plus approchée de $\rho l$, on fera $\rho l = i\pi + z$ ou $\rho l = \frac{1}{2}(2i + 1)\pi + z$, selon que $n$ sera pair ou impair; on substituera l'une ou l'autre de ces valeurs de $\rho l$ dans l'équation (17); et en négligeant les puissances de $z$ supérieures à la première, on déterminera facilement la valeur approchée de cette nouvelle inconnue qui devra être une très petite quantité.

(169). Les valeurs de $\rho$ étant donc censées connues, il ne reste plus qu'à déterminer en fonction de $\rho$, le coefficient $A_n$ d'un terme quel-

conque de la valeur de $V_n$ en série d'exponentielles, en suivant le procédé général indiqué dans le n° 85.

Soit donc, pour abréger,

$$r^{n+1}\int_0^{\pi} \cos(\rho r \cos\omega) \sin^{2n+1}\omega d\omega = R;$$

la valeur de $V_n$, dont il s'agit, sera

$$V_n = \Sigma A_n R e^{-a^2\rho^2 t};$$

la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs inégales de $\rho^2$, tirées de l'équation (16). Chacun des termes de cette série devant satisfaire séparément à l'équation (12), il faudra que l'on ait

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \left[\frac{n(n+1)}{r^2} - \rho^2\right] R,$$

pour toutes les valeurs de $r$; ce qui a été effectivement vérifié dans le n° 81. Chaque terme de cette même série devra aussi satisfaire isolément à l'équation (15), abstraction faite de son second membre; il faudra donc qu'on ait

$$\frac{dR}{dr} + (bl - 1)\frac{R}{l} = 0,$$

pour la valeur particulière $r = l$; ce qui résulte, en effet, de l'équation (16).

Cela posé, je multiplie l'équation (12) par $Rdr$; puis j'intègre ses deux membres depuis $r = 0$ jusqu'à $r = l$; d'où il résulte,

$$\frac{d.\int_0^l RV_n dr}{dt} = a^2\int_0^l \frac{d^2V_n}{dr^2} R dr - a^2\int_0^l \frac{n(n+1)}{r^2} V_n R dr;$$

en vertu de la première équation (10), chaque terme $V_n$ de la série (11) doit être zéro en même temps que $r$; on a aussi $R = 0$ pour $r = 0$; et si l'on a égard aux équations auxquelles $R$ et $V_n$ doivent également satisfaire à l'autre limite $r = l$, on en conclura, en intégrant deux fois de suite par partie,

$$\int_0^l \frac{d^2V_n}{dr^2} R dr = \int_0^l V_n \frac{d^2R}{dr^2} dr.$$

Par conséquent, d'après la valeur précédente de $\frac{d^2R}{dr^2}$, on aura

$$\frac{d.\int_0^l RV_n dr}{dt} = -a^2\rho^2\int_0^l RV_n dr;$$

et en intégrant cette équation, il en résultera

$$\int_0^l RV_n dr = Ce^{-a^2\rho^2 t};$$

C étant la constante arbitraire.

Pour la déterminer, je suppose que l'on applique le théorème du n° 105 à la fonction $f(r, \theta, \psi)$, de sorte que l'on ait

$$f(r, \theta, \psi) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n + \text{etc.};$$

$Y_n$ désignant une fonction de $\cos\theta$, $\sin\theta \sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, rationnelle, entière et du degré $n$, qui satisfera à l'équation

$$\frac{d.\left(\sin\theta\frac{dY_n}{d\theta}\right)}{\sin\theta d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2Y_n}{d\psi^2} + n(n+1)Y_n = 0,$$

et qui dépend, en outre, de la variable $r$ d'une manière quelconque. En vertu de la seconde équation (10) et de la série (11), $Y_n$ sera la valeur de $V_n$ qui répond à $t=0$; on aura donc

$$C = \int_0^l RY_n dr,$$

pour la valeur de C; et il en résultera

$$\int_0^l RV_n dr = e^{-a^2\rho^2 t}\int_0^l RY_n dr,$$

pour une valeur quelconque de $t$.

Je substitue dans cette dernière équation, à la place de $V_n$ sa valeur en série d'exponentielles. Si $\rho$ et $\rho'$ sont deux racines de l'équation (16) dont les carrés sont différens, et que l'on désigne par R′ ce que R devient quand on y met $\rho'$ au lieu de $\rho$, la comparaison des termes semblables dans les deux membres de l'équation précédente, donnera

d'abord

$$\int_0^l RR'dr = 0;$$

et dans le cas de $\rho'^2 = \rho^2$, on en conclura, en outre,

$$A_n \int_0^l R^2 dr = \int_0^l RY_n dr.$$

Par un raisonnement semblable à celui du n° 90, on déduira de la première de ces deux équations, la réalité de toutes les valeurs de $\rho^2$, tirées de l'équation (16). La seconde équation fera connaître la valeur de $A_n$ qu'il s'agissait de déterminer. Pour exprimer au moyen de la fonction arbitraire $f(r, \theta, \psi)$, la quantité $Y_n$ contenue dans cette équation, soit

$$\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\psi - \psi') = p,$$

supposons que l'on ait développé $(1 - 2p\alpha + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, comme dans le n° 108, suivant les puissances de $\alpha$; et représentons le coefficient de $\alpha^n$ dans cette série par $P_n$ dont nous avons donné, dans ce numéro, la valeur en fonction de $p$ et de $n$; d'après la formule (4) du n° 109, nous aurons

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \psi') P_n \sin\theta' d\theta' d\psi'.$$

L'intégrale $\int_0^l R^2 dr$ par laquelle la quantité $A_n$ est multipliée, s'obtiendra sous forme finie; et si l'on substitue dans son expression, à la place de $\sin \rho l$ et $\cos \rho l$, leurs valeurs que l'on a déduites de l'équation (17), elle se changera en une fonction rationnelle de $\rho$. Nous ferons, pour abréger,

$$\int_0^l R^2 dr = \frac{1}{\Pi};$$

et nous aurons alors

$$A_n = \frac{(2n+1)\Pi}{4\pi} \int_0^l \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \psi') RP_n \sin\theta' dr d\theta' d\psi'. \quad (18)$$

Au moyen de cette expression de $A_n$, la valeur de $\varphi(r, \rho)$ donnée par l'équation (13) sera entièrement déterminée ; la formule (14) ne contiendra donc plus rien d'inconnu ; et elle renfermera, par conséquent, la solution complète du problème, dans le cas d'une sphère homogène, primitivement échauffée d'une manière quelconque, soumise à une température extérieure constante et égale à zéro, et dont la surface est partout la même.

Dans ce cas général, la température $\mu$ en un point quelconque M de la sphère et à un instant quelconque, se trouvera exprimée, comme on voit, par une série infinie d'exponentielles dont les exposans seront négatifs, proportionnels au temps et aux racines d'une équation transcendante ; et dans cette série, le coefficient de chaque terme sera une fonction des coordonnées $r$, $\theta$, $\psi$, de M, exprimée elle-même par une autre série dont les termes seront donnés par des intégrales triples ; en sorte que ce sera, en définitive, une double série d'intégrales triples, relative soit au nombre $n$, soit aux valeurs de $\rho^2 l^2$ tirées de l'équation (16). En y faisant $t = 0$ et multipliant par $r$, on en déduira une expression de la même nature pour la fonction arbitraire $f(r, \theta, \psi)$, qui subsistera pour toutes les valeurs des trois variables, comprises entre $r = 0$ et $r = l$, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$.

(170). La partie de la formule (14) qui répond à $n = 0$, mérite une attention particulière. Je la désignerai par $v$. Pour l'obtenir, il faudra réduire la formule (13) à son premier terme, savoir :

$$\varphi(r, \rho) = A_0 \int_0^\pi \cos(\rho r \cos\omega) \sin\omega d\omega = \frac{2A_0 \sin \rho r}{\rho r};$$

d'où il résultera

$$v = 2\Sigma \frac{A_0 \sin \rho r}{\rho r} e^{-a^2 \rho^2 t}.$$

On aura, en même temps,

$$P_0 = 1, \quad R = \frac{2 \sin \rho r}{\rho}, \quad \Pi = \frac{\rho^3}{2\rho l - \sin 2\rho l};$$

la valeur de $A_0$ donnée par la formule (18) pourra donc s'écrire ainsi :

$$A_0 = \frac{\rho^2}{\rho l - \sin \rho l \cos \rho l} \int_0^l \left[ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{f(r', \theta', \psi') \sin \theta' d\theta' d\psi'}{4\pi} \right] \sin \rho r' dr';$$

et si l'on appelle $f_{,}r$ la moyenne de toutes les valeurs de $fr$ dans toute l'étendue de la surface sphérique dont le rayon est $r$, de sorte qu'on ait

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \psi') \sin\theta' d\theta' d\psi' = 4\pi f_{,} r,$$

la valeur de $v$ deviendra

$$v = \frac{2}{r} \Sigma \frac{\rho \sin \rho r}{\rho l - \sin \rho l \cos \rho l} \left( \int_0^l f_{,} r' \sin \rho r' dr' \right) e^{-a^2 \rho^2 t}.$$

On pourra aussi écrire cette valeur sous cette autre forme :

$$v = \frac{2}{lr} \Sigma \frac{[\rho^2 l^2 + (bl - 1)^2] \sin \rho r}{\rho^2 l^2 + bl(bl - 1)} \left( \int_0^l f_{,} r' \sin \rho r' dr' \right) e^{-a^2 \rho^2 t}, \quad (19)$$

en observant que pour $n = 0$, les valeurs de $\sin \rho l$ et $\cos \rho l$, tirées de l'équation (17), sont

$$\sin \rho l = \frac{\rho l}{\sqrt{\rho^2 l^2 + (bl - 1)^2}}, \quad \cos \rho l = \frac{1 - bl}{\sqrt{\rho^2 l^2 + (bl - 1)^2}}.$$

En comparant la valeur de $v$ à la formule (8) du n° 139, et observant que les valeurs de $\rho$ sont tirées de la même équation pour ces deux formules, on voit que cette partie $v$ de $u$ est la température qui aurait lieu dans la sphère entière, si les points également éloignés du centre eussent eu primitivement des températures égales, et que la température initiale, commune à tous les points qui ont un même rayon vecteur $r$, eût été la moyenne des températures différentes qu'ils ont eues réellement. De là, on déduit plusieurs conséquences que nous allons successivement énoncer.

1°. Dans le cas où les températures initiales des points également éloignés du centre sont égales, la fonction $f(r, \theta, \psi)$ est indépendante des angles $\theta$ et $\psi$, et se réduit à une simple fonction $fr$ du rayon $r$. L'équation (18) devient donc

$$A_n = \frac{(2n + 1)\Pi}{4\pi} \left( \int_0^l R f r dr \right) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n \sin\theta' d\theta' d\psi';$$

mais par la nature de la quantité $P_n$, on a (n° 111)

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n \sin\theta' d\theta' d\psi' = 0,$$

excepté pour $n = 0$; donc aussi la quantité $A_n$ sera nulle, excepté $A_0$; ce qui réduira la formule (14) à sa partie $v$ relative à $n = 0$. Par conséquent, cette formule coïncidera, comme cela devait être, avec la formule (8) du n° 139.

2°. Pour $r = 0$, la formule (13) se réduit à son premier terme, et, conséquemment, la formule (14) à sa partie $v$. Il s'ensuit donc qu'au centre de la sphère, la température est constamment indépendante de $\theta$ et de $\psi$; ce qui devait être effectivement, puisque ces deux angles ont leur sommet en ce point. La température centrale sera égale à la valeur de $v$ qui répond à $r = 0$; laquelle valeur est, d'après l'équation (19),

$$v = \frac{2}{l} \Sigma \frac{[\rho^2 l^2 + (bl - 1)^2]\rho}{\rho^2 l^2 + bl(bl - 1)} \left( \int_0^l f_i r' \sin \rho r' dr' \right) e^{-a^2 \rho^2 t}.$$

Elle sera donc indépendante de l'inégalité des températures initiales à égale distance du centre, et dépendra seulement de leur variation du centre à la surface.

3°. Lorsque le produit $bl$ est très petit, soit à cause du facteur $b$ relatif à la perte de chaleur à travers la surface, soit à cause du rayon $l$ de la sphère, l'équation (16) donnera aussi pour $\rho l$, une très petite valeur qui répondra à $n = 0$ et sera égale à $\sqrt{3bl}$; toutes les autres valeurs de $\rho l$ tirées de cette équation seront très grandes par rapport à celle-là; par conséquent, au bout d'un certain temps, la valeur de $u$ se réduira sensiblement à la partie de $v$ qui répond à cette très petite valeur de $\rho l$. Quand c'est le rayon $l$ qui est très petit, on conclut de là, comme dans le n° 141, qu'après un temps très court la chaleur est uniformément distribuée dans la sphère entière. Quand la constante $b$ est infiniment petite ou nulle, on en conclut aussi qu'après un intervalle de temps plus ou moins considérable, la sphère entière parvient à un état permanent dans lequel la température de tous ses points est égale à la moyenne de toutes les températures initiales.

4°. Si la constante $b$ n'est pas infiniment petite ou nulle, c'est-à-dire, si l'on exclut le cas où il n'y aurait aucune perte de chaleur à travers la surface, toutes les racines de l'équation (16) auront des grandeurs finies; par conséquent, tous les termes de la série (14) dé-

croîtront indéfiniment; et la température de tous les points de la sphère finira par être égale à zéro, comme la température extérieure. Mais avant de devenir tout-à-fait nulle, la valeur de $u$ se réduira sensiblement au terme de la série (14), correspondant à la plus petite valeur de $\rho$: or, on verra dans le numéro suivant que cette plus petite racine positive de l'équation (16) est toujours une des racines de cette équation qui répondent à $n=0$; si donc on la désigne par $\rho'$ et qu'on représente par $v'$ la valeur finale de $u$ qui précède le refroidissement total de la sphère entière, $v'$ sera le terme de la formule (19) qui répond à $\rho=\rho'$, de sorte qu'on aura

$$v' = \frac{2[\rho'^2 l^2 + (bl-1)^2]\sin\rho' r}{[\rho'^2\rho^2 + bl(bl-1)]\,lr}\left(\int_0^l f r' \sin\rho' r' dr'\right) e^{-a^2\rho'^2 t}. \quad (20)$$

Ainsi, quelle qu'ait été la distribution primitive de la chaleur dans une sphère homogène, placée dans un milieu dont la température est constante, on voit que quand ce corps est parvenu à l'état final qui précède son refroidissement total, les surfaces *isothermes* sont sphériques et concentriques, et l'on voit aussi que le temps croissant par des intervalles égaux, les températures de tous les points de la sphère décroissent suivant une même progression géométrique.

(171). Les élémens de l'intégrale qui forme le premier membre de l'équation (16) étant égaux deux à deux, c'est-à-dire, pour $\omega$ et pour $\pi-\omega$, on peut réduire ses limites à $\omega=0$ et $\omega=\frac{1}{2}\pi$, et continuer de l'égaler à zéro. Si donc on fait

$$\rho l = y, \quad \rho l \cos\omega = z,$$

les limites relatives à $z$ seront $y$ et zéro, et en en changeant l'ordre, l'équation (16) se changera en celle-ci :

$$\int_0^y [(bl+n)\cos z - z\sin z]\left(1-\frac{z^2}{y^2}\right)^n dz = 0, \quad (21)$$

dans laquelle on fera abstraction de la racine $y=0$, qui n'appartient pas à l'équation (16).

Au moyen d'un théorème auquel il est parvenu et qui concerne

une classe très étendue d'équations transcendantes, M. Sturm a démontré que la plus petite valeur positive de $y$ qui satisfait à cette équation (21), répond à $n=0$, quelle que soit la constante donnée $bl$; mais cette démonstration exigerait trop de développemens pour trouver place dans ce chapitre; et je me bornerai à celle que j'ai donnée dans mon second Mémoire *sur la distribution de la chaleur dans les corps solides*, pour le cas particulier où $bl$ est un très grand nombre, le seul que nous aurons à considérer par la suite.

Dans ce cas, l'équation (21) se réduira à

$$\int_0^y \left(1-\frac{z^2}{y^2}\right)^n \cos z dz = 0.$$

Si l'on prenait $y < \frac{1}{2}\pi$, tous les élémens de cette intégrale seraient positifs, et l'intégrale ne pourrait pas être nulle; si la valeur de $y$ était comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\pi$, ces élémens seraient positifs depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{1}{2}\pi$, et négatifs depuis $z=\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $z=y$; mais $y'$ étant une quantité positive et moindre que $y-\frac{1}{2}\pi$, l'élément négatif qui répond à $z=\frac{1}{2}\pi+y'$ serait plus petit, en grandeur absolue, que l'élément positif qui répond à $\frac{1}{2}\pi-y'$; donc une valeur de $y$ comprise dans le second quart de la circonférence, ne pourrait pas non plus rendre nulle l'intégrale précédente; et si l'exposant $n$ n'est pas zéro, il en sera de même à l'égard de la valeur particulière $y=\pi$. Mais quand $n=0$, cette intégrale a pour pour valeur $\sin y$; elle est donc nulle pour $y=\pi$; par conséquent, le produit $bl$ étant un très grand nombre, la plus petite racine $\rho' l$ de l'équation (16), répond à $n=0$, et sa valeur approchée est $\rho' l=bl$.

Pour en avoir, dans le même cas, une valeur plus approchée, j'observe que pour $n=0$, l'équation (21) se réduit à

$$(bl-1)\sin y + y\cos y = 0;$$

je fais ensuite

$$\rho' l = \pi + \frac{\varepsilon}{bl};$$

puis je substitue cette valeur à la place de $y$ dans cette équation; et en négligeant les termes qui ont $bl$ pour diviseur, il vient

$$\varepsilon + \pi = 0;$$

d'où il résulte

$$\rho' l = \pi - \frac{\pi}{bl}.$$

En employant cette valeur dans la formule (20), on aura

$$\sin \rho' r = \sin \frac{\pi r}{l} - \frac{\pi r}{bl^2} \cos \frac{\pi r}{l};$$

à la surface où l'on a $r = l$, le premier terme de cette expression s'évanouit; c'est pourquoi il est nécessaire de conserver le second; mais dans le coefficient de $\sin \rho' r$, on pourra se contenter de faire $\rho' l = \pi$. Si l'on y met aussi $bl$ au lieu de $bl - 1$, il en résultera

$$v' = \frac{2}{lr} \left( \int_0^l f_{\prime} r' \sin \frac{\pi r'}{l} dr' \right) \left( \sin \frac{\pi r}{l} - \frac{\pi r}{bl^2} \cos \frac{\pi r}{l} \right) e^{-\frac{a\pi^2 t}{l^2}}, \qquad (22)$$

pour l'expression de la température finale, dans une sphère d'un très grand rayon, ou plutôt, dans une sphère pour laquelle le produit $bl$ est un très grand nombre.

Au centre où $r = 0$, on aura

$$v' = \frac{2\pi}{l^2} \left( \int_0^l f_{\prime} r' \sin \frac{\pi r'}{l} dr' \right) e^{-\frac{a^2 \pi^2 t}{l^2}},$$

en mettant l'unité au lieu du facteur $1 - \frac{1}{bl}$. Si l'on fait $r = l - x$, et que l'on régarde $x$ comme une ligne très petite par rapport à $l$, on aura, en négligeant son carré,

$$v' = \frac{2\pi}{bl^3} \left( \int_0^l f_{\prime} r' \sin \frac{\pi r'}{l} dr' \right) (1 + bx) e^{-\frac{a^2 \pi^2 t}{l^2}}, \qquad (23)$$

pour la température finale à une petite distance $x$ de la surface. Elle est, comme on voit, très petite par rapport à la température cen-

trale; laquelle est à celle qui répond à la surface même, comme $bl$ est à l'unité. On voit aussi qu'à mesure que l'on s'éloigne de la surface, pourvu que la distance $x$ soit toujours une très petite partie du rayon $l$, la température $v'$, positive ou négative, augmente dans le rapport de $1+bx$ à l'unité.

(172). Il y a une remarque importante à faire sur l'époque où la formule (22) peut être employée. L'équation (16) donne pour le produit $\rho l$ une infinité de valeurs qui sont toutes des nombres abstraits; parmi ces nombres, il en existe qui sont très grands en même temps que le nombre $bl$; les exponentielles qui leur répondent dans la formule (14), disparaissent très promptement; et si l'on désigne par $g, g', g''$, etc., les autres valeurs de $\rho l$ comprenant la plus petite $\rho' l$ et qui ne sont pas de très grands nombres, l'équation (14) deviendra, après un temps très court,

$$u=\varphi\left(r, \frac{g}{l}\right)e^{-\frac{a^2g^2t}{l^2}}+\varphi\left(r, \frac{g'}{l}\right)e^{-\frac{a^2g'^2t}{l^2}}+\varphi\left(r, \frac{g''}{l}\right)e^{-\frac{a^2g''^2t}{l^2}}+\text{etc.}$$

Mais en supposant que les nombres $g$, $g'$, $g''$, etc., forment une suite croissante, il faudra dans le cas où le rayon $l$ est très grand, que la ligne $a\sqrt{t}$ soit aussi très grande et comprenne un certain multiple de $l$, pour qu'on puisse réduire cette expression de $u$ à son premier terme, comme nous l'avons fait dans le numéro précédent. Jusque là, on devra employer l'expression de $u$ en série, au lieu de la formule (22), pour calculer les températures des différens points de la sphère. Il s'ensuit donc que si le rayon $l$ est considéré comme infini, cette formule abrégée ne sera jamais applicable; et c'est pour cela que la loi des températures finales, qui a lieu près de la surface, et que nous avons trouvée pour le cas extrême de $l=\infty$ (n° 154), n'est pas la même que celle qui résulte de la formule (23). Dans celle-ci les températures décroissent en progression géométrique pour des accroissemens égaux du temps $t$; dans l'autre, elles varient seulement en raison inverse de la puissance $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ de cette variable.

(173). Supposons actuellement que la température extérieure $\zeta$ varie avec le temps et d'un point à un autre de la surface de la sphère, de sorte que sa valeur soit une fonction donnée de $t$ et des deux angles $\psi$ et $\theta$.

Pour étendre à ce cas d'une température quelconque, la solution précédente, relative à une température extérieure égale à zéro, je suivrai le procédé général du n° 155. Je partagerai donc $u$ en deux parties que je désignerai par $u_{,}$ et $u'$, de sorte qu'on ait

$$u = u_{,} + u'.$$

Je supposerai que $u = u_{,}$ satisfasse à l'état initial de la sphère, à l'équation commune à tous ses points, et à l'équation relative à la surface, quand on fait dans celle-ci $\zeta = 0$. La valeur de $u_{,}$ sera alors donnée par la formule (14), où l'on remplacera $f(r, \theta, \psi)$ par la valeur initiale de $ru_{,}$, qui sera $f(r, \theta, \psi) - f'(r, \theta, \psi)$, en désignant toujours par $f(r, \theta, \psi)$ celle de $ru$, et supposant qu'on ait

$$ru' = f'(r, \theta, \psi),$$

quand $t = 0$. D'après cela, si l'on représente par $A'_n$, ce que devient la valeur de $A_n$ donnée par la formule (18), lorsqu'on y met $f'(r, \theta, \psi)$ au lieu de $f(r, \theta, \psi)$, et si l'on désigne par $\varphi'(r, \rho)$, ce que devient la formule (13) par le changement de $A_n$ en $A'_n$, il en résultera

$$u = \Sigma [\varphi(r, \rho) - \varphi'(r, \rho)] e^{-a^2 \rho^2 t} + u', \qquad (24)$$

pour la valeur complète de $u$, dans laquelle il ne restera plus qu'à déterminer $u'$ en fonction des quatre variables $t$, $r$, $\theta$, $\psi$ : la somme $\Sigma$ s'étend, comme dans la formule (14), à toutes les valeurs positives de $\rho$ tirées de l'équation (16).

Quelle que soit la valeur de $ru'$, on pourra la représenter par la série

$$ru' = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \text{etc.},$$

semblable à la série (11) par laquelle on a représenté la valeur de $ru$, de sorte que son terme général $U_n$ soit, par rapport à $\theta$ et $\psi$, de la même nature que $V_n$. Cette quantité $U_n$ devra aussi, comme $V_n$, s'évanouir pour $r = 0$, satisfaire à l'équation (12) pour toutes les valeurs de $r$, et à l'équation (15) pour $r = l$. Ainsi, quel que soit $t$, on aura

$$\frac{dU_n}{dt} = a^2 \left[ \frac{d^2 U_n}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} U_n \right],$$

pour toutes les valeurs de $r$, et, en particulier,

$$U_n = 0, \quad \text{quand} \quad r = 0,$$

$$\frac{dU_n}{dr} + (bl - 1)\frac{U_n}{l} = blZ_n, \quad \text{quand} \quad r = l.$$

Ces équations ne suffiraient pas pour déterminer complétement $U_n$; mais les quantités arbitraires qui resteraient dans $U_n$ et par suite dans $u'$, se retrouveraient aussi dans la partie de la formule (24) qui dépend de $\varphi'(r, \rho)$, et disparaîtraient toujours de la valeur complète de $u$. Il est évident que la partie $u_i$ de $u$ satisfaisant déjà, par hypothèse, à l'état initial et arbitraire de la sphère, il suffit de trouver pour $u'$ une valeur particulière qui satisfasse à toutes les autres conditions du problème.

Or, je suppose d'abord que le terme général $Z_n$ du développement de $\zeta$ (n° 168) soit de la forme

$$Z_n = z_n e^{-mt};$$

$z_n$ désignant une quantité indépendante de $t$, et de la même nature que $Z_n$ par rapport à $\theta$ et $\psi$; $m$ étant une quantité réelle ou imaginaire, indépendante de ces trois variables $t$, $\theta$, $\psi$, mais qui pourra changer avec le nombre $n$; et $e$ représentant la base des logarithmes népériens. Dans cette hypothèse, je satisferai aux trois équations relatives à $U_n$, en prenant

$$U_n = Rz_n e^{-mt},$$

R étant une fonction de la seule variable $r$, qui devra s'évanouir pour $r = 0$. En substituant cette valeur de $U_n$ dans la première de ces équations, il vient

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \left[\frac{n(n+1)}{r^2} - \frac{m}{a^2}\right] R;$$

l'intégrale particulière de cette équation, qui remplit la condition $R = 0$ quand $r = 0$, est (n° 82)

$$R = Mr^{n+1}\int_0^\pi \cos\left(\frac{r\sqrt{m}}{a}\cos\omega\right)\sin^{2n+1}\omega d\omega,$$

où l'on désigne par M une constante arbitraire; mais en substituant cette valeur de R dans celle de $U_n$, et celle-ci avec celle de $Z_n$ dans l'équation relative à $r = l$, il en résulte

$$M\int_0^\pi\left[(bl+n)\cos\left(\frac{l\sqrt{m}}{a}\cos\omega\right)-\frac{l\sqrt{m}}{a}\cos\omega\sin\left(\frac{l\sqrt{m}}{a}\cos\omega\right)\right]\sin^{2n+1}\omega d\omega = bl^{1-n}; \quad (25)$$

ce qui fera connaître la valeur de M.

La valeur de $U_n$ correspondante à celle que l'on a prise pour $Z_n$ sera donc aussi connue. D'ailleurs, en donnant à $m$ des valeurs imaginaires, changeant l'exponentielle $e^{-mt}$ en sinus et cosinus d'arcs réels, et prenant ensuite pour $Z_n$ la somme d'une infinité de valeurs infiniment petites, de la forme de $z_n \sin mt$ et $z_n \cos mt$, on pourra représenter la valeur la plus générale de $Z_n$ en fonction de $t$. Donc, en prenant aussi pour $U_n$ la somme des valeurs infiniment petites qui en résulteront, on aura, dans tous les cas possibles, l'expression de $U_n$, ainsi qu'on l'a expliqué dans le n° 155, à l'égard de la quantité U. Cette valeur générale de $U_n$ sera donnée par une intégrale triple, qui se réduira à une intégrale double en effectuant, par les règles ordinaires, les intégrations relatives à $\omega$; ce qui sera possible pour toutes les valeurs du nombre entier et positif $n$. On en conclura, par une sommation relative à $n$, la valeur de $ru'$, et par conséquent, celle de $u'$ que l'on devra substituer dans la formule (24), qui renfermera alors la solution générale et complète du problème.

(174). En conservant, pour abréger, M à la place de sa valeur donnée par l'équation (25), nous aurons, en même temps,

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \Sigma z_n e^{-mt}, \\ u' &= \Sigma M r^n z_n e^{-mt}\int_0^\pi \cos\left(\frac{r\sqrt{m}}{a}\cos\omega\right)\sin^{2n+1}\omega d\omega; \end{aligned}\right\} (26)$$

les sommes $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs de $n$, depuis $n = 0$ inclusivement, jusqu'à $n = \infty$.

Ces équations montrent comment la température extérieure $\zeta$ et la partie $u'$ de la température intérieure sont liées l'une à l'autre. Ces deux quantités varient de la même manière par rapport au temps. Pour des valeurs imaginaires de $m$, elles sont composées de termes pério-

diques, et chaque inégalité périodique de $\zeta$ en produit une semblable dans $u'$, qui a la même période, mais une amplitude différente. Pour une valeur positive ou négative de $m$, ces deux quantités $\zeta$ et $u'$ décroîtront ou croîtront indéfiniment, suivant une même progression géométrique; le temps croissant par des intervalles égaux. Enfin, pour $m = 0$, ces quantités $u'$ et $\zeta$ seront invariables en chaque point de la sphère et de sa surface.

Lorsque la sphère sera placée dans le vide et sa surface imperméable à la chaleur rayonnante, il n'y aura plus aucune communication entre l'intérieur et l'extérieur, et les températures des points de la sphère seront indépendantes de la quantité $\zeta$, quelle qu'elle soit. C'est ce qu'on vérifie, effectivement, en observant qu'on aura dans ce cas $b = 0$, ce qui réduira à zéro la valeur de M tirée de l'équation (25) et relative à un nombre quelconque $n$: en vertu de la seconde équation (26), on aura donc aussi $u' = 0$ à une époque quelconque; il en résultera $f'(r, \theta, \psi) = 0$ et $\varphi'(r, \rho) = 0$; et, par conséquent, la formule (24) ne contiendra plus rien qui dépende des températures extérieures.

Dans le cas général où la constante $b$ n'est pas nulle, aucune des racines de l'équation (16) ne sera zéro. La partie de la formule (24) qui dépend de $\varphi(r, \rho)$ et $\varphi'(r, \rho)$, décroîtra donc indéfiniment, et se réduira sensiblement à zéro au bout d'un certain temps. A cette époque, on aura $u = u'$; la loi des températures intérieures ne dépendra plus des températures extérieures qui avaient lieu primitivement, non plus que de la distribution initiale de la chaleur dans l'intérieur de la sphère, c'est-à-dire de la fonction $f'(r, \theta, \psi)$, aussi bien que de $f(r, \theta, \psi)$; elle ne dépendra alors, en chaque point de la sphère et à chaque instant, que des températures extérieures qui auront lieu à ce même instant, dans toute l'étendue de la surface. Avant l'époque de cette température finale, la valeur de $u$ sera égale à la température $u'$ augmentée de la formule (20), dans laquelle on remplacera $f$, $r'$, par la valeur moyenne de $f(r, \theta, \psi) - f'(r, \theta, \psi)$, à la distance $r'$ du centre de la sphère.

(175). Pour donner un exemple du calcul de la valeur de $u'$ correspondante à une valeur périodique et donnée de $\zeta$, je prendrai d'abord

$$\zeta = (\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos^2\theta)\, e^{-mt};$$

A, B, $m$, étant des constantes que je remplacerai tout à l'heure par des quantités imaginaires.

En comparant cette valeur de $\zeta$ à la première formule (26), on voit que $z_n$ sera zéro pour tout nombre $n$ supérieur à 2; de plus, pour $n=0$, $=1$; $n=2$, on aura

$$z_0 = \mathrm{A} + \tfrac{1}{3}\mathrm{B}, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = \mathrm{B}(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$

d'après l'expression connue de $z_2$, et relative au cas où cette quantité est indépendante de l'angle $\psi$; par conséquent les seuls termes qui entreront dans la seconde formule (26) seront ceux qui répondent à $n=0$ et $n=2$; et il suffira de former les intégrales relatives à $\omega$, pour ces deux valeurs particulières de $n$.

Afin de simplifier le résultat, je supposerai que la sphère ait un très grand rayon, et que le point dont on considère la température soit très éloigné de son centre, de sorte que les lignes $l$ et $r$ aient de très grandes longueurs. Cela étant après avoir effectué les intégrations relatives à $\omega$, je réduis la valeur de chacune des deux intégrales, au terme divisé par la plus petite puissance de $r$ ou de $l$, en dehors des sinus ou cosinus; on trouve de cette manière

$$u' = \left[\left(\mathrm{A} + \frac{1}{3}\mathrm{B}\right)\frac{r}{l} + \mathrm{B}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\frac{r^3}{l^3}\right] \frac{b \sin \frac{r\sqrt{m}}{a}\, e^{-mt}}{b \sin \frac{l\sqrt{m}}{a} + \frac{\sqrt{m}}{a} \cos \frac{l\sqrt{m}}{a}}.$$

Pour appliquer ce résultat au cas d'une inégalité périodique de température, je mets successivement $\pm m\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}\mathrm{A}e^{\pm\epsilon\sqrt{-1}}$, $\frac{1}{2}\mathrm{B}e^{\pm\epsilon\sqrt{-1}}$ au lieu de $m$, A, B, dans l'expression de $\zeta$; puis je fais la somme des deux valeurs qui en résultent, ce qui donne

$$\zeta = (\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos^2\theta)\cos(mt + \epsilon),$$

où l'on regardera maintenant A, B, $m$, $\epsilon$, comme des constantes réelles et données. En opérant de la même manière sur la formule précédente, on obtiendra la valeur de $u'$ correspondante à cette valeur périodique de $\zeta$.

Or, si l'on fait d'abord $m = \pm a\sqrt{-1}$, on aura

$$\sqrt{m} = (1 \pm \sqrt{-1})\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Dans notre hypothèse, les exponentielles $e^{-\frac{r}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\alpha}}$ et $e^{-\frac{l}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\alpha}}$, qui ont des exposans négatifs, seront tout-à-fait insensibles, et devront être négligées. Alors, on aura

$$\sin\frac{r\sqrt{m}}{a} = \frac{1}{2}\,e^{\frac{r}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\alpha}}\left(\sin\frac{r}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha} \pm \sqrt{-1}\cos\frac{r}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\right),$$

$$b\sin\frac{l\sqrt{m}}{a} + \frac{\sqrt{m}}{a}\cos\frac{l\sqrt{m}}{a} = \frac{1}{2}\,e^{\frac{l}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\alpha}}\left\{\left(b+\frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\right)\sin\frac{l}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha} + \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\cos\frac{l}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\right.$$
$$\left.\pm\left[\left(b+\frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\right)\cos\frac{l}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\sin\frac{l}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\right]\sqrt{-1}\right\};$$

et en remettant $m$ au lieu de $\alpha$, on en conclura

$$u' = \frac{b}{D}\left[\left(A+\tfrac{1}{3}B\right)\frac{r}{l} + B\left(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}\right)\frac{r^3}{l^3}\right]e^{-\frac{(l-r)}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}}\cos\left[mt - \frac{(l-r)}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}m} + \varepsilon - \varepsilon'\right],$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$D^2 = \frac{m}{a^2} + \frac{b\sqrt{2m}}{a} + b^2,$$

et en outre,

$$b + \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}m} = D\cos\varepsilon', \quad \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}m} = D\sin\varepsilon'.$$

Cette valeur de $u'$ suppose seulement que le point auquel elle répond soit très éloigné du centre de la sphère d'un très grand rayon; ce qui n'empêche pas que le rapport de $r$ à $l$ ne puisse être très différent de l'unité. Mais si ce point est, de plus, très rapproché de la superficie, de sorte qu'en faisant $l - r = x$, sa distance $x$ à la surface soit une très petite partie du rayon $l$, on pourra faire $\frac{r}{l} = 1$ dans le facteur compris entre les crochets. A cette petite distance $x$, la température $u'$ deviendra donc

$$u' = \frac{b}{D}(A + B\cos^2\theta)\,e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}}\cos\left(mt - \frac{x}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}m} + \varepsilon - \varepsilon'\right). \quad (27)$$

A la surface même, où l'on a $x = 0$, elle se réduira à

$$u' = \frac{b}{D}(A + B\cos^2\theta)\cos(mt + \quad - \quad),$$

et différera, conséquemment, de la température extérieure, qui répond à l'extrémité du même rayon.

On parviendrait à un résultat semblable, en prenant $q\cos(mt+\varepsilon)$ pour l'expression de la température extérieure; $m$ et $\varepsilon$ étant toujours des constantes données, et $q$ désignant une fonction rationnelle et entière de $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, aussi donnée. Si la valeur de $\zeta$ se composait de plusieurs termes de cette forme, chaque terme introduirait dans celle de $u'$ un terme semblable à la formule (27). Nous examinerons dans le chapitre suivant, l'expression de la température permanente, ainsi composée de la superposition de plusieurs inégalités périodiques, correspondantes à celles de la température extérieure; nous allons actuellement considérer la partie de $u'$ qui répond à la partie invariable de $\zeta$, c'est-à-dire à la partie indépendante de $t$ et donnée en fonction des angles $\theta$ et $\psi$.

(176). Dans ce cas, je fais $m = 0$ dans la première équation (26), qui devient

$$\zeta = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \text{etc.}$$

Pour former l'expression du terme général de cette série, d'après la valeur donnée de $\zeta$, soit, comme dans le n° 108,

$$(1 - 2\alpha p + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \alpha^3 P_3 + \ldots + \alpha^n P_n + \text{etc.},$$

de sorte que $P_n$ exprime une fonction de $p$, rationnelle, entière et du degré $n$. Si l'on prend

$$p = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi'),$$

et que l'on désigne par $\zeta'$ ce que $\zeta$ devient quand on y met $\theta'$ et $\psi'$, au lieu de $\theta$ et $\psi$, on aura, en vertu de la formule (4) du n° 109,

$$z_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n \zeta' \sin\theta' \, d\theta' d\psi'.$$

Faisons aussi $m=0$ dans l'équation (25) et dans la seconde équation (26), il en résultera

$$(bl+n)\,\mathrm{M}\int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\omega d\omega = bl^{1-n},$$

$$u' = \Sigma\left(\mathrm{M}\int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\omega d\omega\right)r^n z_n,$$

et, par conséquent,

$$u' = bl\Sigma\frac{r^n z_n}{(bl+n)l^n}; \qquad (28)$$

de manière que la valeur de $u'$ qu'il s'agissait d'obtenir se trouvera représentée par une série dont tous les termes seront exprimés par des intégrales doubles.

Si $\zeta$ est une fonction rationnelle et entière, de $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, et si l'on représente son degré par $i$, on aura $z_n=0$ pour toutes les valeurs de $n$ plus grandes que $i$; pour $i=n$ et $i<n$, les intégrations relatives à $\theta'$ et $\psi'$ s'effectueront immédiatement, et les valeurs de $z_n$ seront aussi des fonctions rationnelles et entières de ces trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\ \sin\psi$, $\sin\theta\ \cos\psi$; dans ce cas particulier, la série qui représente la valeur de $u'$ se bornera donc à un nombre de termes égal à $i$, et cette valeur s'exprimera pour tous les points de la sphère, sous la même forme que celle de $\zeta$. De plus, si le rayon $l$ est très grand et qu'il s'agisse d'un point très voisin de la surface, on pourra faire $\frac{r}{l}=1$, dans la formule précédente, et y remplacer $bl+n$ par $bl$; ce qui la réduira à

$$u' = \Sigma z_n = \zeta.$$

Il s'ensuit donc que, dans ce cas, la température permanente des points de la sphère, très voisins de sa surface, est égale à sa température extérieure qui répond à l'extrémité du rayon auquel ils appartiennent; ce qu'on vérifie, par exemple, sur la formule (27), en y faisant $m=0$. Mais lorsque $\zeta$ sera une fonction quelconque des angles $\theta$ et $\psi$, son développement en série de quantités $z_0$, $z_1$, $z_2$, etc., se composera d'une infinité de termes; la série (28) se prolongera donc également à l'infini, et le nombre $n$ croissant ainsi indéfiniment, il ne sera plus permis de remplacer dans le terme général,

$\left(\frac{r}{l}\right)^n$ par l'unité, à moins que l'on n'ait rigoureusement $r = l$, ni de réduire à $bl$ le diviseur $bl + n$, quelque grand que soit ce nombre $bl$. C'est pourquoi, nous allons transformer la série (28) en une intégrale définie qui ne laissera jamais aucun doute sur la véritable valeur de $u'$.

(177). Le rayon vecteur $r$ ne pouvant pas surpasser $l$, si l'on prend pour $\alpha$ une variable qui ne surpasse pas l'unité, on aura, en série convergente,

$$\left(1 - \frac{2pr\alpha}{l} + \frac{r^2\alpha^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1 \frac{r\alpha}{l} + P_2 \frac{r^2\alpha^2}{l^2} + \ldots\ldots + P_n \frac{r^n\alpha^n}{l^n} + \text{etc.}$$

En différentiant par rapport à $\alpha$, on en déduit

$$\left(\frac{pr}{l} - \frac{r^2\alpha}{l^2}\right)\left(1 - \frac{2pr\alpha}{l} + \frac{r^2\alpha^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = P_1 \frac{r}{l} + 2P_2 \frac{r^2\alpha}{l^2} + \ldots + nP_n \frac{r^n\alpha^{n-1}}{l^n} + \text{etc.}$$

et de ces deux équations, on conclut celle-ci :

$$\left(1 - \frac{r^2\alpha^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{2pr\alpha}{l} + \frac{r^2\alpha^2}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = P_0 + 3P_1 \frac{r\alpha}{l} + 5P_2 \frac{r^2\alpha^2}{l^2} + \ldots$$
$$\ldots + (2n+1) P_n \frac{r^n\alpha^n}{l^n} + \text{etc.}$$

Je la multiplie par $\alpha^{bl-1}d\alpha$, et j'intègre ensuite ses deux membres depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = 1$ ; il en résulte

$$\int_0^1 \frac{l(l^2 - r^2\alpha^2)\alpha^{bl-1}d\alpha}{(l^2 - 2plr\alpha + r^2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \Sigma \frac{(2n+1)r^n}{(bl+n)l^n} P_n ;$$

la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier $n$, depuis $n = 0$ jusqu'à $n = \infty$, comme dans la formule (28). Or, si l'on substitue dans cette formule la valeur de $z_n$, elle devient

$$u' = \frac{bl}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\Sigma \frac{(2n+1)r^n}{(bl+n)l^n} P_n\right] \zeta' \sin\theta' d\theta' d\psi' ;$$

on aura donc

$$u' = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{bl^2(l^2 - r^2\alpha^2)\alpha^{bl-1}\zeta' \sin\theta' d\theta' d\psi' d\alpha}{(l^2 - 2plr\alpha + r^2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (29)$$

pour la valeur $u'$ qu'il s'agissait d'obtenir, et qui se trouve ainsi exprimée par une intégrale triple.

Si l'on représente par $d\sigma$ l'élément différentiel d'une surface sphérique, concentrique à la sphère que nous considérons et dont le rayon soit égal à l'unité, on aura

$$d\sigma = \sin\theta' d\theta' d\psi'.$$

Soit encore, pour abréger

$$\int \frac{l(l^2 - r^2\alpha^2)\zeta' d\sigma}{(l^2 - 2plr\alpha + r^2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{Q};$$

et supposons l'intégrale étendue à tous les élémens $d\sigma$ de cette surface sphérique; la valeur précédente de $u'$ pourra s'écrire sous cette forme plus simple :

$$u' = \frac{bl}{4\pi}\int_0^1 \text{Q}\alpha^{bl-1}d\alpha. \qquad (30)$$

Il en résulte qu'au centre la valeur de $u'$ est la moyenne des températures extérieures qui répondent à tous les points de la surface; car si l'on appelle $\mu$ cette moyenne, et qu'on fasse $r = 0$ dans la valeur de Q, on aura,

$$4\pi\mu = \int \zeta' d\sigma, \quad \text{Q} = 4\pi\mu,$$

et par conséquent,

$$u' = \mu bl \int_0^1 \alpha^{bl-1} d\alpha = \mu.$$

(178). On facilitera l'intégration d'où dépend la quantité Q en changeant l'origine des angles variables qui répondent à l'élément quelconque $d\sigma$, et la transportant au rayon relatif aux angles donnés $\theta$ et $\psi$.

Pour cela, je considère sur la sphère décrite du rayon égal à l'unité, le triangle dont les trois sommets aboutissent au rayon d'où l'on compte l'angle $\theta$, au rayon correspondant aux angles $\theta$ et $\psi$, au rayon aboutissant à l'élément $d\sigma$ et relatif aux angles variables $\theta'$ et $\psi'$. Je désigne par $\theta_1$ l'arc de grand cercle ou le côté com-

pris entre les deux derniers sommets; l'angle dièdre opposé à ce côté est la différence $\psi' - \psi$; d'après la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique, on aura donc

$$\cos\theta_{,} = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi' - \psi) = p.$$

Soit aussi $\psi_{,}$ l'angle dièdre opposé au côté compris entre le premier et le troisième sommet; nous aurons en même temps,

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos\theta_{,} + \sin\theta\sin\theta_{,}\cos\psi_{,}.$$

Ces deux équations, ou les formules connues qui s'en déduisent, détermineront les deux angles $\theta'$ et $\psi'$ en fonction des angles donnés $\theta$ et $\psi$, et des nouveaux angles variables $\theta_{,}$ et $\psi_{,}$; par conséquent, la quantité $\zeta'$, donnée en fonction de $\theta'$ et $\psi'$, se changera aussi en une fonction donnée des quatre angles $\theta$, $\psi$, $\theta_{,}$, $\psi_{,}$. Je désignerai cette fonction par $\zeta_{,}$; et l'on peut remarquer que pour la valeur particulière $\theta = 0$, elle deviendra indépendante de $\psi$ et égale à $\zeta$. De plus, si l'on exprime l'élément $d\sigma$ au moyen des différentielles de $\theta_{,}$ et $\psi_{,}$, on aura

$$d\sigma = \sin\theta_{,} d\theta_{,} d\psi_{,};$$

l'intégrale relative à tous les élémens de la surface sphérique, et représentée par Q, devra s'étendre depuis $\theta_{,} = 0$ et $\psi_{,} = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi_{,} = 2\pi$; et cette quantité Q deviendra, en conséquence,

$$Q = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{l(l^2 - r^2a^2)\zeta_{,} \sin\theta_{,} d\theta_{,} d\psi_{,}}{(l^2 - 2lra\cos\theta_{,} + r^2a^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (31)$$

Si, par exemple, la température extérieure $\zeta$ est indépendante des angles $\theta$ et $\psi$, et égale à une constante $\gamma$, on aura $\zeta_{,} = \gamma$; l'intégration relative à $\psi_{,}$ s'effectuera immédiatement; et il en résultera d'abord

$$Q = 2\pi\gamma \int_0^{\pi} \frac{l(l^2 - r^2a^2)\sin\theta_{,} d\theta_{,}}{(l^2 - 2lra\cos\theta_{,} + r^2a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a d'ailleurs

$$\int \frac{\sin\theta_{,} d\theta_{,}}{(l^2 - 2lr\alpha\cos\theta_{,} + r^2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = C - \frac{1}{lr\alpha\sqrt{l^2 - 2lr\alpha\cos\theta_{,} + r^2\alpha^2}};$$

C étant la constante arbitraire. Le radical devant toujours être une quantité positive, ses valeurs aux deux limites $\theta_{,} = 0$ et $\theta_{,} = \pi$, seront $l - r\alpha$ et $l + r\alpha$; en passant à l'intégrale définie, on en conclut $Q = 4\pi\gamma$; au moyen de quoi la valeur de $u'$ sera $u' = \gamma$, comme cela devait être.

(179). Appliquons maintenant la formule (30), au cas d'une sphère d'un très grand rayon, et aux points très voisins de sa superficie, de sorte qu'en faisant $l - r = x$, la distance $x$ à cette surface soit une très petite partie du rayon $l$.

Si la surface n'est point imperméable ou presque imperméable à la chaleur, le produit $bl$ sera un très grand nombre; à cause du facteur $\alpha^{bl+1}$ compris sous le signe $\int$, l'intégrale contenue dans la formule (30) ne s'étendra donc qu'à des valeurs de $\alpha$ extrêmement peu différentes de l'unité; mais, d'un autre côté, pour ces valeurs de $\alpha$, le coefficient de $d\theta_{,} d\psi_{,}$ dans l'intégrale double que Q représente, est extrêmement petit à raison de son facteur $l - r\alpha$, si ce n'est pour les valeurs de $\theta_{,}$ qui rendent son dénominateur également très petit, c'est-à-dire pour les valeurs de $\theta_{,}$ qui sont elles-mêmes très petites; il suffira donc d'étendre à ces valeurs de $\theta_{,}$, dans la formule (31), l'intégrale relative à cette variable, et l'on y pourra mettre, en conséquence, $\theta_{,}$ et $1 - \frac{1}{2}\theta_{,}^2$ à la place de $\sin\theta_{,}$ et $\cos\theta_{,}$. On pourra, en même temps, réduire le facteur $\zeta_{,}$ à sa valeur $\zeta$ relative à $\theta_{,} = 0$, en excluant toutefois le cas que nous considérerons tout-à-l'heure en particulier, où la température extérieure varie très rapidement autour du point auquel répondent les angles $\theta$ et $\psi$. De cette manière, et en effectuant l'intégration relative à $\psi_{,}$, la formule (31) deviendra

$$Q = 2\pi\zeta \int \frac{l(l^2 - r^2\alpha^2)\theta_{,} d\theta_{,}}{[(l - r\alpha)^2 + lr\alpha\theta_{,}^2]^{\frac{3}{2}}};$$

l'intégrale s'étendant seulement depuis $\theta_{,} = 0$ jusqu'à une très petite valeur de cette variable. Or, le facteur $l - r\alpha$ rendant le

coefficient de $d\theta_,$ sous le signe $\int$, négligeable dès que la valeur de $\theta_,$ n'est plus très petite, il sera permis actuellement d'étendre l'intégrale au-delà de sa seconde limite, et si l'on veut, jusqu'à $\theta_, = \infty$. On aura alors

$$Q = 2\pi\zeta \int_0 \frac{l(l^2 - r^2\alpha^2)\,\theta_, d\theta_,}{[(l-r\alpha)^2 + lr\alpha\theta_,^2]^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\zeta \left(\frac{l}{r\alpha} + 1\right);$$

d'où il résultera, en vertu de la formule (30),

$$u' = \tfrac{1}{2}\,\zeta\left[\frac{bl^2}{(bl-1)r} + 1\right],$$

ou sensiblement $u' = \zeta$.

Dans le cas d'une sphère d'un très grand rayon, et pour des points très voisins de sa surface, l'expression de $u'$ en intégrale définie, nous conduit donc au même résultat que sa valeur en série. Mais l'analyse précédente suppose la réduction de $\zeta_,$ à $\zeta$ sous le signe $\int$, qui n'est plus permise lorsque la température $\zeta$ varie très rapidement autour du point que l'on considère; et, dans ce cas, l'équation $u' = \zeta$ n'a plus lieu, comme on le verra tout à l'heure. Au reste, quand elle existe, cette équation n'a lieu rigoureusement qu'à la limite $l = \infty$, et à la surface même; pour un très grand rayon $l$, ou très près de la surface, cette équation n'est qu'approchée, et la différence $u' - \zeta$ a une très petite valeur que l'on pourra calculer par approximation dans chaque exemple, d'après la valeur donnée de $\zeta$ en fonction de $\theta$ et $\psi$.

(180). Le rayon $l$ étant toujours très grand et considéré comme infini, faisons, dans la formule (29),

$$\alpha = 1 - \frac{h}{l}, \quad d\alpha = -\frac{dh}{l};$$

en désignant par $e$ la base des logarithmes népériens, on aura

$$\alpha^{bl} = e^{-bh}; \quad bl\,\alpha^{bl-1}d\alpha = -\,be^{-bh}dh;$$

et l'intégrale relative à $h$ devra s'étendre depuis $h = l = \infty$ qui répond à $\alpha = 0$, jusqu'à $h = 0$ qui répond à $\alpha = 1$, ou bien, depuis

$h=0$ jusqu'à $h=\infty$, en changeant le signe du résultat. Faisons aussi

$$r=l-x, \quad l\theta=s, \quad l\theta'=s', \quad ld\theta'=ds'.$$

En supposant que $x$ conserve une valeur finie, ou infiniment petite par rapport à $l$; développant suivant les puissances et les produits de $s$ et $s'$; et supprimant ensuite les termes qui auront une puissance de $l$ pour diviseur, il vient

$$l(l^2-r^2\alpha^2)\sin\theta' d\theta' = 2(h+x)s'ds',$$
$$l^2-2plr\alpha+r^2\alpha^2=(h+x)^2+s^2+s'^2-2ss'\cos(\psi-\psi').$$

L'intégrale relative à $s'$ devra ensuite être prise depuis $s'=0$ jusqu'à $s'=\infty$. Par conséquent l'équation (29) deviendra

$$u'=\frac{b}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{(h+x)\,e^{-bh}\zeta' s'dhds'd\psi'}{[(h+x)^2+s^2+s'^2-2ss'\cos(\psi-\psi')]^{\frac{3}{2}}}.$$

En même temps, la sphère du rayon $l$ se sera changée en un corps terminé par un plan indéfini en tous sens; lequel corps se prolonge aussi indéfiniment d'un côté de ce plan. Cette valeur de $u'$ sera la température devenue invariable, qui répond au point situé à la distance $x$ du plan, et dont la projection sur ce plan a $s$ et $\psi$ pour coordonnées polaires, savoir : le rayon vecteur $s$ ayant son origine à un point fixe du plan, choisi arbitrairement, et l'angle $\psi$ que fait ce rayon avec une droite fixe, menée par ce point dans ce même plan. Les variables $s'$ et $\psi'$ sont ce que deviennent $s$ et $\psi$ relativement à un élément quelconque de ce plan; $\zeta'$ est la température extérieure correspondante à cet élément, et donnée en fonction de $s'$ et $\psi'$.

Si l'on veut transformer les coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires, ayant la même origine, on fera

$$s\cos\psi=y, \quad s\sin\psi=z, \quad s'\cos\psi'=y', \quad s'\sin\psi'=z';$$

il en résultera

$$s^2+s'^2-2ss'\cos(\psi-\psi')=(y-y')^2+(z-z')^2.$$

On devra changer en $dy'dz'$, l'élément différentiel $s'ds'd\psi'$ de la surface plane. L'intégrale étendue à cette surface entière aura pour

limites $y' = \pm \infty$ et $z' = \pm \infty$ ; nous aurons donc

$$u' = \frac{b}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-bh} \zeta' dh dy' dz'}{[(h+x)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$u' = -\frac{b}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{d.\frac{1}{\rho}}{dh} e^{-bh} \zeta' dh dy' dz',$$

en faisant, pour abréger,

$$\rho = \sqrt{(h+x)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

En intégrant par partie relativement à $h$, et désignant par $\rho'$ ce que $\rho$ devient à la limite $h = 0$, il vient

$$u' = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\rho'} \zeta' dy' dz' - \frac{b^2}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\rho} e^{-bh} \zeta' dh dy' dz' ;$$

quantité que l'on peut remplacer par celle-ci :

$$u' = \frac{b^2}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) e^{-bh} \zeta' dh dy' dz' ;$$

et sous cette forme on vérifie sans difficulté que cette température invariable $u'$ correspondante au point dont $x, y, z$, sont les trois coordonnées rectangulaires, satisfait à l'équation (n° 50)

$$\frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2} + \frac{d^2u'}{dz^2} = 0.$$

En effet, tant que $\rho$ et $\rho'$ ne sont pas zéro, ou les quantités $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho'}$ infinies, on a identiquement

$$\frac{d^2.\frac{1}{\rho}}{dx^2} + \frac{d^2.\frac{1}{\rho}}{dy^2} + \frac{d^2.\frac{1}{\rho}}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{d^2.\frac{1}{\rho'}}{dx^2} + \frac{d^2.\frac{1}{\rho'}}{dy^2} + \frac{d^2.\frac{1}{\rho'}}{dz^2} = 0;$$

et, par conséquent, chaque élément de l'intégrale triple satisfait sé-

parément à l'équation précédente. D'ailleurs, $\rho$ et $\rho'$ ne deviennent zéro qu'à la surface où l'on a $x=0$, et pour les valeurs particulières $h=0$, $y'=y$, $z'=z$; mais à cause du facteur $\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}$, la partie de l'intégrale triple qui répond à des valeurs de $h, y', z'$, infiniment peu différentes de celles-là, demeure toujours une quantité infiniment petite; on peut donc en faire abstraction, et l'intégrale entière satisfera encore à l'équation donnée dans le cas de $x=0$, comme pour toute autre valeur de $x$.

(181). On simplifiera l'expression de $u'$ en transportant l'origine des coordonnées polaires à la projection du point auquel se rapporte cette température sur le plan qui termine le corps. On aura alors $s=0$; et si l'on fait

$$\int_0^{2\pi} \zeta' d\psi' = 2\pi\eta',$$

il en résultera

$$u' = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{b(h+x)\,e^{-bh}\eta' s' ds' dh}{[(h+x)^2+s'^2]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (32)$$

Si l'on décrit de cette projection comme centre, et d'un rayon égal à $s'$, une circonférence de cercle sur la surface du corps, $\eta'$ sera la moyenne des températures extérieures qui répondent à tous les points de cette circonférence; or, on voit par cette dernière formule que la température fixe $u'$ variera sur chaque perpendiculaire à la surface, avec la distance $x$ à cette surface, suivant une loi qui ne dépendra, pour une valeur donnée de la constante $b$, que de cette température moyenne $\eta'$, et nullement de la variation des valeurs de $\zeta'$ à distance égale autour du pied de cette perpendiculaire. On voit aussi que la valeur de $u'$ qui a lieu à la surface même ou qui répond à $x=0$, différera, en général, de la température extérieure $\zeta$, c'est-à-dire de la valeur de $\zeta'$ relative à $s'=0$, ou ce qui est la même chose, de celle de $\eta'$ qui répond aussi à $s'=0$. Mais si les variations de $\eta'$ ne sont sensibles que pour de très grandes valeurs de $s'$, elles n'influeront pas sensiblement sur la loi des températures $u'$ dans le sens de la profondeur $x$, ainsi que l'on peut s'en assurer en considérant la fraction qui multiplie $\eta'$ sous les signes d'intégration, et dont les valeurs sont très petites et peuvent être

négligées quand la variable $s'$ est devenue très grande. Dans ce cas, on pourra donc regarder la température fixe $u'$, comme égale en tous les points de chaque perpendiculaire à la surface; ce qui s'accorde avec le résultat du n° 179.

Lorsque $\zeta$ sera une température tout-à-fait constante que je représenterai par $\gamma$, on aura aussi $\zeta'=\gamma$ et $\eta'=\gamma$; en vertu de la formule (32), on aura donc

$$u'=\gamma\int_0^{\infty} be^{-bh}dh\int_0^{\infty}\frac{(h+x)s'ds'}{[(h+x)^2+s'^2]^{\frac{3}{2}}};$$

et à cause que chacune de ces deux intégrales simples est égale à l'unité, il en résultera $u'=\gamma$, comme cela devait être.

En mettant $l-x$ et $u'$ à la place de $r$ et $u$ dans l'équation relative à la surface (n° 168), on aura

$$\frac{du'}{dx}=b(u'-\zeta),$$

pour $x=0$; il est bon de vérifier que la formule (32) satisfait à cette équation.

En intégrant par partie relativement à $h$, cette formule devient

$$u'=b\int_0^{\infty}\frac{\eta's'ds'}{(h^2+s'^2)^{\frac{1}{2}}}-b^2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-bh}\eta's'ds'dh}{[(x+h)^2+s'^2]^{\frac{1}{2}}};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{du'}{dx}-bu'=-b\int_0^{\infty}\frac{x\eta's'ds'}{(x^2+s'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, le coefficient de $ds'$ sous cette intégrale est nul pour $x=0$, excepté lorsqu'on a aussi $s'=0$, ce qui rend, au contraire, ce coefficient infini. Nous déterminerons donc la valeur de l'intégrale, ainsi que nous l'avons pratiqué dans tous les cas semblables, en considérant $x$ et $s'$ comme des infiniment petits. On pourra alors prendre pour $\eta'$ la valeur $\zeta$ de cette fonction de $s'$, qui répond à $s'=0$; en sorte que l'on aura d'abord

$$\frac{du'}{dx}-bu'=-b\zeta\int\frac{xs'ds'}{(x^2+s'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

mais cette dernière intégrale étant infiniment petite en même temps que $x$, pour toute valeur finie de $s'$, il sera permis de l'étendre depuis $s'=0$ jusqu'à $s'=\infty$ ; et pour ces limites, l'intégrale étant égale à l'unité, il en résultera

$$\frac{du'}{dx} - bu' = - b\zeta;$$

ce qu'il s'agissait de vérifier.

(182). Au lieu de déterminer la température $u'$ des points du corps que nous considérons d'après la température extérieure, si l'on veut la déduire de celle du plan qui le termine, et si l'on suppose que celle-ci soit représentée par $\zeta'$ au point dont les coordonnées polaires sont $s'$ et $\psi'$, et par $\zeta$ à leur origine; l'équation relative à cette surface sera $u'=\zeta$. Pour qu'elle coïncide avec celle du numéro précédent, il faudra que la constante $b$ soit infinie; en faisant toujours

$$\eta' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta' d\psi',$$

il s'agira donc d'appliquer la formule (32) au cas particulier de $b=\infty$.

Si l'on y fait

$$bh = y, \qquad bdh = dy,$$

cette formule devient

$$u' = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\left(\frac{y}{b}+x\right)e^{-y}\eta' s' ds' dy}{\left[\left(\frac{y}{b}+x\right)^2 + s'^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Lorsque la distance $x$ n'est pas nulle ou infiniment petite, on peut réduire $\frac{y}{b}+x$ à $x$, parce que la fraction $\frac{y}{b}$ n'a de valeurs finies que pour des valeurs infinies de $y$, pour lesquelles l'intégrale s'évanouit à raison du facteur $e^{-y}$. En effectuant ensuite l'intégration relative à $y$, on aura donc

$$u' = \int_0^\infty \frac{x\eta' s' ds'}{(x^2+s'^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad (33)$$

expression beaucoup plus simple que la formule (32), mais qui suppose connue la température de la surface.

Quand la distance $x$ est infiniment petite, et à la surface même où l'on a $x = 0$, l'intégrale relative à $s'$ n'a de valeurs finies que pour des valeurs infiniment petites de $s'$; pour celles-ci, on peut remplacer $u'$ par sa valeur $\zeta$ relative à $s' = 0$; on a donc d'abord

$$u' = \zeta \int_0^\infty \left( \int \frac{\left(\frac{y}{b} + x\right) s' ds'}{\left[\left(\frac{y}{b} + x\right)^2 + s'^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-y} dy.$$

Cette dernière intégrale relative à $s'$ s'évanouissant dès que l'on donne à la variable une valeur finie, on peut actuellement l'étendre depuis $s' = 0$ jusqu'à la valeur finie de $s'$ que l'on voudra, ou même jusqu'à $s' = \infty$; et comme on a

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{y}{b} + x\right) s' ds'}{\left[\left(\frac{y}{b} + x\right)^2 + s'^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 1, \quad \int_0^\infty e^{-y} dy = 1,$$

il en résulte $u' = \zeta$, comme cela devait être.

Quelle que soit la loi des températures de la surface, la valeur de $u'$ à une profondeur quelconque $x$ sera toujours comprise entre la plus haute et la plus basse température de la superficie; car si l'on appelle $m$ la plus grande valeur de $\zeta'$, on aura évidemment,

$$u' < m, \quad u' < m \int_0^\infty \frac{\left(\frac{y}{b} + x\right) s' ds'}{\left[\left(\frac{y}{b} + x\right)^2 + s'^2\right]^{\frac{3}{2}}} < m,$$

puisque cette intégrale relative à $s'$ est égale à l'unité. On aura de même $u' > m'$, si $m'$ est la plus petite valeur de $\zeta'$.

(183). Pour appliquer la formule (33) à un exemple, supposons qu'on ait

$$\zeta' = \gamma e^{-c^2 s'^2};$$

$e$ désignant toujours la base des logarithmes népériens; $\gamma$ et $c$ étant des constantes données, dont la première exprime la température

du point de la surface qui répond à $s'=0$. Puisque cette valeur de $\zeta'$ est indépendante de l'angle $\psi'$, elle sera aussi la valeur de $u'$. En faisant

$$x^2+s'^2=z^2, \quad s'ds'=zdz;$$

les valeurs de $z$ qui répondent aux limites $s'=0$ et $s'=\infty$, seront $z=x$ et $z=\infty$, et il en résultera

$$u'=\gamma e^{c^2x^2}\int_x^\infty e^{-c^2z^2}\frac{xdz}{z^2}.$$

On a d'ailleurs, en intégrant par partie,

$$\int_x^\infty e^{-c^2z^2}\frac{xdz}{z^2}=e^{-c^2x^2}-2cx\int_x^\infty e^{-c^2z^2}cdz;$$

on aura donc

$$u'=\gamma\left(1-2cx\,e^{c^2x^2}\int_x^\infty e^{-c^2z^2}cdz\right).$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que la valeur de $u'$ se réduit à $\gamma$ pour $x=0$. Quand le nombre $cx$ sera très grand, on aura, par une série d'intégrations par partie,

$$\int_x^\infty e^{-c^2z^2}\frac{c^2zdz}{cz}=\frac{1}{2cx}e^{-c^2x^2}\left[1+\frac{1}{2c^2x^2}+\frac{1.3}{(2c^2x^2)^2}+\frac{1.3.5}{(2c^2x^2)^3}+\text{etc.}\right];$$

d'où il résultera cette valeur de $u'$ en série convergente,

$$u'=-\frac{\gamma}{2c^2x^2}\left(1+\frac{1.3}{2c^2x^2}+\frac{1.3.5}{4c^4x^4}+\text{etc.}\right),$$

qui fait voir qu'à de grandes profondeurs la température $u'$, dans l'exemple que nous considérons, est de signe contraire à celle de la surface, et continuellement décroissante à mesure que la distance $x$ augmente de plus en plus. Pour calculer la valeur de $u'$ près de la surface, on remarquera que l'on a

$$\int_x^\infty e^{-c^2z^2}cdz=\int_0^\infty e^{-c^2z^2}cdz-\int_0^x e^{-c^2z^2}cdz;$$

la première de ces deux dernières intégrales a, comme on sait, $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

pour valeur (nº 74); nous aurons donc

$$u' = \gamma\left(1 - cx\sqrt{\pi}\, e^{c^2x^2} + 2cx\, e^{c^2x^2}\int_0^x e^{-c^2z^2}\, cdz\right);$$

et dans cette formule on aura, en série convergente,

$$\int_0^x e^{-c^2z^2}\, cdz = cx - \frac{c^3x^3}{3.1} + \frac{c^5x^5}{5.1.2} - \frac{c^7x^7}{7.1.2.3} + \text{etc.}$$

Enfin, on déterminera le *minimum*, abstraction faite du signe, de la température $u'$, en égalant $\frac{du'}{dx}$ à zéro. A cause de

$$\frac{d}{dx}\int_x^\infty e^{-c^2z^2}\, cdz = -ce^{-c^2x^2},$$

on aura, de cette manière,

$$e^{c^2x^2}(1 + 2c^2x^2)\int_x^\infty e^{-c^2x^2}\, cdz - cx = 0;$$

d'où l'on tirera la valeur approchée de $x$; la valeur correspondante de $u'$ sera

$$u' = \frac{\gamma}{1+2c^2x^2},$$

c'est-à-dire, moindre que $\gamma$ dans le rapport de l'unité à la quantité $1 + 2c^2x^2$.

(184). Je placerai ici quelques remarques générales sur l'équation du mouvement de la hauteur à la surface d'un corps de forme quelconque, mais de très grandes dimensions, comme la terre par exemple, et sur les températures qui ont lieu près de cette surface.

Soit AOB (fig. 14) la surface de ce corps. Par le point quelconque O, menons dans son intérieur la normale O$x$ à cette surface. Si l'on prend cette droite pour l'axe des $x$, et conséquemment les axes des $y$ et des $z$ dans le plan tangent en O, on aura, dans l'équation (2),

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos 6 = 0, \quad \cos\gamma = 0;$$

ce qui réduira cette équation à celle-ci :

$$\frac{du}{dx} = b(u - \zeta),$$

qui aura lieu pour $x = 0$.

Si la surface AOB ne s'écarte pas très rapidement du plan tangent en O, en s'éloignant de ce point, c'est-à-dire, si le point O, dans le cas de la terre, n'appartient pas au sommet ou au penchant d'une montagne très rapide, et généralement à un terrain qui présente de grandes sinuosités; si, de plus, la température extérieure $\zeta$ ne varie pas d'une manière très rapide autour du point O, et qu'en ce point, elle ne varie pas non plus avec le temps, on conçoit que la température $u$ variera aussi très lentement le long de la normale $Ox$, soit avec le temps $t$, soit avec la distance $x$, tant que cette distance sera très petite eu égard aux dimensions du corps. Cela étant, soit M un point de $Ox$, situé à une distance OM ou $x$ du point O, très petite par rapport au rayon de la terre, ou, en général, par rapport aux dimensions du corps que l'on considère; appelons X la température du corps en ce point et au bout du temps $t$; on pourra développer X en série très convergente, ordonnée suivant les puissances de $x$; et par le théorème de Taylor, on aura

$$X = u + x\frac{du}{dx} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.},$$

en faisant $x = 0$ dans $u$ et dans ses coefficiens différentiels. Je négligerai, dans cette série, le carré de $x$ et ses puissances supérieures; on aura alors

$$X - u = x\frac{du}{dx},$$

et par conséquent,

$$X - u = b(u - \zeta)x,$$

en vertu de l'équation relative à la surface. L'accroissement positif ou négatif de la température X sera donc proportionnel à la distance $x$; en le désignant par $g$ pour chaque unité de longueur, et en appelant $f$ l'excès, aussi positif ou négatif, de la température $u$ au point O de la surface, sur la température extérieure $\zeta$ qui répond au même point, on aura

$$X - u = gx, \quad u - \zeta = f;$$

d'après l'équation précédente, on aura donc

$$g = bf;$$

ce qui fera connaître l'excès $f$ quand l'accroissement $g$ sera donné par l'observation, et que l'on connaîtra aussi la valeur de $b$ relative à l'état de la surface au point O et à la conductibilité $k$ de la matière du corps (n° 162). Fourier a remarqué le premier cette relation fort simple entre les deux quantités $g$ et $f$, et l'usage que l'on en peut faire dans la question des températures de la terre près de la surface et à la surface même.

Dans le cas d'une sphère d'un très grand rayon, parvenue à l'état qui précède son refroidissement total, on a

$$f = \frac{2\pi}{bl^3}\left(\int_0^l f_{,}r' \, r' \frac{\sin \pi r'}{l} dr'\right) e^{-\frac{a^2\pi^2 t}{l^2}},$$

$$g = \frac{2\pi}{l^3}\left(\int_0^l f_{,}r' \, r' \frac{\sin \pi r'}{l} dr'\right) e^{-\frac{a^2\pi^2 t}{l^2}},$$

d'après l'expression de la température près de la surface, donnée par la formule (23) où l'on a supposé nulle la température extérieure. Or, on voit que la relation $g = bf$ a lieu entre ces valeurs de $f$ et $g$. On vérifierait également cette équation à toute autre époque du refroidissement de la sphère d'un très grand diamètre, comme aussi dans le cas d'un corps terminé par un plan indéfini, auquel se rapportent les formules du n° 154. Mais si l'on veut appliquer l'équation $g = bf$ aux températures permanentes qui ont lieu près de la surface d'un corps de grandes dimensions, et aux températures extérieures dont celles-là proviennent, il faudra faire abstraction des inégalités à courtes périodes qui affectent les valeurs de $g$ et de $f$, pour ne tenir compte que de celles dont les périodes sont très longues, et qu'on peut appeler des inégalités séculaires.

Ainsi, l'équation $g = bf$ n'a pas lieu pour la valeur de $u'$ donnée par la formule (27) et pour celle de $\zeta$ que cette formule suppose, à moins que le coefficient $m$ de $t$ sous les sinus et cosinus ne soit très

petit, et tel qu'il rende les variations de $u'$ et de $\zeta$ extrêmement lentes. Pour vérifier que cette relation entre $g$ et $f$ subsiste lorsque $\frac{1}{m}$ exprime un temps très long, je mets en général, dans la valeur de $\zeta$ et dans cette formule (27), comme il a été dit dans le n° 175, une fonction rationnelle et entière $q$, des trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, à la place du facteur $A+B\cos^2\theta$; en ayant égard aux valeurs de D, $\cos\epsilon'$, $\sin\epsilon'$, on aura alors

$$\zeta = q\cos(mt+\epsilon),$$

$$u' = \frac{bqe^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}}}{b^2+\frac{b\sqrt{2m}}{a}+\frac{m}{a^2}}\left[\left(b+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}\right)\cos\left(mt+\epsilon-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}\sin\left(mt+\epsilon-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}\right)\right];$$

et en développant les coefficiens de $\sin(mt+\epsilon)$ et $\cos(mt+\epsilon)$, dans cette expression de $u'$, suivant les puissances de $\sqrt{m}$ jusqu'à la seconde exclusivement, on trouve

$$u' = q\cos(mt+\epsilon) + \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}m}}{ab}\left[\sin(mt+\epsilon)-\cos(mt+\epsilon)\right]$$
$$+\frac{qx\sqrt{\frac{1}{2}m}}{a}\left[\sin(mt+\epsilon)-\cos(mt+\epsilon)\right].$$

Or, si l'on prend pour $g$ le coefficient de $x$ dans cette valeur approchée de $u'$, et pour $f$ l'excès de cette même valeur relative à $x=0$, sur la valeur $q\cos(mt+\epsilon)$ de $\zeta$, on aura à la fois,

$$g = \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}m}}{a}\left[\sin(mt+\epsilon)-\cos(mt+\epsilon)\right],$$

$$f = \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}m}}{ab}\left[\sin(mt+\epsilon)-\cos(mt+\epsilon)\right];$$

valeurs qui satisfont effectivement à la condition $g=fb$.

(185). En général, près de la surface d'un corps de très grandes dimensions qui ne présente pas cependant de grandes sinuosités, la température permanente $u'$ est indépendante de la forme du corps; elle est la même que si ce corps était terminé par un plan indéfini, et qu'il s'étendît indéfiniment d'un côté de ce plan; et pour chaque terme périodique de la température extérieure, elle est exprimée par la formule (27). Mais son expression change, comme on va le voir, lorsque l'on a égard à l'influence de la chaleur sur le coefficient $b$ de l'équation relative à la surface.

A cause de $b=\frac{p}{k}$ (n° 162), le second membre de cette équation est $\frac{p(u-\zeta)}{k}$. Or, en vertu de l'équation (4), son numérateur renferme une partie $\lambda(u-\xi)$ qui augmente, à très peu près, dans le rapport de $1+\frac{1}{2}(u+\xi)\log(1,0077)$ à l'unité, par l'influence des températures $u$ et $\xi$ sur la quantité $\lambda$. Si donc on suppose que la valeur de $\xi$ contienne un terme périodique $q_{,}\cos(mt+\varepsilon_{,})$, dans lequel $q_{,}$, $\varepsilon_{,}$, $\frac{1}{m}$, sont une température, un angle, et un intervalle de temps donnés, ce second membre $\frac{p(u-\zeta)}{k}$ devra d'abord être augmenté de

$$b\mathfrak{E}\gamma\left[u^2-q_{,}^2\cos^2(mt+\varepsilon_{,})\right],$$

en observant que $p$ ou $bk$ est la somme des deux quantités $\lambda$ et $\lambda_1$ du n° 163, et faisant, pour abréger,

$$\mathfrak{E}=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1},\quad \gamma=\frac{1}{2}\log(1,0077).$$

La température $u$ influera aussi sur le dénominateur $k$; et si l'on prend pour $k$ l'expression que l'on a obtenue dans le n° 55, d'après une loi déterminée de l'absorption de la chaleur dans l'intérieur des corps, cette quantité $k$, en passant de $u=0$ à la valeur de $u$, augmentera dans le rapport de $1+2\gamma u$ à l'unité, en négligeant le carré de $\gamma$. Ce même second membre variera en raison inverse, et diminuera, en conséquence, de

$$2b\gamma u(u-\zeta).$$

Ainsi, l'équation relative à la surface deviendra

$$\frac{du}{dx} = b(u - \zeta)(1 - 2\gamma u) + b\mathfrak{G}\gamma [u^2 - q_{\prime}^2 \cos^2(mt + \varepsilon_{\prime})]. \quad (34)$$

A raison du terme $q_{\prime}\cos(mt + \varepsilon_{\prime})$ provenant de $\xi$, et en vertu de la seconde équation (5), la température extérieure $\zeta$ comprendra un terme $\mathfrak{G}q_{\prime}\cos(mt + \varepsilon_{\prime})$; mais elle peut aussi renfermer un autre terme périodique dépendant du même angle variable $mt$, provenant d'une autre source, et que je représenterai par $q\cos(mt + \varepsilon)$; $q$ et $\varepsilon$ étant une température et un angle qui différeront généralement de $q_{\prime}$ et $\varepsilon_{\prime}$. Cela posé, si l'on veut déterminer la partie de la température permanente $u'$, qui répond à toute la partie de la température extérieure dépendante des sinus et cosinus de $mt$, on prendra, dans l'équation précédente,

$$\zeta = q\cos(mt + \varepsilon) + \mathfrak{G}q_{\prime}\cos(mt + \varepsilon_{\prime}),$$

et l'on y mettra $u'$ au lieu de $u$. En négligeant, dans une première approximation, les termes qui ont $\gamma$ pour facteur, et mettant successivement $q$ et $\mathfrak{G}q_{\prime}$ au lieu de $\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos^2\theta$ dans la formule (27), elle fera connaître les valeurs de $u'$ qui répondent à ces deux termes de celle de $\zeta$. De cette manière, on aura, dans une seconde approximation,

$$u' = \frac{b}{\mathrm{D}} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}} \Big[ q\cos\Big(mt - \frac{x}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}m} + \varepsilon - \varepsilon'\Big) + \mathfrak{G}q_{\prime}\cos\Big(mt - \frac{x}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}m} + \varepsilon_{\prime} - \varepsilon'\Big)\Big] + \gamma v;$$

$v$ étant une nouvelle inconnue qui restera à déterminer en fonction de $x$ et $t$.

Je substitue cette valeur de $u'$ à la place de $u$, et pour $\zeta$ sa valeur précédente dans l'équation (34) qui a lieu pour $x = 0$; les termes indépendans de $\gamma$ se détruisent, comme cela doit être; en négligeant toujours le carré de $\gamma$, et supprimant ensuite le facteur $\gamma$ commun à tous les termes, cette équation prend la forme

$$\frac{dv}{dx} = b(v - \varpi - \chi); \quad (35)$$

$\varpi$ étant une fonction périodique, dépendante des sinus et cosinus du

double de $mt$ et dont la valeur est facile à former; et $\chi$ désignant une quantité constante également connue, savoir :

$$\chi = \frac{b^2}{D^2}(1-\tfrac{1}{2}\mathit{6})(q+\mathit{6}q_{\prime})^2 - \frac{b\left(b+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}\right)}{D^2}[q^2+\mathit{6}^2q_{\prime}^2+2\mathit{6}qq_{\prime}\cos(\epsilon-\epsilon_{\prime})]+\tfrac{1}{2}\mathit{6}q_{\prime}^2,$$

en ayant égard à la valeur $\frac{b+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}}{D}$ de $\cos\epsilon'$ (n° 175).

Indépendamment de l'équation relative à $x=0$, la valeur de $u'$ doit encore satisfaire pour toutes les valeurs de $x$, à l'équation du mouvement de la chaleur dans l'intérieur du corps que l'on considère; mais attendu que l'on a égard à la variation de $k$, il faut prendre pour celle-ci, l'équation (8) du n° 50, dans laquelle on mettra $k(1+2\gamma u)$ à la place de $k$, et $u'$ au lieu de $u$. On fera ensuite $\frac{k}{c}=a^2$, comme dans le n° 162; on supposera le corps terminé par un plan indéfini qui sera celui des coordonnées $y$ et $z$, et s'étendant indéfiniment dans le sens des $x$ positives; enfin, on regardera la température $u'$ comme indépendante de $y$ et $z$, du moins dans une grande étendue autour de l'axe des $x$. On aura alors

$$\frac{du'}{dt}=a^2\left(\frac{d^2u'}{dx^2}+\gamma\,\frac{d^2.u'^2}{dx^2}\right).$$

En substituant, dans cette équation, pour $u'$ sa valeur précédente, les termes indépendans de $\gamma$ se détruisent, comme cela devait arriver; en négligeant le carré de $\gamma$, et supprimant ensuite le facteur $\gamma$ commun aux deux membres, il vient

$$\frac{dv}{dt}=a^2\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2\Pi}{dx^2}+\frac{d^2V}{dx^2}\right]; \qquad (36)$$

$\Pi$ étant une fonction périodique dépendante de $x$ et des sinus et cosinus de $2mt$, et V une quantité qui ne dépend que de $x$, dont la valeur sera

$$V=\frac{b^2(q+\mathit{6}q_{\prime})^2}{2D^2}\,e^{-\frac{x\sqrt{2m}}{a}}.$$

Il ne s'agira plus maintenant que de former une valeur particulière de $v$ qui satisfasse à la fois aux équations (35) et (36); et l'on pourra en outre assujettir cette valeur à ne pas croître indéfiniment avec $x$ (n° 155); condition qui est ici nécessaire pour qu'on ait pu négliger, dans l'équation (36), des termes dépendans de $v$ à cause de leur facteur $\gamma^2$. Cette valeur de $v$ renfermera une partie périodique, correspondante aux quantités $\varpi$ et $\frac{d^2\Pi}{dx^2}$ qui sont renfermées dans ces deux équations, et une partie indépendante de $t$ que nous nous bornerons à considérer. En supprimant donc ces quantités $\varpi$ et $\frac{d^2\Pi}{dx^2}$, la valeur de $v$ indépendante de $t$ et la plus générale qui satisfasse à l'équation (36), est évidemment

$$v = C + C'x - V;$$

C et C' étant deux constantes arbitraires. Afin que $v$ ne croisse pas indéfiniment avec $x$, on fera $C' = 0$. Au moyen de l'équation (35), relative à $x = 0$, on aura ensuite

$$\frac{b(q+6q_{,})^2\sqrt{\frac{1}{2}m}}{2D^2a} = C - \frac{b^2(q+6q_{,})^2}{2D^2} - \chi;$$

ce qui fait connaître la valeur de C d'après celle de $\chi$. Pour une valeur quelconque de $x$, et en ayant égard à la valeur de V, il en résultera

$$\begin{aligned} v = {} & \frac{b\left[b(3-6)+\frac{1}{a}\sqrt{2m}\right]}{2D^2}(q+6q_{,})^2 + \tfrac{1}{2}6q_{,}^2 \\ & - \frac{b\left(b+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}\right)}{D^2}\left[q^2 + 6^2q_{,}^2 + 26qq_{,}\cos(\epsilon-\epsilon_{,})\right] \\ & - \frac{b^2(q+6q_{,})^2}{2D^2}\, e^{-\frac{x\sqrt{2m}}{a}}. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque les températures $u$ et $\zeta$, ne sont pas très élevées, leur influence sur la conductibilité $k$ et sur la quantité $p$ peut néanmoins produire un effet sensible sur les températures intérieures. Pour chaque partie périodique de la température extérieure, dépendante des sinus et cosinus d'un angle $mt$, ou dont la période comprend un

intervalle de temps donné et représenté par $\frac{2\pi}{m}$, cette influence produit dans la température qui a lieu à la distance $x$ de la surface, une augmentation invariable et égale à la valeur précédente de $v$, multipliée par $\gamma$ qui est une fraction un peu moindre que quatre millièmes. Il s'ensuit qu'à la surface, la partie invariable de la température surpasse celle de la température extérieure, d'une quantité égale à la valeur de $\gamma v$ qui répond à $x = 0$. La valeur de $\frac{dv}{dx}$ étant positive, l'augmentation $\gamma v$ de température est croissante avec la distance $x$, mais non pas indéfiniment : quand cette distance est devenue un multiple un peu considérable de $\frac{a}{\sqrt{2m}}$, l'exponentielle contenue dans la formule précédente est insensible; en sorte qu'à cette distance et au-delà, la valeur de $\gamma$ est sensiblement constante, et la température invariable surpasse celle qui a lieu à la surface, d'une quantité

$$\frac{\gamma b^2 (q + \mathcal{C} q_1)^2}{2\left(b^2 + \frac{b\sqrt{2m}}{a} + \frac{m}{a^2}\right)},$$

en mettant pour $D^2$ sa valeur (nº 175).

Dans les usages de l'équation $g = bf$ du numéro précédent, pour déterminer l'une des deux quantités $g$ et $f$ au moyen de l'autre, on fera attention qu'elles ne doivent pas contenir les parties de leurs valeurs dépendantes du terme $\gamma v$ de l'expression de $u$; on prendra donc pour $g$ l'accroissement de température rapporté à l'unité de longueur, qui a lieu sur la normale O$x$, à une distance de la surface assez grande pour que l'exponentielle contenue dans la valeur de $\gamma v$ soit devenue insensible; et $f$ sera l'excès de la température moyenne du point O sur la température moyenne extérieure qui répond au même point, diminué de la valeur de $\gamma v$ relative à $x = 0$; en sorte que si la valeur de $g$ est donnée par l'observation, et que l'on prenne $\frac{g}{b}$ pour celle de $f$, il faudra ajouter à cette quantité $\frac{g}{b}$ la valeur de $\gamma v$ qui répond à $x = 0$, pour en déduire l'excès entier de la première température moyenne sur la seconde.

# CHAPITRE XII.

## *Mouvement de la chaleur dans l'intérieur et à la surface de la terre.*

(186). La densité de la terre est croissante de la surface au centre; l'état de sa superficie n'est pas non plus partout le même; et elle est recouverte, dans sa plus grande partie, par les eaux de la mer. Mais cette densité ne varie pas sensiblement jusqu'à des profondeurs considérables, pourvu qu'elles soient toujours très petites par rapport au rayon du globe; la nature du terrein et l'état de la superficie demeurent aussi à très peu près les mêmes, en général, dans une grande étendue autour de la verticale d'un lieu déterminé; et si ce lieu n'est pas voisin d'une montagne, on peut aussi regarder la surface de la terre, dans toute cette étendue, comme étant celle d'une sphère d'un très grand rayon. C'est de cette manière que les formules du chapitre précédent pourront servir à déterminer les températures de la terre sur chaque verticale, jusqu'à des distances de la surface qui dépasseront de beaucoup les profondeurs les plus grandes où l'on a pu atteindre. On pourra, par exemple, étendre ces formules jusqu'à des distances égales au centième du rayon de la terre, c'est-à-dire jusqu'à une profondeur d'environ 60000 mètres, tandis que les profondeurs où l'on a pénétré jusqu'ici, et où l'on a observé la température, sont au plus de quelques centaines de mètres.

Supposons donc que le point O (fig. 14) appartienne à la surface de la terre, et que $Ox$ soit une verticale indéfinie, menée par ce point dans l'intérieur du globe. Soit M un point de cette droite, situé à une distance OM de la surface que l'on représentera par $x$ et qui sera,

pour fixer les idées, moindre qu'un centième du rayon de la terre, de sorte que la densité ne varie pas sensiblement du point O au point M. On supposera aussi que la nature du terrein et l'état de la surface, sont sensiblement les mêmes, dans une étendue de plusieurs myriamètres, par exemple, tout autour de la droite $Ox$. Le point O pourra être plus ou moins élevé au-dessus du niveau des mers; mais son horizon ne doit être borné d'aucun côté; près de ce point, les sinuosités du terrein ne doivent pas être considérables, et la surface doit s'écarter très peu du plan mené par ce même point, perpendiculairement à la droite $Ox$. Ces conditions ne seront pas remplies, lorsque le point O sera situé sur le penchant ou au sommet d'une montagne rapide; c'est pourquoi nous supposerons que ce cas n'a pas lieu. Enfin, on supposera encore que le point O appartient à la surface de la terre ferme et non à la surface de la mer. Quoique les équations générales du mouvement de la chaleur conviennent également aux solides et aux liquides (n° 46), cependant les conséquences qui s'en déduisent ne sont pas les mêmes pour ces deux sortes de corps à cause de la grande mobilité des molécules fluides : par cette raison, la loi des températures est très différente au-dessous de la surface de la mer et au-dessous de la superficie de la partie solide de la terre. Les voyageurs ont fait un grand nombre d'observations en différens points du globe, et à diverses époques du jour et de l'année, sur les températures de la mer à des profondeurs plus ou moins grandes; mais cette question, qui présentera de grandes difficultés aux géomètres, n'a point encore été soumise à l'analyse, et nous ne nous en occuperons pas dans cet ouvrage (*).

Ainsi, le point M de la verticale $Ox$, pour lequel il s'agira de déterminer la température à un instant quelconque, sera censé apparte-

(*) M. de Freycinet a bien voulu me communiquer le programme des observations de ce genre qu'il a faites dans son voyage de l'*Uranie;* l'objet que je me suis proposé dans ce Traité ne m'a pas fourni l'occasion de faire usage de ces données de l'expérience; mais il serait bien à désirer, pour le progrès de la Géographie physique et pour les applications futures de l'analyse, que ces observations et les conséquences que l'auteur en a déduites, fussent incessamment publiées.

nir à une sphère d'un très grand rayon, homogène et dont la superficie sera partout dans le même état. La matière de cette sphère et la nature de cette surface seront celles de la terre autour de la verticale O$x$. Elles détermineront deux constantes positives, que nous désignerons par $a$ et $b$, comme dans les formules du chapitre précédent, qui entreront dans l'expression de la température du point M, et dont les valeurs numériques devront être données par hypothèse, ou déduites de l'observation. En désignant par $c$ la chaleur spécifique du terrain autour de O$x$, rapportée à l'unité de volume, par $k$ la mesure de la conductibilité calorifique de la même matière, par $p$ une quantité relative à l'état de la surface et croissante avec son pouvoir rayonnant, on aura

$$a^2 = \frac{k}{c}, \quad b = \frac{p}{k}.$$

Pour un autre point $O_1$ de la surface du globe, situé dans une région différente, ou seulement éloigné du point O, de plusieurs myriamètres, les valeurs de $c$, $k$, $p$, et par suite celles de $a$ et $b$ changeront généralement; et dans un même lieu O, la quantité $b$ pourra n'être pas la même qu'elle était autrefois, si l'état de la surface a varié par des défrichemens, des déboisemens ou d'autres causes. La terre s'écartant peu de la forme sphérique, les verticales, pour tous les points de sa surface, passeront à très peu près par son centre C; on prendra le rayon CO du globe pour celui de la sphère homogène que l'on substituera à la terre entière dans le calcul de la température du point M; et l'on désignera par $l$ la longueur de ce rayon, qui sera à très peu près la même pour le point O et pour tout autre point $O_1$.

Cela posé, au bout d'un temps quelconque $t$, dont on fixera arbitrairement l'origine, je représenterai par $\zeta$ la température extérieure correspondante au point O. Cette température variera avec le temps; elle variera aussi en passant du point O au point $O_1$, ainsi qu'on l'a expliqué précédemment (n° 163); on en formera par la suite l'expression complète, en fonction de la longitude et de la latitude du point quelconque $O_1$, et du temps $t$, d'après les diverses sources de chaleur dont elle provient. Par des circonstances locales, cette température $\zeta$ pourrait aussi varier très rapidement

autour du point O; ce qui donnerait lieu d'après ce qu'on a trouvé dans le n° 181, à des lois particulières de la température intérieure sur la verticale $Ox$; mais nous ferons abstraction de ces variations accidentelles de température, pour ne considérer que celles qui sont dues à des causes générales. Enfin, on représentera par $u$ la température du point M au bout du temps $t$. Cette inconnue se composera, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, de deux parties que nous examinerons successivement: l'une dépendante de la chaleur propre et initiale du globe, s'il en reste encore quelques traces près de la surface; l'autre relative à l'état permanent de la terre, et qui se déduira immédiatement de la température extérieure, quand l'expression de cette température $\zeta$ sera connue.

(187). Une expérience que nous pouvons répéter tous les jours montre que la température des lieux profonds est à peu près constante; en sorte que si la distance $x$ est d'environ 20 mètres et au-delà, la température $u$ du point M, varie très peu. Mais à cette même distance de la surface, sa valeur change d'une verticale $Ox$ à une autre; et généralement elle augmente ou diminue, selon que le point O se rapproche ou s'éloigne de l'équateur. A une profondeur moindre, la température du point M est soumise à des variations diurnes et annuelles, dont les amplitudes décroissent à mesure que la distance à la surface augmente, et qui disparaissent entièrement, quand cette distance a atteint une vingtaine de mètres.

Ainsi, le thermomètre construit par M. Gay-Lussac, et placé dans les caves de l'Observatoire, à une profondeur de 28 mètres au-dessous de la surface du sol, n'a indiqué que de petites variations de température, depuis le 1er juillet 1817, époque où il a été établi, jusqu'au 18 janvier 1835. Pendant cet intervalle de dix-sept ans et demi, il a été observé trois cent cinquante-deux fois; et voici le tableau de ces observations, qui m'a été communiqué par M. Bouvard. Je les ai partagées en quatre séries, afin que l'on vît mieux les petites variations que la température a éprouvées; et en tête de chaque série, j'ai placé le nombre de températures dont elle se compose, et leur somme divisée par ce nombre, c'est-à-dire leur grandeur moyenne.

*Températures des caves de l'Observatoire.*

| DATES. | Température |
|---|---|
| **Du 1er juillet 1817 au 16 juin 1820.** 72 observations ; moyenne, 11°,730. | |
| **1817.** 1er juillet.. | 11°,675 |
| 17 *id.* ... | 11,675 |
| 1er août ... | 11,779 |
| 16 *id.* ... | 11,710 |
| 1er septemb. | 11,710 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er octobre. | 11,710 |
| 21 *id.* ... | 11,744 |
| 1er novemb. | 11,761 |
| 16 *id.* ... | 11,710 |
| 1er décemb. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| **1818.** 1er janvier.. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er février.. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er mars... | 11,710 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er avril... | 11,744 |
| 21 *id.* ... | 11,744 |
| 1er mai. ... | 11,744 |
| 17 *id.* .... | 11,744 |
| 1er juin.... | 11,744 |
| 16 *id.* .... | 11,675 |
| 1er juillet.. | 11,710 |
| 16 *id.* .... | 11,710 |
| 1er août.... | 11,710 |
| 16 *id.* .... | 11,710 |
| 1er septemb. | 11,710 |
| 16 *id.* .... | 11,710 |
| 1er octobre. | 11,744 |
| 16 *id* .... | 11,744 |
| 1er novemb. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,774 |

| DATES. | Température |
|---|---|
| **1818.** 1er décemb. | 11°,710 |
| 16 *id.* ... | 11,710 |
| **1819.** 1er janvier. | 11,744 |
| 16 *id* .... | 11,710 |
| 1er février.. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er mars.. | 11,744 |
| 16 *id* ... | 11,744 |
| 1er avril.... | 11,710 |
| 16 *id*.... | 11,710 |
| 1er mai.... | 11,710 |
| 16 *id*..... | 11,710 |
| 1er juin.... | 11,727 |
| 16 *id.* ... | 11,710 |
| 1er juillet.. | 11,710 |
| 17 *id.* ... | 11,710 |
| 1er août. .. | 11,710 |
| 16 *id.* ... | 11,710 |
| 1er septemb. | 11,710 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 2 octobre.. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er novemb. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er décemb. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| **1820.** 1er janvier.. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,779 |
| 1er février.. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er mars ... | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er avril. .. | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er mai.... | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er juin.... | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,710 |

| DATES. | Température |
|---|---|
| **Du 1er juillet 1820 au 16 février 1826.** 134 observations ; moyenne, 11°,801. | |
| **1820.** 1er juillet.. | 11°,779 |
| 16 *id.* ... | 11,779 |
| 2 août. ... | 11,814 |
| 16 *id.* .... | 11,814 |
| 1er septemb. | 11,779 |
| 16 *id.* ... | 11,779 |
| 1er octobre. | 11,814 |
| 16 *id.* ... | 11,814 |
| 1er novemb. | 11,779 |
| 16 *id.* ... | 11,779 |
| 1er décemb. | 11,779 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| **1821.** 1er janvier.. | 11,744 |
| 16 *id* .... | 11,779 |
| 1er février.. | 11,814 |
| 16 *id* .... | 11,779 |
| 1er mars... | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,779 |
| 1er avril.... | 11,779 |
| 16 *id.*.... | 11,779 |
| 1er mai ... | 11,779 |
| 16 *id.*.... | 11,779 |
| 1er juin.... | 11,744 |
| 16 *id.* ... | 11,744 |
| 1er juillet.. | 11,779 |
| 16 *id* .... | 11,779 |
| 1er août.... | 11,779 |
| 16 *id.*.. | 11,779 |
| 1er septemb. | 11,779 |
| 16 *id.* ... | 11,779 |
| 1er octobre. | 11,779 |
| 16 *id.* ... | 11,779 |
| 1er novemb. | 11,779 |
| 16 *id.* ... | 11,779 |
| 1er décemb. | 11,779 |
| 16 *id*.... | 11,779 |
| **1822.** 1er janvier . | 11,814 |
| 16 *id.* ... | 11,814 |
| 1er février.. | 11,814 |
| 16 *id*.... | 11,814 |
| 1er mars... | 11,814 |

*Suite.*

| DATES. | | Température |
|---|---|---|
| **1822.** | 16 mars.... | 11°,779 |
| | 1er avril... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er mai.... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er juin.... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er juillet.. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er août... | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er septemb.. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er octobre. | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er novemb. | 11,814 |
| | 16 *id*... | 11,814 |
| | 1er décemb. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| **1823.** | 1er janvier. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er février.. | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er mars... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er avril... | 11,779 |
| | 16 *id.*.. | 11,814 |
| | 1er mai.... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er juin.... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er juillet.. | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er août.... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er septemb. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er octobre. | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er novemb. | 11,779 |
| | 17 *id.*... | 11,779 |
| | 6 décemb.. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| **1824.** | 8 janvier.. | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er février.. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |

| DATES. | | Température |
|---|---|---|
| **1824.** | 1er mars... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er avril... | 11,884 |
| | 16 *id.*... | 11,884 |
| | 1er mai... | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,884 |
| | 1er juin.... | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er juillet.. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,884 |
| | 1er août... | 11,884 |
| | 16 *id.*... | 11,884 |
| | 1er septemb. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er octobre. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,744 |
| | 1er novemb. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er décemb. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| **1825.** | 1er janvier. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er février.. | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er mars... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er avril... | 11,744 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er mai.... | 11,779 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er juin.... | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er juillet.. | 11,814 |
| | 15 *id.*... | 11,814 |
| | 1er août.... | 11,814 |
| | 15 *id.*... | 11,814 |
| | 1er septemb. | 11,779 |
| | 16 octobre. | 11,814 |
| | 1er novemb. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er décemb. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| **1826.** | 1er janvier.. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er février.. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |

| DATES. | | Température |
|---|---|---|
| Du 1er mars **1826** au 16 octobre **1828**. 55 observations ; moyenne, 11°,857. | | |
| **1826.** | 1er mars... | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er avril... | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,779 |
| | 1er mai.... | 11,779 |
| | 1er juillet.. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er août.... | 11,849 |
| | 17 *id.*... | 11,849 |
| | 1er septemb. | 11,849 |
| | 15 *id.*... | 11,849 |
| | 1er octobre. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er novemb. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| | 1er décemb. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,814 |
| **1827.** | 2 janvier.. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,884 |
| | 1er février.. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er mars... | 11,849 |
| | 15 *id.*... | 11,849 |
| | 1er avril... | 11,884 |
| | 17 *id.*... | 11,884 |
| | 2 mai.... | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er juin.... | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er juillet.. | 11,814 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er août... | 11,849 |
| | 1er octobre. | 11,884 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er novemb. | 11,849 |
| **1828.** | 1er janvier. | 11,849 |
| | 16 *id.*... | 11,884 |
| | 1er février.. | 11,919 |
| | 16 *id.*... | 11,849 |
| | 1er mars... | 11,884 |
| | 16 *id.*... | 11,919 |

*Suite.*

| DATES. | Température | DATES. | Température | DATES. | Température |
|---|---|---|---|---|---|
| **1828.** 1er avril... | 11,919 | **1829.** 1er juillet.. | 11°,989 | **1832.** 3 septemb. | 11,954 |
| 16 *id*.... | 11,849 | 16 août.... | 11,954 | 2 octobre.. | 11,954 |
| 1er mai.... | 11,849 | 1er septemb. | 11,954 | 1er novemb. | 11,954 |
| 16 *id*.... | 11,884 | 16 *id*.... | 11,954 | 4 décemb.. | 11,954 |
| 1er juin.... | 11,884 | 1er octobre. | 11,919 | **1833.** 2 janvier.. | 11,954 |
| 16 *id*.... | 11,884 | 16 *id*.... | 11,919 | 5 février.. | 11,936 |
| 1er juillet.. | 11,884 | 16 novemb. | 11,954 | 3 mars... | 11,936 |
| 16 *id*.... | 11,884 | 1er décemb. | 11,919 | 1er avril... | 11,954 |
| 1er août... | 11,884 | **1830.** 11 février.. | 11,919 | 8 mai..... | 11,954 |
| 16 *id*.... | 11,849 | 6 mars.... | 11,919 | 2 juin..... | 11,954 |
| 1er septemb. | 11,884 | 6 avril.... | 11,954 | 1er juillet.. | 11,971 |
| 16 *id*.... | 11,884 | 1er mai..... | 11,919 | 1er août... | 11,954 |
| 1er octobre. | 11,884 | 1er juin.... | 11,954 | 8 octobre.. | 11,954 |
| 16 *id*.... | 11,884 | 16 *id*.... | 11,954 | 1er novemb. | 11,954 |
|  |  | 2 juillet... | 11,954 | 6 décemb.. | 11,954 |
| **Du 1er novembre 1828 au 18 janvier 1835.** |  | 3 août.... | 11,936 | 24 *id*.... | 11,954 |
|  |  | 1er septemb. | 11,971 | **1834.** 4 janvier.. | 11,954 |
| 91 observations; moyenne, 11°,950. |  | 5 octobre. | 11,954 | 4 février.. | 11,954 |
|  |  | 1er novemb. | 11,954 | 2 mars.... | 11,954 |
|  |  | 3 décemb. | 11,954 | 6 avril... | 11,954 |
|  |  | **1831.** 3 janvier. | 11,954 | 1er mai.... | 11,954 |
|  |  | 3 février.. | 11,954 | 2 juin..... | 11,954 |
| **1828.** 1er novemb. | 11,919 | 2 avril.... | 11,954 | 20 *id*.... | 11,954 |
| 16 *id*.... | 11,919 | 2 mai.... | 11,954 | 1er juillet.. | 11,954 |
| 1er décemb. | 11,919 | 1er juin.... | 11,954 | 15 *id*.... | 11,971 |
| 16 *id*.... | 11,919 | 1er juillet.. | 11,954 | 1er août... | 11,971 |
| **1829.** 1er janvier.. | 11,919 | 2 août.... | 11,954 | 16 *id*.... | 11,971 |
| 17 *id*.... | 11,919 | 2 septemb. | 11,954 | 2 septemb. | 11,971 |
| 1er février.. | 11,919 | 1er octobre. | 11,954 | 17 *id*... | 11,971 |
| 16 *id*.... | 11,919 | 1er novemb. | 11,971 | 6 octobre.. | 11,971 |
| 1er mars... | 11,919 | 1er décemb. | 11,982 | 16 *id*.... | 11,971 |
| 16 *id*.... | 11,919 | **1832.** 3 janvier.. | 11,982 | 3 novemb. | 11,971 |
| 1er avril.. | 11,919 | 3 février.. | 11,954 | 16 *id*.... | 11,971 |
| 16 *id*.... | 11,919 | 1er mars... | 11,971 | 6 décemb.. | 11,971 |
| 1er mai.... | 11,919 | 2 avril.... | 11,971 | 16 *id*.... | 11,771 |
| 16 *id*.... | 11,919 | 1er mai.... | 11,954 | **1835.** 2 janvier.. | 11,971 |
| 1er juin.... | 11,919 | 1er juin.... | 11,954 | 18 *id*.... | 11,971 |
| 16 *id*.... | 11,989 | 4 août.... | 11,954 |  |  |

On voit que dans chaque série, les températures s'écartent très peu de leur valeur moyenne. Toutefois, les quatre moyennes 11°,730, 11°,801, 11°,857, 11°,950, sont croissantes; la différence de

la dernière à la première est 0°,220; et si cet effet n'est pas dû à un déplacement du zéro de l'échelle thermométrique, il indiquerait une inégalité sensible dans la température des caves de l'Observatoire, pendant les 17 dernières années. Cette petite inégalité est confirmée par les indications d'un second thermomètre, placé dans le même lieu et construit autrefois par Lavoisier. On a reconnu que cet instrument marque des températures un peu trop élevées; mais l'excès de ses indications sur celles du thermomètre de M. Gay-Lussac, a très peu varié depuis que l'on observe en même temps ces deux instrumens : sa grandeur moyenne a été de 0°,316, dont il s'est à peine écarté de 0°,01 en plus ou en moins.

Les deux instrumens indiquant des variations de température dans le même sens et sensiblement égales, on est porté à en conclure qu'elles sont réelles, sans les confondre néanmoins avec les inégalités annuelles qui sont tout-à-fait insensibles à la profondeur des caves de l'Observatoire, comme on le voit par chacune des quatre séries précédentes d'observations. Les variations dont il s'agit peuvent être attribuées à des causes irrégulières qui influent sur la température extérieure. La quantité totale de chaleur solaire qui parvient à la surface de la terre dépend, en effet, de l'état de l'atmosphère qu'elle a traversée, et varie en conséquence d'une année à l'autre; la valeur moyenne de la température extérieure résulte en grande partie de cette quantité totale de chaleur solaire; et les inégalités irrégulières qu'elle éprouve pendant plusieurs années consécutives peuvent en produire dans la température intérieure, qui soient encore sensibles à des profondeurs où les inégalités diurnes et annuelles ont tout-à-fait disparu. Cela étant, pour obtenir une température des lieux profonds, indépendante de ces variations irrégulières, et qu'on puisse regarder comme constante, abstraction faite des inégalités séculaires auxquelles elle peut être soumise, il faut prendre la moyenne des températures observées pendant un assez grand nombre d'années. Or, en faisant la somme de toutes les températures comprises dans le tableau ci-dessus, et la divisant par leur nombre 352, on trouve 11°,834 pour la température des caves de l'Observatoire à l'époque actuelle.

(188). L'observation nous a aussi appris depuis long-temps qu'à la profondeur où les inégalités diurnes et annuelles ne sont plus sensi-

bles, la température de la terre augmente sur chaque verticale avec la distance à la surface. Les températures observées avec soin dans un grand nombre de mines de différens pays, ne laissent aucun doute sur ce phénomène (*); il a lieu près de l'équateur, comme à notre latitude et plus près du pôle; on l'observe également dans des mines dont l'ouverture est à une très grande hauteur au-dessus du niveau des mers, ainsi que M. de Humboldt l'a constaté, et plus récemment M. Boussingault; mais à raison des circonstances locales, du travail de l'exploitation, et de la communication avec l'air extérieur, les températures de ces cavités sont quelquefois très inégales à la même profondeur et dans des lieux très voisins; et sans doute elles sont très différentes de celles de la masse même de la terre, à cette profondeur et dans ces mêmes lieux. L'augmentation de profondeur qui répond à un accroissement d'un degré de température dans les mines, varie de 10 à 100 mètres, sans qu'on puisse décider si cette inégalité provient de la différence des climats, de celle des terreins, ou de quelque circonstance locale.

Le moyen le plus direct de connaître la loi plus ou moins rapide de l'accroissement de température de la terre, et de savoir si cet accroissement dépend, toutes choses d'ailleurs égales, de la latitude et de l'élévation des lieux au-dessus du niveau des mers, est de déterminer par le *sondage* les températures qui ont lieu le long de chaque verticale dans diverses parties du globe, à des distances de la surface où les inégalités diurnes et annuelles aient disparu. A ces mêmes distances, l'accroissement de la température fixe dont il a été question dans le n° 185, aura aussi disparu; et quelle que soit la cause de celui que l'on observe à des distances plus grandes, on pourra le supposer, à toutes celles où l'on peut atteindre et beaucoup au-delà, proportionnel à la profondeur. La distance OM ou $x$ du point M à la surface étant donc plus grande qu'une vingtaine de mètres, on représentera la température $u$ par la formule

$$u = f + gx, \qquad (1)$$

(*) *Annales de Physique et de Chimie*, tome XIII, page 183. *Essai sur la température de la Terre*, par M. Cordier, dans le tome VII des *Mémoires de l'Académie*.

dans laquelle $f$ et $g$ sont des quantités indépendantes de $x$ que l'on déterminera par l'expérience pour chaque verticale $Ox$. D'après cette expression de $u$, on formera autant d'équations de condition que l'on aura mesuré de températures le long de cette verticale, correspondantes à des valeurs connues de $x$; et si le nombre de ces équations est assez considérable, on en déduira les valeurs de $f$ et $g$ par la méthode des moindres carrés des erreurs.

Ces deux quantités pourront changer de valeurs par l'effet des variations séculaires de la température; et leur détermination exacte dans le même lieu et à des époques séparées par des très grands intervalles de temps, offrira le moyen de reconnaître par la suite si ces variations ont lieu réellement, et quelle en est l'étendue. Ces mêmes quantités éprouveront aussi de petites variations d'une année à une autre, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut. Elles varieront encore sur la verticale $Ox$, lorsque la nature de la surface aura changé dans une assez grande étendue autour du point O.

Le coefficient $g$ exprimera l'accroissement de température pour chaque mètre de profondeur, en prenant le mètre pour unité de longueur. D'après ce qu'on a vu dans le n° 185, la quantité $f$ surpassera un peu la température moyenne du point O, c'est-à-dire la partie de la température de ce point, indépendante des inégalités diurnes et annuelles. Par la même raison, si la distance $x$ est moindre qu'environ vingt mètres, $f+gx$ surpassera aussi d'une petite quantité la température moyenne du point M. Nous verrons dans la suite comment on peut évaluer ces petites différences, et les comparer aux observations.

(189). Pour exemple de la détermination des deux inconnues $f$ et $g$, je prendrai les observations que M. A. De La Rive a faites dans une campagne près de Genève, à une hauteur de 100 mètres au-dessus du lac, et de près de 500 mètres au-dessus du niveau des mers (*). Les températures ont été observées à des profondeurs qui s'étendaient jusqu'à 225 mètres. Le trou de sonde était rempli, dans sa plus grande partie, par une eau stagnante, sauf le mouvement déterminé dans ce liquide par

(*) *Mémoires de la Société d'Histoire naturelle de Genève*, tome VI.

sa diminution de densité, qui avait lieu de haut en bas, en vertu de l'accroissement de température. On conçoit que l'effet de ce mouvement, s'il était un peu rapide, serait de mélanger les parties du liquide, et de rendre leurs températures moins inégales; mais M. A. De La Rive observe que cette eau étant très bourbeuse, on peut supposer le déplacement de ses molécules assez lent pour que l'eau ait eu le temps de prendre les températures de la terre, aux différentes profondeurs où il les a mesurées au moyen d'un thermomètre plongé dans ce liquide imparfait. Le plus grand nombre de ces températures ont été mesurées deux fois; j'ai pris alors pour la valeur de $u$, la demi-somme des deux valeurs observées, et qui étaient peu différentes l'une de l'autre; il en est résulté dix-huit équations de condition en employant seulement les températures mesurées à des profondeurs d'environ 20 mètres et au-delà. On a déduit de ces équations, par la méthode des moindres carrés (*),

$$f = 10^\circ,140, \quad g = 0^\circ,0307;$$

d'où il résulte qu'aux environs de Genève la température de la terre augmente de 0°,0307 pour chaque mètre de profondeur, ou d'un degré pour $32^m,55$. Il s'ensuit aussi que la température moyenne de la surface doit être un peu au-dessous de 10°,140.

En comparant la formule

$$u = 10^\circ,140 + (0^\circ,0307)\, x,$$

aux dix-huit observations qui ont servi à l'établir, on trouve que les différences sont comprises entre ± 0°,32, et qu'elles n'atteignent qu'une seule fois chacune de ces limites; leur valeur moyenne est au-dessous d'un millième de degré.

(190). M. Arago a proposé un autre moyen de déterminer les températures de la terre à diverses profondeurs, qui consiste à les déduire de celles de l'eau des fontaines jaillissantes, connues sous la dénomination de *puits artésiens*.

(*) Tous les calculs numériques dont les résultats sont donnés dans ce chapitre, ont été faits par le neveu de M. Bouvard, actuellement élève de l'Observatoire.

Dans beaucoup de pays, et particulièrement dans les départemens du nord de la France, il existe des fontaines provenant de grandes nappes d'eau souterraines, alimentées par des sources que l'on suppose très élevées, de manière que cette eau remplit exactement les cavités qui la contiennent, et exerce même sur leurs parois supérieures des pressions très considérables. C'est en vertu de ces pressions que l'eau jaillit et vient surgir à la surface de la terre, lorsque l'on a percé le sol jusqu'à l'une de ces nappes souterraines. Quelquefois ces fontaines se produisent dans des pays plats; pour que les sources alimentaires partent de points très élevés au-dessus des nappes souterraines, et puissent donner naissance à une pression hydrostatique très considérable, on suppose alors qu'elles ont leur origine dans des montagnes très éloignées du lieu où les fontaines sont produites; ce qui n'est pas toujours vraisemblable. Mais on pourrait aussi admettre que le terrein qui recouvre une nappe d'eau intérieure, n'est pas absolument inflexible, auquel cas il exercerait sur la surface de ce liquide une pression qui le ferait jaillir par le trou pratiqué jusqu'à son gissement; et dans cette hypothèse, le lac souterrain pourrait être alimenté par des sources peu élevées ou même inférieures. Quoi qu'il en soit, chaque nappe d'eau, avant le percement, a pris la température de la terre dans le lieu qu'elle occupe; après le percement, si la quantité d'eau jaillissante et celle qui la remplace sont très petites par rapport au volume de la nappe entière, elle conservera cette température pendant le jaillissement; en outre, on peut supposer la vitesse de l'eau jaillissante assez grande pour que le liquide n'ait pas le temps de se refroidir en traversant le terrein supérieur pour arriver à la surface du sol; on peut donc admettre que la température de l'eau parvenue à cette surface, et avant qu'elle se soit mêlée à l'air extérieur, n'est pas sensiblement moindre que celle de la terre à la profondeur d'où cette eau est partie.

Ainsi, à Saint-Ouen, près de Paris (*), la température d'une fontaine jaillissante dont l'eau provient de 66 mètres au-dessous du sol, est de 12°,9. Si on la compare à la température des caves de l'Obser-

(*) *Annuaire du Bureau des Longitudes*, année 1835, page 235.

vatoire, qui est 11°,834 à la profondeur de 28 mètres, il en résulte qu'à Paris l'accroissement de température est de 1°,066 pour une différence de 38 mètres dans les profondeurs; ce qui donne un degré pour 35$^{m}$,65, et 0°,0281 pour la valeur de $g$.

Voici quatorze autres observations de températures correspondantes à des profondeurs connues, que M. Arago m'a communiquées.

*Températures de l'eau des puits artésiens percés dans les environs de Lille à différentes profondeurs.*

| Lieu du Percement. | Profondeur du puits. | Température de l'eau. |
|---|---|---|
| Moulin du Pont...... | 21$^{m}$,4... | 11°,1 |
| Lillers............. | 23, 8... | 11,2 |
| Béthune............. | 32, 8... | 11,7 |
| La Vacherie.......... | 34, 8... | 11,8 |
| Saint-André-Sous-Aire... | 35, 7... | 11,5 |
| Béthune (faubourg).. | 35, 7... | 11,5 |
| Marchiennes......... | 37, 3... | 12,2 |
| Gouchem............ | 38, 7... | 12,1 |
| Béthune (esplanade).. | 38, 9... | 12,0 |
| Entre Lille et Marquette. | 40, 2... | 12,1 |
| Marquette (abbaye)... | 50, 6... | 12,5 |
| Aire................ | 51, 2... | 12,5 |
| Marquette........... | 53, 6... | 12,3 |
| Aire (fort St.-François) | 62, 4... | 13,3 |
| Saint-Venant........ | 100, 5... | 14,1. |

En prenant ces profondeurs, qui sont toutes plus grandes que 20 mètres, et ces températures, pour les valeurs correspondantes de $x$ et de $u$ dans l'équation (1), et déterminant les valeurs de $f$ et $g$ par la méthode des moindres carrés, comme dans l'exemple précédent, on trouve

$$f = 10°,405, \quad g = 0°,0393;$$

ce qui donne 25$^{m}$,459 de profondeur pour chaque degré d'accroissement de température de la terre, au lieu de l'observation, c'est-à-dire dans les environs de Lille. Si l'on compare la formule

$$u = 10^{\circ},405 + (0^{\circ},0393)x,$$

aux quatorze températures observées, on trouve que les plus grandes différences s'élèvent à $-0^{\circ},444$ et $+0^{\circ},307$, et que la différence moyenne n'est pas de 0°,001.

En comparant les accroissemens de température pour chaque mètre de profondeur, 0°,0393 près de Lille, 0°,0307 près de Genève et 0$^{m}$,0281 à Paris, on voit que le premier est plus rapide que le second dans le rapport de 4 à 3, et presque moitié en sus du dernier; ce qui doit tenir à la différence des terreins dans ces trois localités. Si la latitude influe sur les accroissemens de la température de la terre, au-delà de la profondeur où ont lieu les inégalités diurnes et annuelles, les latitudes de Genève, de Paris et de Lille, 46°12′, 48°,50′ et 50°,39′, ne diffèrent point assez pour qu'il en puisse résulter la différence entre les valeurs de $g$ qui ont lieu dans ces trois villes; différences que l'on ne peut pas non plus attribuer à celle de leurs élévations au-dessus du niveau des mers.

La température moyenne de l'eau dans les fossés de la citadelle de Lille est de 10°,7; on peut la prendre pour celle de la surface de la terre, aux environs de cette ville; et l'on voit qu'elle excède un peu la valeur 10°,405 de $f$, tandis qu'elle devrait être, au contraire, un peu moindre. Si l'on supposait $f = 11^{\circ}$, et que l'on déterminât la valeur de $g$ d'après la température 14°,1 du puits de Saint-Venant, le plus profond des environs de Lille, on aurait 0°,0309 pour cette valeur, à très peu près comme à Genève.

(191). L'accroissement de la température de la terre, à mesure que l'on s'enfonce au-dessous de sa surface, après qu'on a dépassé une certaine profondeur, étant bien constaté, on a essayé d'en trouver la cause. Fourier et ensuite Laplace ont attribué ce phénomène à la chaleur d'origine que la terre conserve encore à l'époque actuelle, et qui décroît du centre à la surface, de telle sorte qu'elle soit excessivement élevée vers le centre, mais très peu considérable près de la surface. Les idées de Fourier sur ce sujet important sont expo-

sées dans les extraits de deux Mémoires qu'il a insérés, il y a déjà plusieurs années, dans le tome XIII des *Annales de Physique et de Chimie*, et dans le tome VII des Mémoires de l'Académie; mais il paraît qu'après sa mort, on n'a pas trouvé dans ses papiers les mémoires mêmes où il aurait sans doute développé quelques assertions qu'il a énoncées, sans preuves à l'appui, dans ces deux extraits. Laplace a émis son opinion sur le même sujet, en traitant de la question d'astronomie relative à l'invariabilité du jour sidéral, dans la *Connaissance des Tems* pour l'année 1823, et dans le livre XI de la *Mécanique céleste*.

C'est Laplace qui a fait voir que l'inégalité des températures moyennes extérieures, correspondantes à des points très éloignés sur la surface de la terre, c'est-à-dire, la partie de la température $\zeta$, indépendante du temps, mais qui peut être une fonction quelconque de la longitude et de la latitude du point O, ne saurait jamais produire aucun accroissement ou décroissement sensible de la température de la terre, le long de la verticale $Ox$, à des distances de la surface qui soient très petites par rapport au rayon du globe, et par conséquent, à toutes les profondeurs accessibles; ce qui n'empêche pas qu'à des profondeurs encore plus considérables, l'inégalité dont il s'agit ne donne lieu à de grandes augmentations ou diminutions de température, sur chaque rayon de la terre et jusqu'à son centre. On fait ici abstraction des variations locales dont il a été question dans le n° 181, comme aussi de la petite augmentation de la température moyenne indiquée dans le n° 185; et il suit alors de ce théorème, tel qu'il a été démontré dans n° 176, que l'accroissement général des températures de la terre, observé près de la surface, ne peut dépendre que de la chaleur propre et initiale du globe, ou de causes qui font varier très lentement la température intérieure. L'explication fondée sur la chaleur d'origine, a été généralement adoptée; toutefois, il ne me semble pas qu'on ait eu suffisamment égard aux difficultés qu'elle présente, et que j'exposerai tout à l'heure, après avoir déduit les conséquences principales de cette hypothèse.

(192). En admettant donc l'existence d'une chaleur d'origine, encore sensible à l'époque actuelle près de la surface du globe, nous supposerons néanmoins le temps écoulé depuis cette origine, assez

grand pour que la température de chaque point de la terre, provenant de sa chaleur initiale, soit réduite au premier terme de son expression en série d'exponentielles, et représentée par la formule (23) du n° 171; de manière qu'en désignant par $v$ cette partie de la température du point M, on ait

$$v = \frac{C}{bl}(1 + bx)\, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}; \qquad (2)$$

$a$, $b$, $l$, $x$, ayant les mêmes significations que précédemment (n° 186); le temps $t$ étant compté à partir d'une époque extrêmement éloignée que rien ne pourrait servir à déterminer; et $C$ désignant une constante par rapport à $x$ et $t$, telle que $\frac{Cl^2}{2\pi}$ exprime l'intégrale $\int_0^l fr' \sin\frac{\pi r'}{l}\, dr'$ contenue dans la formule citée.

Cette valeur de $v$ est de la forme

$$v = f + gx;$$

$f$ et $g$ étant des quantités indépendantes de $x$, savoir :

$$f = \frac{C}{bl}\, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}, \qquad g = \frac{C}{l}\, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}.$$

Dans l'hypothèse que nous examinons, cette quantité $g$ doit être la même que dans la formule (1), c'est-à-dire l'accroissement observé de la température moyenne le long de la verticale O$x$, rapporté à l'unité de longueur. La quantité $f$ est celle dont la chaleur initiale de la terre, augmente encore à l'époque actuelle, la température de la surface au point O. Le temps croissant par des différences égales, ces deux quantités $f$ et $g$ décroîtront suivant une même progression géométrique, et extrêmement lente de siècle en siècle, à cause de la grandeur de $l$. Ainsi qu'on l'a remarqué plus haut (n° 184), elles sont liées entre elles par l'équation $g = bf$, qui servira à déterminer $f$ quand les valeurs de $b$ et $g$ seront connues. On a déjà vu comment la valeur de $g$ peut être déterminée par l'observation; on verra par la suite comment on peut aussi obtenir celle de $b$ par la comparaison des inégalités annuelles des températures extérieures et intérieures; la va-

leur de $f$ qui en résultera ne sera qu'une fraction de degré, qui variera avec la position du point O, ou dans le même lieu quand un changement dans l'état de la surface aura fait changer la quantité $b$. En prenant le mètre et l'année pour unités de longueur et de temps, on a à Paris, comme on le verra par la suite,

$$b = 1,05719;$$

on aura aussi, comme on l'a vu plus haut,

$$g = 0^{\circ},0281;$$

d'où l'on déduit

$$f = 0^{\circ},02658;$$

de sorte qu'à Paris la chaleur d'origine de la terre augmenterait la température de la surface, à l'époque actuelle, d'un peu plus d'un quarantième de degré.

La chaleur peut avoir été distribuée primitivement d'une manière quelconque, dans la sphère homogène à laquelle appartient la normale $Ox$; la valeur de $\mathcal{C}$, d'après l'intégrale qu'elle représente, ne dépend que de la température moyenne de tous les points de cette sphère, à l'époque d'où l'on compte le temps $t$; mais cela suffit pour qu'elle puisse être différente, en passant du point O à un autre point $O_{,}$. L'accroissement de température $g$ pourra donc changer aussi, en passant d'une verticale à une autre, non-seulement à cause de la valeur de $a$, qui dépend de la nature du sol, mais aussi à raison du facteur $\mathcal{C}$ de l'expression de $g$. Par conséquent, il n'est pas impossible que cet accroissement de température $g$ soit différent, en des lieux où le terrein est de la même nature. Toutefois, s'il y a eu une époque où la température moyenne d'où dépend la valeur de $\mathcal{C}$, a été la même pour tous les points du globe, ou du moins pour tous les points d'une même région de la terre, ce qui paraît une supposition assez naturelle, et si l'on compte le temps $t$ à partir de cette époque, il en résultera que l'accroissement de la température dans le sens de la profondeur, sera plus ou moins rapide en des lieux différens, selon que la valeur de $a$ y sera moins ou plus grande, et conséquemment, comme on le verra dans la suite, selon que l'amplitude de l'inégalité annuelle de température, y décroîtra plus ou

moins rapidement, à mesure que l'on s'abaisse au-dessous de la surface. C'est un point que l'on pourra facilement vérifier par la comparaison des observations contemporaines.

Dans un même lieu, si la valeur de $g$ devient $g_{\prime}$, lorsque le temps $t$ augmente de $t_{\prime}$, on aura, à la fois,

$$lg = 6e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}, \quad lg_{\prime} = 6e^{-\frac{\pi^2 a^2 (t+t_{\prime})}{l^2}},$$

et, par conséquent,

$$g_{\prime} = ge^{-\frac{\pi^2 a^2 t_{\prime}}{l^2}}.$$

Lorsque l'on aura déterminé la valeur de $a$, d'après l'affaiblissement de l'inégalité annuelle de la température de la terre à mesure que la profondeur augmente, on pourra donc assigner l'époque où l'accroissement de la température moyenne sera réduit à moitié, ou à toute autre partie aliquote de sa valeur actuelle. Ce sera la vérification la plus décisive de l'hypothèse que nous examinons; mais malheureusement elle exige un grand nombre de siècles d'observations, vu la lenteur du décroissement de l'exponentielle qui exprime le rapport de $g_{\prime}$ à $g$. Ainsi, l'on a à Paris, comme on le verra dans la suite,

$$a = 5,11655,$$

en prenant toujours le mètre et l'année pour unités de longueur et de temps; on a aussi

$$l = 6364551;$$

il en résultera donc

$$g_{\prime} = ge^{-\frac{0,6378.t_{\prime}}{100.1000.1000000}};$$

d'où l'on conclut qu'il devrait s'écouler plus de mille millions de siècles pour que la valeur de $g$ fût réduite à moitié.

Lorsqu'il s'agit d'un corps de grandeur infinie et terminé par un plan dont la température initiale était partout la même, l'excès $f$ de la température de la surface sur celle du dehors, et l'accroissement $g$ de la température intérieure, qui ont lieu au bout d'un très long intervalle de temps écoulé depuis l'époque de

l'état initial, sont en raison inverse de la racine carrée de ce temps $t$ (n° 154). Il s'ensuit que la diminution de $g$ pendant un autre temps $t_{\prime}$, très petit par rapport à $t$, sera égale à la valeur actuelle de $g$, multipliée par le rapport $\frac{t_{\prime}}{2t}$, ainsi que Fourier l'a énoncé, à l'égard du refroidissement séculaire de la terre, dans un des deux extraits cités plus haut (*). On ne peut donc pas alors calculer la diminution de $g$ pendant un temps donné $t_{\prime}$, sans faire une hypothèse purement gratuite sur la longueur du temps $t$ primitivement écoulé, et sur l'époque d'où ce temps est compté, comme on en a fait une sur la distribution uniforme de la chaleur à cette époque. Mais la terre ne doit pas être assimilée à un corps dont les dimensions soient infinies; on doit seulement la considérer comme une sphère d'un très grand rayon; et c'est la formule dont nous avons fait usage, qu'il convient d'employer pour exprimer les lois de son refroidissement; ce qui permet de calculer, sur chaque vertical O$x$, le rapport des valeurs de $g$ à deux époques différentes, d'après l'intervalle de temps qui les sépare, et d'après la valeur de la constante $a$ relative à cette droite. En ce qui concerne les inégalités périodiques de la température qui ont lieu près de la surface, on peut bien, sans en changer les lois, supposer infini le rayon de la terre (n° 185); mais il n'en est pas de même, comme on voit, relativement à la partie de la température moyenne qui provient, par hypothèse, de la chaleur initiale du globe.

D'après ce qu'on a vu dans le n° 66, la portion de cette chaleur d'origine que la terre doit perdre à travers chaque unité de surface et pendant une unité de temps, est égale, relativement au point O, au produit $k\frac{dv}{dx}$, ou à $kg$, en vertu des expressions de $v$ et de $g$. Cette perte de chaleur variera généralement avec la position du point O. Pour la calculer, lorsque l'accroissement $g$ de la température intérieure sera connu, il faudra, en outre, faire une hypothèse sur la conductibilité $k$, ou bien sur l'une des quan-

(*) *Annales de Physique et de Chimie*, tome XIII, page 425.

tités $c$ et $p$; d'où l'on déduirait la valeur de $k$ d'après celle de l'une des constantes $a$ ou $b$. Mais on n'a pas d'expériences directes qui fassent connaître la chaleur spécifique $c$ et la conductibilité $k$ pour les matières dont la terre est formée près de sa surface, non plus que la quantité $p$ relative à l'état de cette superficie; quant aux observations des températures près de la surface, comparées aux températures extérieures, elles déterminent seulement les valeurs de $a$ et de $b$, et laissent inconnue l'une des trois quantités $c$, $k$, $p$, du n° 186.

(195). Aucune de ces conséquences de la supposition d'une chaleur d'origine encore sensible à l'époque actuelle près de la surface du globe, n'est une objection contre cette opinion, ni une raison en sa faveur, du moins jusqu'à ce que les rapports numériques qui en résultent, aient été vérifiés ou contredits par les observations de plusieurs siècles. Mais voici les difficultés que cette hypothèse présente, et qui la rendent, ce me semble, peu vraisemblable.

Dans l'hypothèse dont il s'agit, l'accroissement de température que l'on observe à toutes les profondeurs accessibles, aura lieu encore au-delà et jusqu'au centre de la terre; de sorte qu'il en résultera, à de plus grandes distances de la surface, des températures excessivement élevées. Cet accroissement de température étant supposé, par exemple, d'un degré par 30 mètres de profondeur, la température de la terre surpasserait 2000 degrés à une distance de la surface égale au centième du rayon. Il est vrai qu'à de si hautes températures, la chaleur spécifique $c$ et la conductibilité $k$ ne sont plus constantes; il est aussi possible que le rayonnement intérieur ne s'étende plus seulement à des distances insensibles, ni même très petites; et l'équation aux différences partielles du mouvement de la chaleur, n'étant plus linéaire et du second ordre, il peut en résulter que la température de la terre croisse, sur chaque verticale, dans un plus grand ou dans un plus petit rapport que la distance à la surface, quoique cette distance soit toujours une petite partie du rayon. Mais il ne s'agit point ici de calculer la grandeur précise de la température intérieure; il s'agit uniquement de montrer qu'elle serait excessive à moins de

60000 mètres de profondeur. Pour se former une idée de ce qu'elle deviendrait au centre de la terre, on pourra aussi considérer le globe comme un corps homogène, et faire abstraction de l'accroissement de densité des couches terrestres en allant de la surface au centre, qui pourrait rendre plus rapide ou moins rapide l'augmentation de température; or, dans ce cas, l'excès de la température centrale sur celle de la surface, serait égal, d'après le n° 171, à $\beta e^{-\frac{a^2\pi^2 t}{l^2}}$ ou $lg$, en désignant par $\beta$, $l$, $g$, les mêmes quantités que précédemment; par conséquent, si l'on prend toujours le mètre pour unité, et un trentième de degré pour la valeur de $g$, la température centrale surpasserait deux millions de degrés. Au centre et dans la plus grande partie de sa masse, les matières dont la terre est formée, se trouveraient donc à l'état de gaz incandescens, tellement condensés, néanmoins, que leur densité moyenne surpasserait cinq fois celle de l'eau. Pour les contenir à ce degré de compression et de chaleur, il faudrait une force extraordinaire, dont on ne saurait se former aucune idée; et l'on peut douter si la couche solidifiée du globe aurait une épaisseur et une cohésion suffisantes pour résister à l'effort des couches fluides intérieures pour se dilater.

La forme à peu près sphérique de la terre et des planètes, et leur aplatissement aux pôles de rotation, montrent avec évidence que ces corps ont été primitivement fluides, et peut-être à l'état aériforme. En partant de cet état initial, la terre n'a pu se solidifier en tout ou en partie, que par une perte de chaleur provenant de ce que sa température excédait celle du milieu où elle était placée. Mais il n'est pas démontré que la solidification a dû commencer à la surface pour se propager vers le centre, comme le supposerait un état du globe encore fluide dans la plus grande partie de son intérieur. Le contraire me paraît plus vraisemblable. En effet, les parties extrêmes ou les plus voisines de la surface, en se refroidissant les premières, ont dû descendre à l'intérieur, et être remplacées par des parties internes qui sont venues se refroidir à la superficie, pour redescendre ensuite à leur tour. Ce double courant aura entretenu dans la masse une égalité de température, ou du moins, il aura empêché que l'inégalité ne fût, à beaucoup près, aussi grande que dans un corps solide qui se

refroidit par sa surface; et l'on peut ajouter que ce mélange des parties du fluide et le nivellement de leurs températures, auront été favorisés par les oscillations de la masse entière, qui ont eu lieu jusqu'à ce qu'elle soit parvenue à une figure et une rotation permanente. D'un autre côté, la pression excessivement grande, supportée par les couches centrales, a pu déterminer leur solidification beaucoup avant celles des couches plus voisines de la surface, c'est-à-dire que les premières ont pu devenir solides par l'effet de cette extrême compression, à une température égale ou même supérieure à celle des couches moins rapprochées du centre, et soumises en conséquence à une pression beaucoup moindre. L'expérience a fait voir, par exemple, que l'eau à la température ordinaire, étant soumise à une pression de 1000 atmosphères, éprouve une condensation d'environ un vingtième de son volume primitif. Or, concevons une colonne d'eau d'une hauteur égale au rayon du globe, et réduisons sa pesanteur à la moitié de celle que l'on observe à la surface de la terre, afin de la rendre égale à la gravité moyenne qui aurait lieu le long de chaque rayon de la terre dans l'hypothèse de son homogénéité; les couches inférieures de cette colonne liquide éprouveront une pression de plus de trente millions d'atmosphères, ou égale à plus de trente mille fois celle qui réduit l'eau aux $\frac{19}{20}$ de son volume; mais sans connaître la loi de la compression de ce liquide, et quoique nous ignorions comment cette loi peut dépendre de la température, on peut croire néanmoins qu'une si énorme pression réduirait les couches inférieures de la masse d'eau à l'état solide, lors même que leur température serait très élevée. Il semble donc plus naturel de supposer que la solidification de la terre a commencé par le centre et s'est propagée successivement vers la surface : à une certaine température, qui pouvait être extrêmement élevée, les couches les plus voisines du centre se sont d'abord solidifiées, à raison de l'excessive pression qu'elles éprouvaient; les couches suivantes se sont solidifiées ensuite à une température et sous une pression moindres; et ainsi de suite, de proche en proche, jusqu'à la superficie.

En se solidifiant ainsi du centre à la surface, et, si l'on veut, en continuant à se refroidir après être devenue entièrement solide, la terre a pu perdre, depuis long-temps, toute sa chaleur d'origine; de

sorte que l'accroissement de température que l'on observe actuellement près de sa surface soit dû à une autre cause, et ne s'étende pas dans l'intérieur à des profondeurs très considérables; ce qui est effectivement possible, comme on le verra plus loin. Mais je présente ces considérations avec toute la réserve que l'on doit apporter dans des conjectures qui ne peuvent être vérifiées ni par des calculs précis, ni par des expériences directes.

(194). Nous allons actuellement nous occuper de la partie de la température $u$ du point M qui dépend de la température extérieure $\zeta$.

Pour la déterminer d'après les formules générales du n° 175, il faudra que l'expression de $\zeta$ soit réduite en une série de sinus ou cosinus d'arcs proportionnels au temps. Supposons donc que l'on ait

$$\zeta = B + A\cos(mt + \varepsilon) + A'\cos(m't + \varepsilon') + \text{etc.}; \quad (3)$$

B, A, A', etc., $m$, $m'$, etc., $\varepsilon$, $\varepsilon'$, etc., étant des constantes réelles et données. La première B représentera la *constante* de la température extérieure qui répond au point O de la surface de la terre, et qui pourra être une fonction donnée de la longitude et de la latitude de O. Chacun des autres termes de cette valeur de $\zeta$ exprimera une inégalité périodique de la température extérieure correspondante à ce même point O. Les coefficiens A, A', etc., seront les *amplitudes* de ces diverses inégalités; leurs valeurs changeront généralement avec la position du point O; on pourra les supposer positives, en prenant convenablement les angles $\varepsilon$, $\varepsilon'$, etc. Les coefficiens du temps $m$, $m'$, etc., seront aussi supposés positifs. L'inégalité exprimée par A cos$(mt + \varepsilon)$ passera deux fois par toutes ses différentes valeurs, positives ou négatives, et reviendra à une même valeur, dans un intervalle de temps égal à $\frac{2\pi}{m}$, qui sera, en conséquence, la durée de sa période entière; et de même pour les autres inégalités.

Nous prendrons toujours l'année julienne pour l'unité de temps; si A cos$(mt + \varepsilon)$ est une inégalité annuelle, on aura alors $m = 2\pi$; et s'il s'agit d'une inégalité diurne, la valeur de $m$ sera $m = 2\pi(365,25)$. Mais en général, nous appellerons *inégalités annuelles*, toutes celles

dont la période est d'un an ou d'un sous-multiple de l'année, et qui répondent, conséquemment, à $m=2\pi$, $=4\pi$, $=6\pi$, etc.; et nous nommerons *inégalités diurnes*, celles dont la période est d'un jour ou d'un sous-multiple du jour, et pour lesquelles $m$ sera $2\pi(365,25)$, ou le double, le triple, etc., de ce nombre. A l'égard des *inégalités séculaires*, les valeurs de $m$, $m'$, etc., seront extrêmement petites, et égales au nombre $2\pi$ divisé par les nombres d'années compris dans leurs périodes.

Cela posé, la valeur permanente de $u$, correspondante à celle de $\zeta$ sera, d'après le n° cité,

$$\begin{aligned} u = B &+ \frac{bA}{D} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}} \cos\left(mt + \varepsilon - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m} - \delta\right) \\ &+ \frac{bA'}{D_{,}} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m'}} \cos\left(m't + \varepsilon' - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m'} - \delta_{,}\right) \qquad (4) \\ &+ \text{etc.}; \end{aligned}$$

En faisant, pour abréger,

$$b + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m} = D\cos\delta, \quad \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m} = D\sin\delta,$$

et par conséquent,

$$b^2 + \frac{b\sqrt{2m}}{a} + \frac{m}{a^2} = D^2,$$

relativement à la première inégalité, et en désignant par $D_{,}$ et $\delta_{,}$, $D_{,,}$ et $\delta_{,,}$, etc., ce que deviennent $D$ et $\delta$, par rapport aux inégalités suivantes : $e$ représente ici, comme à l'ordinaire, la base des logarithmes népériens.

Ces formules (3) et (4) montrent que la constante B de la température est la même en dehors et à l'intérieur. Elles font aussi voir qu'à chaque inégalité du dehors, il répond à l'intérieur une inégalité qui a la même période, mais une amplitude différente et toujours moindre.

A la surface où l'on a $x=0$, l'amplitude de l'inégalité dont la période est $\frac{2\pi}{m}$, se déduit de l'inégalité correspondante de la température extérieure, en multipliant celle-ci par le rapport de $b$ à

D, c'est-à-dire, par une fraction dont la valeur diminue à mesure que l'inégalité est plus rapide, ou que la valeur de $m$ est plus grande. L'instant de chaque *maximum*, positif ou négatif, d'une inégalité, arrive, lorsque $mt+\varepsilon$ pour l'inégalité extérieure ou $mt+\varepsilon-\delta$ pour l'inégalité de la surface, est un multiple de $\pi$; d'où il résulte que chaque *maximum* de l'inégalité à la surface suit le *maximum* de l'inégalité extérieure, d'un intervalle de temps égal à $\frac{\delta}{m}$, en prenant pour $\delta$ l'angle aigu qui a pour tangente le rapport de $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}$ à $b+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}$.

Le long de la verticale $Ox$, l'amplitude de chaque inégalité diminue en progression géométrique, quand la profondeur $x$ augmente par des différences constantes. Pour une augmentation d'une unité dans la profondeur, l'amplitude de l'inégalité dont la période est $\frac{2\pi}{m}$, diminue dans le rapport de $e^{-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}}$ à l'unité; en sorte que c'est l'inégalité dont la période est la plus courte, qui décroît le plus rapidement; et ce décroissement sera d'autant plus rapide, comme on l'a dit plus haut, que la constante $a$ aura une moindre valeur. Les *maxima* positifs ou négatifs de cette inégalité ont lieu à la profondeur $x$, quand $mt+\varepsilon-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}-\delta$ est un multiple de $\pi$; chaque *maximum* se propage donc uniformément suivant la verticale $Ox$, avec une vitesse égale à $a\sqrt{2m}$ qui est aussi la plus grande pour l'inégalité dont la période est la plus courte.

En considérant toujours l'inégalité dont la période est $\frac{2\pi}{m}$, si l'on appelle X et X′ les grandeurs de son amplitude aux distances $x$ et $x'$ de la surface, on aura

$$X=\frac{bA}{D}\,e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}},\qquad X'=\frac{bA}{D}\,e^{-\frac{x'}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}},$$

et, par conséquent,

$$X'=X\,e^{-\frac{x'-x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}m}},$$

Si l'on suppose $x' > x$, et que l'on désigne par $\lambda$ le retard du *maximum* de cette inégalité à la profondeur $x'$ sur celui qui arrive immédiatement auparavant à la profondeur $x$, on aura aussi

$$\lambda = \frac{x'-x}{a\sqrt{2m}},$$

en supprimant dans cette quantité le multiple de $2\pi$ qu'elle pourra contenir. De ces deux dernières équations, on déduit celle-ci :

$$X' = X e^{-m\lambda},$$

qui ne renferme plus que des quantités mesurables directement pour chaque inégalité, et pourra servir à vérifier la théorie.

Au dehors ou à l'intérieur, la *température moyenne* sera la partie de $\zeta$ ou de $u$, indépendante des inégalités diurnes et annuelles. A l'extérieur, elle se composera de la constante B et des inégalités séculaires de toute espèce dont la valeur de $\zeta$ pourra être affectée. A l'intérieur, elle sera la constante B augmentée de toutes les inégalités séculaires correspondantes à celles de la température extérieure; on y ajoutera, en outre, la valeur de $v$ donnée par la formule (2), pour avoir égard à la chaleur initiale du globe, si l'on suppose qu'elle soit encore sensible à l'époque actuelle près de la surface; on y comprendra aussi la partie de grandeur invariable, qui provient de chaque inégalité périodique de la température extérieure, d'après ce qu'on a vu dans le n° 185. Relativement à l'inégalité $A\cos(mt+\varepsilon)$, j'appellerai $w$ cette partie invariable de $u$; je supposerai que l'inégalité $A\cos(mt+\varepsilon)$ de $\zeta$ ne provienne pas de la température $\mathfrak{F}$, comprise dans la seconde équation (5) du n° 163; la valeur de $w$ se déduira alors de celle de $\gamma v$ du n° 185, en y faisant $q_{,}=0$ et $q=A$; et comme on a, à très peu près $\frac{1}{2}\gamma = 0,001925$, il en résultera

$$w = \frac{(0,001925)b^2A^2}{b^2+\frac{b\sqrt{2m}}{a}+\frac{m}{a^2}}\left(1-\mathcal{G}-e^{-\frac{x\sqrt{2m}}{a}}\right), \quad (5)$$

pour la quantité constante dont l'inégalité $A\cos(mt+\varepsilon)$ de la tem-

pérature extérieure augmentera la température moyenne du point M situé à la distance $x$ de la surface.

(195). Quelle que soit la valeur de $\zeta$ en fonction de $t$, on pourra toujours lui donner la forme du second membre de l'équation (3), en la transformant, si cela était nécessaire, en une intégrale définie double, dont on prendrait ensuite les élémens pour les termes de ce second membre. Mais dans les applications que nous ferons des formules (3) et (4), l'expression de $\zeta$ se composera de parties dont chacune reprendra la même valeur à des époques équidistantes; et cela étant, la réduction de chacune de ces parties en une série de sinus ou de cosinus d'arcs proportionnels au temps, s'effectuera beaucoup plus simplement au moyen de la formule suivante.

Soit $\varphi t$ une fonction donnée; désignons par $\theta$ un intervalle de temps déterminé; et supposons que cette fonction reprenne la même valeur toutes les fois que $t$ augmente de $\theta$, de sorte qu'on ait

$$\varphi(t+\theta)=\varphi t,$$

pour toutes les valeurs de $t$; la fonction $\varphi t$ étant d'ailleurs tout-à-fait arbitraire, continue ou discontinue, entre deux valeurs de $t$, dont la différence est $\theta$. D'après ce qu'on a vu dans le n° 134, on aura

$$\begin{aligned}\varphi t=&\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' dt'\\ &+\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \cos\frac{2\pi t'}{\theta}dt'.\cos\frac{2\pi t}{\theta}+\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \sin\frac{2\pi t'}{\theta}dt'.\sin\frac{2\pi t}{\theta}\\ &+\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \cos\frac{4\pi t'}{\theta}dt'.\cos\frac{4\pi t}{\theta}+\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \sin\frac{4\pi t'}{\theta}dt'.\sin\frac{4\pi t}{\theta}\\ &+\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \cos\frac{6\pi t'}{\theta}dt'.\cos\frac{6\pi t}{\theta}+\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \sin\frac{6\pi t'}{\theta}dt'.\sin\frac{6\pi t}{\theta}\\ &+\text{etc.};\end{aligned}\qquad(6)$$

expression de la même forme que le second membre de l'équation (3).

On fera coïncider ces deux formules en prenant

$$m = \frac{2\pi}{\theta}, \quad m' = \frac{4\pi}{\theta}, \quad m'' = \frac{6\pi}{\theta}, \text{ etc.},$$

$$B = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' dt',$$

$$A\cos\varepsilon = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \cos\frac{2\pi t'}{\theta} dt', \quad A\sin\varepsilon = -\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \sin\frac{2\pi t'}{\theta} dt',$$

$$A'\cos\varepsilon' = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \cos\frac{4\pi t'}{\theta} dt', \quad A'\sin\varepsilon' = -\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \sin\frac{2\pi t'}{\theta} dt',$$

$$A''\cos\varepsilon'' = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \cos\frac{6\pi t'}{\theta} dt', \quad A''\sin\varepsilon'' = -\frac{2}{\theta}\int_0^\theta \varphi t' \sin\frac{6\pi t'}{\theta} dt',$$

etc.;

d'où l'on conclut, en vertu de la formule (4), qu'une partie $\varphi t$ de la température extérieure dont le temps périodique est $\theta$, donnera naissance dans l'intérieur, à une partie constante égale à cette valeur de B, et à une série d'inégalités dont les périodes seront $\theta$, $2\theta$, $3\theta$, etc. Leurs amplitudes décroîtront, puisque ces périodes sont croissantes, et, en outre, parce que les intégrales relatives à $t'$ forment deux séries décroissantes à raison des sinus et cosinus des multiples croissans de la variable qui sont contenus sous les signes $\int$. Il faut aussi ajouter que si la fonction $\varphi t$, quoiqu'elle ne reprenne les mêmes valeurs qu'au bout de chaque intervalle de temps égal à $\theta$, passe néanmoins plusieurs fois, dans cet intervalle, par des valeurs positives et négatives, cette circonstance affaiblira les valeurs de toutes les intégrales précédentes; en sorte qu'il pourra arriver qu'une semblable partie $\varphi t$ de $\theta$, ne donne lieu qu'à de très petites inégalités périodiques dans l'expression de la température intérieure.

La question qui doit nous occuper dans ce qui va suivre, c'est-à-dire la détermination de la température du point M au moyen de la formule (4), se réduira donc maintenant à former, d'après la seconde équation (5) du n° 163, l'expression complète de $\zeta$ en fonction de $t$, résultante de toutes les sources de chaleur d'où dépend la température extérieure. Ces sources diverses sont la chaleur *stellaire*, la chaleur *atmosphérique* agissant par le rayonnement ou par le contact immédiat, et la chaleur *solaire*. Nous allons les considérer successivement, en entrant dans tous les détails nécessaires sur la nature et l'influence de chacune d'elles.

(196). Si l'on mène par le point O de la surface de la terre, une droite OE, suivant une direction quelconque et indéfiniment prolongée, cette droite finira toujours par rencontrer une étoile visible ou invisible; la terre est donc placée dans un espace terminé par une enceinte fermée de toutes parts, et qu'on suppose rempli d'un éther excessivement rare; et quoique les dimensions de cette enceinte formée d'étoiles, soient immenses, cela n'empêcherait ni ne diminuerait son action calorifique sur le globe terrestre, si l'éther n'absorbait nullement la chaleur qui le traverse; car dans le vide ou dans un milieu non absorbant, l'intensité de la chaleur rayonnante décroissant suivant la raison inverse du carré de la distance, il s'ensuit que l'action totale d'une enceinte fermée sur tous les corps contenus dans l'espace qu'elle termine, est indépendante de sa grandeur absolue. Si donc on fait d'abord abstraction du pouvoir absorbant de l'éther, il y aura un échange continuel de chaleur entre la terre et la première étoile que va rencontrer la droite OE, et il en résultera, à chaque instant, une augmentation ou une diminution de la température du point O, selon qu'elle sera plus petite ou plus grande que celle de l'étoile. Mais si O et OE sont le sommet et l'axe d'un cône extrêmement aigu, la portion de l'enceinte stellaire interceptée par ce cône comprendra, vu la distance excessivement grande des étoiles à la terre, un nombre immense d'étoiles; elles n'auront sans doute pas toutes une même température; il y a lieu de croire que celles qui sont lumineuses, ont, comme le soleil, une très haute température, et que celles qui ne le sont pas, s'il en existe, ont une température beaucoup moins élevée; cela étant, nous prendrons la moyenne des températures de toutes ces étoiles pour la température de cette portion de l'enceinte correspondante à la direction OE, et nous la représenterons par $s$.

Si la valeur de $s$ est supposée la même suivant toutes les directions et pour tous les points de la surface du globe, l'enceinte stellaire devra être considérée comme ayant partout la même température; quelles que soient sa figure et les différentes matières des étoiles dont elle est formée, si l'on fait toujours abstraction du pouvoir absorbant de l'éther, un thermomètre placé en un lieu quelconque de l'espace borné par cette enceinte, marquera partout la température $s$, d'après ce

qu'on a vu dans le chapitre II; et quel que soit aussi l'état calorifique de la terre à une époque déterminée, elle prendra, au bout d'un temps convenable, cette même température qui s'ajoutera, dans toute sa masse, à celle que produit la chaleur solaire, et dont nous déterminerons les lois par la suite. Mais l'hypothèse d'une valeur de $s$ qui soit égale pour toutes les régions du ciel, paraîtra hors de toute vraisemblance, si l'on observe que les étoiles doivent avoir une chaleur propre, entretenue par des causes particulières, comme celle du soleil, et qui ne tend pas à l'égalité par l'effet de leur rayonnement mutuel. Il ne semble pas non plus qu'on puisse supposer l'éther entièrement dénué de la faculté d'absorber la chaleur; car si cela était, la température en chaque point de l'espace, provenant de la chaleur stellaire, serait extrêmement élevée et comparable à celle du soleil, à moins que le nombre des étoiles incandescentes ne fût extrêmement petit par rapport à celui des étoiles opaques. Or, soit à cause de l'inégalité probable des valeurs de $s$ qui répondent à deux directions différentes OE et OE', soit parce que la chaleur stellaire sera venue, suivant ces deux directions, d'étoiles inégalement éloignées de la terre, et aura, par conséquent, éprouvé des absorptions différentes en traversant l'éther, on est conduit à supposer que la quantité de chaleur stellaire qui parvient à la terre dans une direction déterminée, varie avec cette direction, suivant une loi qui est, à la vérité, tout-à-fait inconnue. On expliquera plus loin comment cette variation pourrait être vérifiée par des expériences directes.

En admettant donc cette hypothèse, il en résultera qu'un thermomètre transporté successivement en différens lieux de l'espace, marquera des températures qui pourront être très inégales. La température qu'il indiquera en chaque point sera celle de l'espace en ce point. Pour qu'elle change sensiblement d'un point à un autre, il faudra, vu les excessives dimensions de l'enceinte stellaire, qu'ils soient séparés l'un de l'autre par une immense distance. Ainsi, les distances des étoiles à la terre étant extrêmement grandes, eu égard même au diamètre de l'orbite de la terre, il s'ensuit que pendant sa révolution autour du soleil, la terre se meut dans un espace dont la température est partout la même, ou sans aucune différence appréciable; en sorte que la chaleur stellaire ne peut donner lieu à aucune inégalité annuelle dans la tem-

pérature du globe. Mais il n'en est plus de même lorsque l'on considère le mouvement de notre système planétaire dans l'espace : pendant ce mouvement, la terre s'approche de certaines étoiles, s'éloigne des autres, et se trouve en communication calorifique avec de nouveaux astres, soit à cause de leurs propres déplacemens, soit à raison du mouvement de notre système; sur la route que suit la terre, la température de l'espace peut être très différente en des points séparés par de grandes distances, et auxquels la terre ne parvient qu'après de longs intervalles de temps.

Cela posé, concevons que la terre, dans ce mouvement, soit restée assez long-temps dans une partie de l'espace pour qu'elle en ait pris la température dans toute sa masse. Si elle passe ensuite dans une autre région dont la température soit moins élevée, elle se refroidira, et jusqu'à ce que sa masse entière ait atteint cette nouvelle température, la sienne croîtra de la surface au centre. Le contraire aura lieu lorsqu'elle passera dans une région dont la température sera plus élevée que celle qu'elle avait prise d'abord; mais si des températures de l'espace, alternativement plus basses et plus hautes, se succèdent à des intervalles de temps qui ne soient pas assez grands pour que la masse entière du globe puisse prendre chaque nouvelle température, il en résultera des accroissemens ou des décroissemens plus ou moins rapides de la température, et qui ne s'étendront que jusqu'à une certaine distance de la surface. Or, ces considérations fournissent une explication très naturelle et très simple de l'accroissement de température que l'on observe actuellement à toutes les profondeurs accessibles : il résulterait donc de ce que la terre, par suite du mouvement de notre système planétaire, se trouve maintenant dans une partie de l'espace dont la température est moins élevée que celle de la région où elle se trouvait à une époque antérieure; le globe terrestre pourrait alors être comparé à un corps d'un très grand volume, que l'on aurait transporté de l'équateur vers le pôle, dans un temps trop court pour qu'il eût pu se refroidir entièrement, et qui présenterait, en conséquence, un accroissement de température en s'éloignant de sa surface, qui ne s'étendrait pas jusqu'à ses couches centrales. Ainsi, l'augmentation de la température moyenne sur chaque verticale, à mesure que l'on s'éloigne de la surface, peut s'expliquer,

comme nous l'avons dit plus haut, sans recourir à l'hypothèse d'une chaleur propre du globe, provenant de son état initial, et encore sensible près de sa superficie; hypothèse qui entraînerait la conséquence d'une température intérieure tout-à-fait invraisemblable, par son excessive élévation, et à laquelle on ne serait forcé d'avoir recours que s'il était impossible de rendre compte du phénomène d'aucune autre manière.

(197). Les variations de la température de l'espace sur la route de la terre dans le mouvement du système planétaire, nous sont absolument inconnues; elles peuvent s'élever à de grands nombres de degrés, en plus ou en moins; et nous savons seulement que la température de la partie de l'espace où la terre se trouve par suite de ce mouvement, ne peut augmenter ou diminuer sensiblement qu'après de longues suites de siècles. Néanmoins, afin de montrer, avec plus de précision, leur influence sur la température de la terre, je prendrai un exemple tout-à-fait arbitraire, et je supposerai qu'en vertu de ces variations de la température de l'espace, la valeur de $\zeta$ renferme un terme périodique, pour lequel je prendrai le second terme $A\cos(mt+\varepsilon)$ de la formule (3).

Pour fixer les idées, supposons qu'à raison de ce terme la température extérieure $\zeta$ diminue depuis $+100°$ jusqu'à $-100°$, et augmente ensuite depuis $-100°$ jusqu'à $+100°$, en un million d'années; en sorte que son oscillation totale, provenant d'une pareille variation dans la température de l'espace, soit de 200° dans cet intervalle de temps. En désignant par $\tau$ la valeur de $t$ qui répond à l'époque du *maximum* positif de cette inégalité séculaire, on fera donc

$$A = 100°, \quad \varepsilon = -m\tau, \quad m = \frac{2\pi}{1000000};$$

et si l'on représente par $u_{,}$ la partie de la température $u$ du point M, relative à cette inégalité, c'est-à-dire, la valeur correspondante du second terme de la formule (4), nous aurons

$$u_{,} = 100°.e^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{1000.a}}\left\{\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{1000.ab}\right)\cos\left[\frac{2\pi(t-\tau)}{1000000}-\frac{x\sqrt{\pi}}{1000.a}\right] + \frac{\sqrt{\pi}}{1000.ab}\sin\left[\frac{2\pi(t-\tau)}{1000000}-\frac{x\sqrt{\pi}}{1000.a}\right]\right\}, \quad (7)$$

en observant que l'on a, à très peu près,

$$\frac{b\cos\delta}{D}=1-\frac{\sqrt{\pi}}{1000.ab},\qquad \frac{b\sin\delta}{D}=\frac{\sqrt{\pi}}{1000.ab}.$$

Tant que la profondeur $x$ sera très petite par rapport à la constante $\frac{1000.a}{\sqrt{\pi}}$ dont la valeur est d'environ 3000 mètres, d'après celle de $a$ que l'on a citée précédemment, savoir

$$a=1,11655,$$

on pourra développer l'exponentielle et les sinus et cosinus que renferme la formule (7), suivant les puissances de la fraction $\frac{x\sqrt{\pi}}{1000.a}$; d'où il résultera, à très peu près,

$$u_{,}=100^{\circ}\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{1000000}$$
$$+1^{\circ}\left[\sin\frac{2\pi(t-\tau)}{1000000}-\cos\frac{2\pi(t-\tau)}{1000000}\right]\left(\frac{1}{b}+x\right)\frac{\sqrt{\pi}}{10.a};$$

en sorte qu'il y aura, près de la surface de la terre, un accroissement ou un décroissement de température proportionnel à la profondeur $x$, selon que la quantité comprise entre les crochets dans cette expression de $u_{,}$ sera positive ou négative. Si, par exemple, l'inégalité de la température extérieure est parvenue maintenant à son *maximum* négatif, c'est-à-dire, si l'on suppose que l'on ait actuellement

$$t=\tau+\tfrac{1}{2}(1000000),$$

il en résultera

$$u_{,}=-100^{\circ}+1^{\circ}\left(\frac{1}{b}+x\right)\frac{\sqrt{\pi}}{10.a},$$

et, par conséquent, un accroissement de température d'un degré pour un nombre de mètres égal à $\frac{10.a}{\sqrt{\pi}}$, ou de $0^{\circ},0275$ par chaque mètre de profondeur; ce qui serait peu différent de l'accroissement que l'on observe à Paris. Mais quand la distance $x$ aura cessé d'être très petite par rapport à $\frac{10.a}{\sqrt{\pi}}$, l'accroissement de température cessera aussi d'être

proportionnel à $x$, et la valeur de $u_{\prime}$ devra être calculée au moyen de la formule (7).

En y mettant pour $t$ sa valeur précédente, elle se réduira à

$$u_{\prime} = -100^{\circ}.e^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{1000.a}} \cos \frac{x\sqrt{\pi}}{1000.a}.$$

Le *maximum* de cette quantité répondra à

$$\frac{x\sqrt{\pi}}{1000.a} = \frac{3}{4}\pi,$$

et aura pour valeur

$$u_{\prime} = \frac{100^{\circ}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3}{4}\pi} = 6^{\circ},702;$$

de sorte qu'il excédera d'à peu près $107^{\circ}$ la valeur $u_{\prime} = -100^{\circ}$ qui répond à la surface. La profondeur à laquelle il aura lieu, sera

$$x = 750.a\sqrt{\pi} = 6802;$$

au-delà d'une distance à la surface d'à peu près 7000 mètres, la valeur de $u_{\prime}$ décroîtra donc continuellement; et à une profondeur d'environ 60000 mètres, par exemple, elle se réduira à moins d'un centième de degré; ce qui fait voir qu'à cette profondeur, qui n'est pas encore un centième du rayon de la terre, l'inégalité de la température de l'espace que nous avons supposée, n'influerait plus sensiblement sur la température intérieure.

Si l'on fait $x = 0$ dans la formule (7), on aura la valeur de $u_{\prime}$ relative à la surface et à une époque quelconque de cette inégalité. Faisons ensuite, successivement,

$$t = \tau, \quad t = \tau + 500000;$$

les valeurs correspondantes de $u_{\prime}$ seront

$$u_{\prime} = 100^{\circ} - \frac{1^{\circ}.\sqrt{\pi}}{10.ab}, \quad u_{\prime} = -100^{\circ} + \frac{1^{\circ}.\sqrt{\pi}}{10.ab};$$

par conséquent, si l'on suppose, comme plus haut, que la seconde valeur de $t$ réponde à l'époque actuelle, il en résultera que 500000 ans

auparavant, la température de la surface surpassait de $200^\circ - \frac{2^\circ.\sqrt{\pi}}{10.ab}$, ou d'à peu près 200°, celle qui a lieu maintenant; ce qui rendait la terre inhabitable. Mais en prenant

$$t = \tau + 500000 \pm 50000,$$

et en conservant seulement, pour abréger, le premier terme de la valeur de $u_{,}$, on aura

$$u_{,} = -100^\circ.\cos 18^\circ = -95^\circ;$$

d'où il résulte que 50000 ans avant et 50000 ans après l'époque actuelle, la température de la surface n'excéderait celle qui a lieu aujourd'hui que d'environ 5°; différence qui n'empêcherait pas l'espèce humaine de pouvoir exister sur la terre.

En général, pour que l'inégalité de la température de l'espace sur la route de la terre puisse produire à une époque déterminée, comme celle où nous vivons, un accroissement ou un décroissement sensible de la température moyenne du globe, près de la surface, il est nécessaire qu'à des époques séparées de celles-là par des milliers de siècles, la température de la surface ait été très supérieure ou très inférieure à celle que l'on observe à cette même époque.

(198). L'inégalité des quantités de chaleur stellaire que la terre reçoit à chaque instant des différentes parties du ciel, pourra être rendue sensible par l'expérience que nous allons indiquer.

Pendant une belle nuit, où l'air est calme, le ciel serein et l'atmosphère sans nuages, supposons qu'un miroir concave POQ (fig. 15) soit placé un peu au-dessus de la surface de la terre. Soient F son foyer, et OFE son axe indéfiniment prolongé. Le point O est fixe; le miroir peut tourner en tous sens autour de ce point, de sorte que son axe puisse être dirigé successivement vers toutes les régions du ciel au-dessus de l'horizon; un thermomètre très sensible est placé au foyer F. Afin de simplifier la question, nous supposerons les bords du miroir assez élevés pour interrompre la communication calorifique du thermomètre avec la surface de la terre; nous supposerons aussi qu'on ait placé à une petite distance du foyer, un corps concave G qui interrompe également la communication directe de l'instrument avec les

étoiles et avec l'atmosphère, mais dont l'étendue soit assez petite pour diminuer le moins possible, la quantité de chaleur stellaire et atmosphérique qui viendra tomber sur la surface du miroir; on supposera enfin le pouvoir émissif du miroir à peu près nul, et conséquemment, sa réflexibilité parfaite.

Le miroir renverra donc au thermomètre, sans y rien ajouter, toute la chaleur rayonnante qui viendra tomber sur une partie de sa surface, parallèlement à son axe OFE; or, si l'on conçoit un cône qui ait son sommet au point F et la circonférence de sa base sur la surface du miroir, et qui comprenne tous les rayons réfléchis vers ce point; puis un cylindre indéfiniment prolongé vers le ciel, ayant même base que le cône et pour axe la droite OFE, il est évident que toute la chaleur réfléchie proviendra de la colonne atmosphérique et de la portion du ciel comprise dans ce cylindre; en sorte qu'il y aura, par l'intermédiaire du miroir, échange continuel de chaleur, soit entre le thermomètre et toutes les molécules qui font partie de cette colonne, soit entre cet instrument et les étoiles qui appartiennent à cette petite portion du ciel. En vertu de cet échange de chaleur, la température marquée par le thermomètre focal variera avec le temps; je la désignerai par $v$ au bout du temps quelconque $t$; et pendant l'instant $dt$, l'augmentation de chaleur de ce corps d'un très petit volume, qui résultera de l'échange dont il s'agit, pourra être exprimé par

$$\alpha(q - v)dt + \beta(s - v)dt,$$

d'après ce qu'on a vu dans le n° 36. On représente ici par $q$ une certaine température dépendante de celles de toutes les molécules d'air comprises dans la colonne atmosphérique, et qu'on peut regarder comme une moyenne de ces températures inégales; par $\alpha$ une quantité qui dépendra du nombre de ces molécules, de leurs densités, de leurs pouvoirs émissifs, et de l'absorption que la chaleur aura éprouvée en allant de chaque molécule au thermomètre; par $s$ la température stellaire, correspondante à la direction OE (n° 196); par $\beta$ une quantité dépendante de l'absorption de la chaleur, soit dans l'éther, soit dans toute la longueur de la colonne atmosphérique; les deux coefficiens $\alpha$ et $\beta$ sont, en outre, proportionnels au pouvoir absorbant du thermomètre d'après l'état de sa superficie, et à l'étendue de la surface ré-

fléchissante ou au carré de la distance focale OF; on les regardera comme indépendans des températures.

Si l'on désigne par $\eta$ la température de l'air en contact avec le thermomètre, ce corps éprouvera aussi pendant l'instant $dt$, une diminution de chaleur exprimée par le produit $\gamma(v - \eta)dt$, dont le facteur $\gamma$ est proportionnel à l'étendue de sa surface et au pouvoir refroidissant du fluide. L'augmentation de chaleur, positive ou négative, qu'éprouvera le thermomètre pendant cet instant $dt$, sera donc

$$\alpha(q - v)\,dt + \beta(s - v)\,dt - \gamma(v - \eta)\,dt;$$

quantité qu'il faudra égaler à zéro, pour déterminer la température finale à laquelle l'instrument parviendra plus ou moins rapidement, et que nous désignerons par $u$; par conséquent, nous aurons

$$u = \frac{\alpha q + \beta s + \gamma \eta}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Les deux quantités $\gamma$ et $\eta$ ne changeront pas avec la direction de l'axe OE. Si l'on fait tourner cette droite autour de la verticale O$z$, sans que l'angle EO$z$ varie, la longueur et la constitution de la colonne atmosphérique dont cette droite OE est l'axe, resteront les mêmes; et, conséquemment, les trois quantités $\alpha$, $\beta$, $q$, ne varieront pas non plus. Mais si la température $s$ varie sensiblement avec la direction de la droite OE à laquelle elle répond, la température $u$ variera également; de sorte que si l'on représente par $u'$ et $s'$ ce que $u$ et $s$ deviennent pour une seconde direction de OE, qui fait le même angle que la première avec la verticale, on aura

$$u' = \frac{\alpha q + \beta s' + \gamma \eta}{\alpha + \beta + \gamma};$$

et de cette équation, jointe à la précédente, on déduira

$$s' - s = \frac{1}{\beta}(\alpha + \beta + \gamma)(u' - u).$$

Toutes choses d'ailleurs égales, les différences $s' - s$ et $u' - u$ seront donc proportionnelles l'une à l'autre; la première surpassera toujours la seconde; et si la seconde est sensible, on en conclura, avec certitude, que la température stellaire $s$ n'est pas égale dans toutes les régions du ciel. Telle est donc l'expérience que je propose pour

décider cette question dont on a vu toute l'importance dans la théorie des températures de la terre. C'est aux physiciens à juger si elle est praticable, et quel succès on en peut espérer. On pourrait remplacer le thermomètre placé au foyer du miroir par l'instrument beaucoup plus sensible, dont M. Melloni a fait usage dans ses belles expériences sur la transmission de la chaleur rayonnante à travers différentes matières, diaphanes ou opaques (*).

(199). Cette expérience est, au reste, tout-à-fait analogue à celle que l'on a déjà tentée pour rendre sensible l'échange de chaleur rayonnante entre la terre et l'atmosphère, et l'inégalité du rayonnement des diverses colonnes atmosphériques, à raison de leur différence de longueur.

Supposons, en effet, que l'on change l'angle EOz que fait l'axe OE du miroir avec la verticale Oz; les températures $u$, $q$, $s$, et les coefficiens $\alpha$ et $6$ changeront aussi; et si l'on désigne par $u_{,}$, $q_{,}$, $s_{,}$, $\alpha_{,}$, $6_{,}$, ce que deviennent ces cinq quantités, on aura

$$u_{,}=\frac{\alpha_{,}q_{,}+6_{,}s_{,}+\gamma n}{\alpha_{,}+6_{,}+\gamma}.$$

Dans l'expérience que nous rappelons, on emploie un très fort miroir concave, dont la distance focale OF est fort grande par rapport au rayon du thermomètre; ce qui permet de négliger $\gamma$ dans $u$ et $u_{,}$, relativement à $\alpha$ et $6$, ou à $\alpha_{,}$ et $6_{,}$; on suppose aussi implicitement que le rapport de $6_{,}$ à $\alpha_{,}$ reste le même que celui de $6$ à $\alpha$; au moyen de quoi l'on a plus simplement

$$u=\delta q+(1-\delta)s,\quad u_{,}=\delta q_{,}+(1-\delta)s_{,},$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{\alpha}{\alpha+6}=\frac{\alpha_{,}}{\alpha_{,}+6_{,}}=\delta.$$

Mais nous ignorons si cette fraction $\delta$ diffère peu de l'unité; nous

(*) Depuis l'impression du n° 15 de cet ouvrage, où sont mentionnées les premières recherches de M. Melloni, l'auteur les a continuées et a été conduit à de nouveaux résultats, non moins intéressans que ceux qu'il avait d'abord obtenus. L'ensemble de ses travaux a été l'objet d'un excellent rapport que M. Biot a fait à l'Académie, et que l'on trouvera en note à la fin de cet ouvrage.

ne savons pas non plus si les températures $s$ et $s_{,}$, dont les grandeurs absolues nous sont inconnues, peuvent être négligées par rapport à $q$ et $q_{,}$; par conséquent, les équations précédentes ne sauraient faire connaître les valeurs de $q$ et $q_{,}$, d'après les températures observées $u$ et $u_{,}$. Toutefois, en ne négligeant pas $s$ et $s_{,}$, mais en faisant seulement abstraction de la différence $s_{,}-s$, on aura

$$u_{,}-u=\delta(q_{,}-q);$$

ce qui montre que les deux quantités $q_{,}-q$ et $u_{,}-u$ seront de même signe et proportionnelles l'une à l'autre.

D'après les températures moyennes que $q$ et $q_{,}$ représentent, il est aisé de concevoir que la différence $q_{,}-q$ sera positive et atteindra son *maximum* relativement à toutes les directions de la droite OE, lorsque la direction à laquelle répond $q_{,}$ sera horizontale, et qu'au contraire $q$ répondra à la direction verticale. Dans ce cas, la différence $u_{,}-u$ donnée par l'observation, doit donc être aussi positive et la plus grande possible. L'expérience fait voir, effectivement, que la température marquée par le thermomètre focal s'élève quand l'axe du miroir passe de la verticale à une direction horizontale; et il paraît qu'alors la différence $u_{,}-u$ des deux températures est assez grande pour être facilement mesurée. On attribue à Wollaston cette observation intéressante, qui mériterait bien d'être répétée.

L'expérience fait aussi voir que la température $u$, correspondante à la direction verticale de l'axe du miroir, est notablement inférieure à celle qui est marquée dans le même lieu et au même instant par un autre thermomètre exposé au rayonnement de la terre et de l'atmosphère entière; de sorte que la température $u$ s'élève quelquefois de plusieurs degrés, dès qu'on supprime le miroir POQ et le corps G; ce qui tient à ce que la température de la terre, même pendant la nuit, et la température moyenne de toute l'atmosphère, sont l'une et l'autre supérieure, à la température moyenne de la colonne d'air verticale.

(200). En admettant l'inégalité de température des différentes régions du ciel, il en résulte que la quantité de chaleur stellaire qui tombe à chaque instant, suivant toutes les directions, sur un élément de la surface du globe, change avec cet élément, et qu'en un même lieu elle change aussi avec l'heure de la journée.

Ainsi, en menant par le point O (fig. 14), un plan tangent à la surface de la terre, on voit que l'élément qui répond à ce point ne recevra de chaleur stellaire que des étoiles situées d'un seul côté de ce plan indéfiniment prolongé. La partie du ciel avec laquelle cet élément sera en communication calorifique et la quantité de chaleur qu'il en recevra, changeront donc aux différentes heures du jour sidéral, pour redevenir les mêmes au bout de chaque intervalle de temps égal à un jour entier; par conséquent, il en résultera une inégalité diurne dans la température de la terre près de sa surface; son amplitude, comme celle de toute autre inégalité diurne, décroîtra très rapidement à partir du point O sur la verticale $Ox$; mais, de plus, si la température stellaire passe un assez grand nombre de fois, ce qui paraît vraisemblable, au dessus et au-dessous de sa valeur moyenne pendant la durée du jour entier, l'amplitude des inégalités diurnes à la surface même sera très affaiblie par ces alternatives (n° 195); par conséquent, la différence de température des diverses régions du ciel, qui ne peut déjà donner lieu à aucune inégalité annuelle dans les températures de la terre, n'y produira non plus que de très faibles inégalités diurnes, dont on pourra faire abstraction.

Deux élémens de la surface du globe, situés sur un même parallèle, recevront des quantités égales de chaleur stellaire pendant la durée entière d'un jour sidéral; mais il n'en sera plus de même pour deux élémens qui répondront à des latitudes différentes, et, particulièrement, quand l'une sera australe et l'autre boréale. Une partie des étoiles qui enverront de la chaleur à l'un des deux élémens, n'en enverront jamais à l'autre; ce qui aura lieu, par exemple, pour toutes les étoiles à l'égard des élémens situés aux deux pôles. Il suit de là que les quantités de chaleur stellaire reçues pendant chaque jour sidéral, par les surfaces entières des deux hémisphères, pourront être différentes l'une de l'autre; le cas de leur égalité serait même tout-à-fait invraisemblable; et de leur différence, il résultera que les températures moyennes des deux hémisphères devront être inégales, toutes choses d'ailleurs égales.

On suppose, en général, la température moyenne de l'hémis-

phère austral inférieure à celle de notre hémisphère; la différence pourrait donc provenir, en partie, de ce que le premier hémisphère recevrait moins de chaleur stellaire que le second. Ces deux parties du globe reçoivent pendant chaque année des quantités à peu près équivalentes de chaleur solaire; mais elles n'absorbent pas cette chaleur en même proportion, à cause de la nature différente de leurs surfaces, résultant de ce que la partie recouverte des eaux de la mer est plus grande au-delà de l'équateur que de notre côté; et par la même raison, le pouvoir rayonnant n'est pas non plus le même pour les deux hémisphères. Cette différence de l'état de leurs superficies, peut aussi contribuer à l'inégalité de leurs températures moyennes; car on sait qu'en général, les corps exposés aux rayons du soleil s'échauffent inégalement, quand leurs surfaces ne sont pas de la même nature. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

(201). Après tous ces détails sur la chaleur stellaire, nous devrions maintenant nous occuper de la seconde source de chaleur d'où dépend la température extérieure, c'est-à-dire, de la chaleur atmosphérique (n° 195); mais auparavant, il est nécessaire de considérer la température marquée par un thermomètre exposé à l'air libre et situé dans l'atmosphère, à une hauteur quelconque au-dessus de la surface de la terre.

On supposera que la boule du thermomètre soit une sphère d'un très petit rayon, que l'on représentera par $\epsilon$. Ce petit corps prendra à chaque instant la même température dans toute sa masse; au bout du temps $t$, on désignera par $v$ cette température variable. On supposera aussi que sa surface soit partout dans le même état. La couche d'air en contact avec cette surface, conservera, en se renouvelant sans cesse, une température constante qui sera désignée par $\varkappa$, comme plus haut. La quantité de chaleur enlevée par cet air au thermomètre pendant l'instant $dt$, aura alors $4\pi\epsilon^2\gamma(v - \varkappa)dt$ pour expression; $\gamma$ étant la mesure du pouvoir refroidissant de ce fluide.

Soit T (fig. 16) le centre de cette boule; de ce point T, abaissons une perpendiculaire sur la surface AOB de la terre, qui la rencontre en O; et faisons TO $= h$. Appelons $l$ le rayon CO de la terre. La hauteur $h$ sera toujours très petite par rapport à $l$; mais

on supposera que cette élévation du thermomètre soit aussi toujours très grande par rapport à son rayon $\varepsilon$; en sorte que l'instrument ne sera ni en contact avec la surface de la terre, ni même à une hauteur $h$ de quelques millimètres, si le rayon $\varepsilon$ est, par exemple, d'un millimètre.

Concevons un cône tangent à la fois à la surface de la terre et à celle du thermomètre, qui aura son sommet D au-dessus du point T sur le prolongement de la verticale OT, et qui sera représenté par ADB dans la figure. Soit K un point de l'atmosphère, situé en dehors de ADB, à une distance du point T assez grande par rapport à $\varepsilon$ pour que l'on puisse regarder à très peu près comme un cylindre, le cône tangent à la surface du thermomètre et qui aurait son sommet au point K. On pourra en même temps considérer la portion de cette surface comprise dans ce cône, comme étant aussi à très peu près égale à la moitié de la surface entière, ou à $2\pi\varepsilon^2$. Il y aura échange continuel de chaleur entre cet hémisphère et la portion d'atmosphère, de grandeur insensible, qui répond au point K; et de cet échange, il résultera pour le thermomètre une augmentation de chaleur pendant l'instant $dt$, que l'on pourra représenter par le produit $2\pi\varepsilon^2 \mathcal{C}\sigma$ P$(v - \Pi)\, dt$, en désignant par $\sigma$ le volume de la petite portion d'air que l'on considère, par $\Pi$ sa température, par P une quantité dépendante de sa densité, de son pouvoir émissif et de l'absorption que la chaleur éprouve dans le trajet de K à cet instrument, enfin par $\mathcal{C}$ une constante donnée, dont la valeur est proportionnelle au pouvoir absorbant de sa surface. Donc en représentant par $2\pi\varepsilon^2\mathcal{C}\mathrm{E}dt$, l'augmentation totale de chaleur du thermomètre, provenant de l'échange avec toutes les molécules de l'atmosphère, la valeur de E sera donnée par l'intégrale de la quantité $\sigma$P $(v - \Pi)$, où l'on remplacera $\sigma$ par l'élément différentiel du volume, et que l'on étendra à tous les points K situés en dehors du cône ADB, en négligeant pour plus de simplicité, la portion d'air comprise entre AOB et l'instrument, qui est toujours très petite par rapport à la partie supérieure à ADB.

Si l'on désigne par $r$ le rayon vecteur TK du point K, par $\theta$ l'angle $z$TK qu'il fait avec la verticale T$z$, et par $\psi$ l'angle compris entre le

plan de ces deux droites et un plan fixe mené par la seconde, on aura

$$\sigma = r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi.$$

Les deux quantités P et Π seront des fonctions de $r$ et $\theta$, qui dépendront aussi de l'angle $\psi$, lorsque le soleil étant sur l'horizon ou très peu au-dessous, échauffera et dilatera inégalement les parties de l'atmosphère autour de Tz. Soient encore $\lambda$ une fonction de $\theta$ qui représentera la longueur de l'atmosphère suivant la direction TK, et $\frac{1}{2}\pi + \delta$ l'angle constant zTA ou zTB. Les limites de l'intégrale triple de $\sigma P(v - \Pi)$ seront $r = 0$ et $r = \lambda$, $\theta = 0$ et $\theta = \frac{1}{2}\pi + \delta$, $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$; par conséquent, si l'on fait, pour abréger,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi+\delta}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\lambda} Pr^2 dr\right)\sin\theta d\theta d\psi = p,$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi+\delta}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\lambda} P\Pi r^2 dr\right)\sin\theta d\theta d\psi = p\varpi,$$

la valeur de E sera

$$E = p(v - \varpi),$$

et dans cette valeur, $\varpi$ exprimera une température moyenne de toutes les molécules atmosphériques situées au-dessus du cône ADB. L'angle $\delta$ sera toujours très petit; quand la hauteur $h$ ne sera pas très considérable, on pourra négliger tout-à-fait cet angle, et considérer ADB comme un plan horizontal. A la rigueur, les intégrales relatives à $r$ ne devraient pas s'étendre aux points K dont les distances au thermomètre ne sont pas très grandes relativement à son rayon $\varepsilon$, et pour ces points l'échange de chaleur devrait être calculé différemment; mais, vu la petitesse supposée de $\varepsilon$, il n'est pas nécessaire d'avoir égard à cette différence.

Pour tenir compte de l'échange de chaleur entre le thermomètre et les étoiles, il est évident qu'il faudra ajouter au produit $2\pi\varepsilon^2 \mathfrak{C} E dt$, une autre quantité semblable. Je la désignerai par $2\pi\varepsilon^2 \mathfrak{C} E' dt$; et la valeur de E' pourra être représentée par

$$E' = p'(v - \varpi');$$

$\varpi'$ étant une température moyenne de la partie de l'enceinte stellaire, située au-dessus du cône ADB, et $p'$ un coefficient qui dépendra de l'absorption que la chaleur émanée des étoiles aura éprouvée successivement dans l'éther et dans l'atmosphère.

Maintenant, soient M un point de la portion AOB de la surface de la terre, et $\omega$ l'élément de cette surface qui répond au point M. Si l'on conçoit un cône qui ait son sommet en ce point et qui soit tangent à la surface du thermomètre, la portion de cette surface comprise dans ce cône sera à très peu près celle d'un hémisphère et égale à $2\pi\varepsilon^2$, à cause de la petitesse du rayon $\varepsilon$, par rapport à la distance MT. Il y aura échange de chaleur entre tous les élémens de cette demi-surface du thermomètre et l'élément $\omega$; l'augmentation de chaleur qui en résultera pour l'instrument pendant l'instant $dt$, aura d'abord pour facteur $2\pi\varepsilon^2 \zeta dt$, comme dans les échanges que l'on vient de considérer, et la quantité $\zeta$ sera la même que précédemment, puisque, par hypothèse, l'état de la surface du thermomètre ne change pas dans toute son étendue. Quant au second facteur de cette augmentation de chaleur, il se composera de trois parties distinctes, dont l'une proviendra de la chaleur émise par la terre à travers $\omega$ et les deux autres résulteront de la chaleur atmosphérique et de la chaleur stellaire réfléchies par cet élément. Pour former la somme de ces trois parties ou l'expression totale de ce second facteur, soient C le centre de la terre, et MN le prolongement de CM, ou la normale extérieure en M; menons dans le plan de MN et de MT une troisième droite MH, telle que MN coupe l'angle HMT en deux parties égales; faisons

$$\mathrm{MT} = y, \qquad \mathrm{NMT} = \varphi;$$

et observons que toutes les droites qui vont du point M au thermomètre sont sensiblement égales et parallèles à MT. D'après le chapitre II, le second facteur dont il s'agit aura pour expression

$$\frac{\omega \cos \varphi}{4\pi y^2} \left[ \alpha(u - v) + (1 - \alpha)\rho(q_{,} - v) + (1 - \alpha)\rho'({}_{,} - v) \right],$$

et l'augmentation de chaleur à laquelle il appartient sera, en

conséquence,

$$\frac{\iota^2 \mathcal{C} \omega \cos\varphi dt}{2y^2}[\alpha(u - \nu) + (1 - \alpha)\rho(q_{,} - \nu) + (1 - \alpha)\rho'(s_{,} - \nu)].$$

On néglige ici l'absorption de la chaleur par l'air, dans le trajet de $\omega$ au thermomètre; ce qui est permis lorsque l'élévation $h$ de l'instrument au-dessus de la surface de la terre n'est pas très considérable. On représente par $u$ la température de cette surface au point M, par $\alpha$ la fraction de la chaleur rayonnante que l'élément $\omega$ laisse passer sous l'angle $\varphi$ d'incidence, et conséquemment par $1 - \alpha$ la fraction qu'il réfléchit sous le même angle; $q_{,}$ est une température moyenne de la colonne d'air qui va, suivant la direction MH, de l'élément $\omega$ aux limites de l'atmosphère, et $s_{,}$ la température stellaire correspondante à cette direction; le coefficient $\rho$ dépend des lois de la densité et du pouvoir émissif de l'air, et $\rho'$ de l'absorption qui a lieu dans l'éther et dans l'atmosphère, suivant cette même direction MH.

Pour déduire de la formule précédente l'augmentation de chaleur du thermomètre résultant de l'échange de chaleur entre cet instrument et tous les élémens de la portion de surface AOB, il faudra remplacer $\omega$ par l'élément différentiel de cette surface, puis intégrer dans toute son étendue. Soient donc $\theta$ l'angle MCO, et $\psi$ l'angle que fait le plan de MCO avec un plan fixe passant par CO; on aura

$$\omega = l^2 \sin\theta d\theta d\psi.$$

Soit aussi $\mu$ l'angle ACO ou BCO, c'est-à-dire le complément de l'angle que les arêtes du cône ADB font avec son axe DC; les limites de l'intégrale seront $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$, $\theta = 0$ et $\theta = \mu$. Si donc on suppose que la température $u$ et la nature de la surface ne changent pas dans l'étendue de AOB, et si l'on considère la fraction $\alpha$ comme indépendante de l'angle $\varphi$, l'intégrale aura pour valeur

$$\pi\iota^2\mathcal{C}dt[\alpha z(u - \nu) + (1 - \alpha)p_{,}(\varpi_{,} - \nu) + (1 - \alpha)p'_{,}(\varpi'_{,} - \nu)],$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\int_0^{\mu} \frac{l^2 \cos\varphi \sin\theta d\theta}{y^2} = z,$$

$$\int_0^{\mu}\int_0^{2\pi} \frac{l^2\rho \cos\varphi \sin\theta d\theta d\psi}{y^2} = 2\pi p_{,},$$

$$\int_0^{\mu}\int_0^{2\pi} \frac{l^2\rho q_{,} \cos\varphi \sin\theta d\theta d\psi}{y^2} = 2\pi p_{,}\varpi_{,},$$

$$\int_0^{\mu}\int_0^{2\pi} \frac{l^2\rho' \cos\varphi \sin\theta d\theta d\psi}{y^2} = 2\pi p'_{,},$$

$$\int_0^{\mu}\int_0^{2\pi} \frac{l^2\rho' s_{,} \cos\varphi \sin\theta d\theta d\psi}{y^2} = 2\pi p'_{,}\varpi'_{,}.$$

Les quantités $\varpi_{,}$ et $\varpi'_{,}$ seront des températures moyennes distinctes de $\varpi$ et $\varpi'$, quoiqu'elles répondent aux mêmes parties de l'atmosphère et de l'enceinte stellaire, c'est-à-dire aux parties situées au-dessus du cône ADB; et les coefficiens $p_{,}$ et $p'_{,}$ ne seront pas non plus les mêmes que $p$ et $p'$.

On déterminera les valeurs de $y$ et $\cos\varphi$ en fonctions de $\theta$, au moyen des équations

$$y^2 = l^2 + (l+h)^2 - 2l(l+h)\cos\theta,$$
$$y\cos\varphi = (l+h)\cos\theta - l,$$

qui sont faciles à former. On en déduit

$$\frac{\cos\varphi}{y^2} = \frac{(l+h)\cos\theta - l}{[l^2 + (l+h)^2 - 2l(l+h)\cos\theta]^{\frac{3}{2}}};$$

on a d'ailleurs

$$(l+h)\cos\mu = l,$$

en prenant $l+h$ au lieu de $l+h+\epsilon$; et d'après cela on trouve

$$z = 1 - \frac{\sqrt{(2l+h)h}}{l+h}.$$

Tous ces détails étaient nécessaires pour parvenir à l'expression complète de l'augmentation de chaleur du thermomètre à chaque instant. S'il est placé à l'ombre et qu'il ne reçoive aucun rayon solaire, ni directement, ni par réflexion, il résulte de tout ce qui précède que la variation de sa quantité de chaleur pendant l'ins-

tant $dt$, sera

$$\pi\varepsilon^2 dt[2\beta p(\varpi-\nu)+2\beta p'(\varpi'-\nu)-4\gamma(\nu-\eta)$$
$$+\alpha\beta z(u-\nu)+(1-\alpha)\beta p_,(\varpi_,-\nu)+(1-\alpha)\beta p'_,(\varpi'_,-\nu)].$$

En l'égalant à zéro, on déterminera la température invariable que l'instrument atteindra finalement et que je désignerai par U, de sorte que $\nu=$ U rende nulle la quantité précédente. De cette manière, on aura

$$\mathrm{U}=\frac{\beta[\alpha zu+2p\varpi+2p'\varpi'+(1-\alpha)(p_,\varpi_,+p'_,\varpi'_,)]+4\gamma\eta}{\beta[\alpha z+2p+2p'+(1-\alpha)(p_,+p'_,)]+4\gamma}, \quad (8)$$

pour l'expression générale de la température marquée par un thermomètre exposé à l'air libre et au rayonnement de la terre.

(202). Cette formule met en évidence les divers élémens qui peuvent influer sur la valeur de U; et quoique la plupart des quantités qu'elle contient ne nous soient nullement connues, on en peut néanmoins déduire plusieurs conséquences générales.

Les vents et l'état de l'atmosphère, plus ou moins chargée de nuages, influent sur la valeur de U : les vents, en amenant un air plus froid ou plus chaud au-dessus de l'horizon, font varier les températures $\varpi$, $\varpi_,$, $\eta$, qui entrent dans la formule (8); les nuages augmentent les températures $\varpi$ et $\varpi_,$, en interrompant l'échange de chaleur entre le thermomètre et les régions les plus élevées de l'atmosphère, qui sont aussi les plus froides, et le remplaçant par un échange entre les nuages et l'instrument; par la même raison, ils augmentent la température $u$ de la terre pendant la nuit; mais pendant le jour ils la diminuent en interceptant une partie des rayons du soleil. C'est à raison de ces causes variables et irrégulières, que la moyenne annuelle des valeurs de U diffère quelquefois d'un ou deux degrés, d'une année à la suivante, comme on le verra plus loin.

La valeur de U est, comme on l'a vu, indépendante du rayon $\varepsilon$ de la boule; il influe seulement sur la vitesse avec laquelle l'instrument indique les variations de température, et qui est en raison inverse de la grandeur de $\varepsilon$, toutes choses égales d'ailleurs.

On voit aussi que quand la hauteur $h$ du thermomètre au-dessus

de la terre, n'est pas très grande, elle n'influe pas sensiblement sur la valeur de U; car la valeur de $z$ est alors à très peu près égale à l'unité; chacune des intégrales que $p_{,}$, $p'_{,}$, $p_{,}\varpi_{,}$, $p'_{,}\varpi'_{,}$, représentent, est aussi à peu près indépendante de $h$, comme celle qui est désignée par $z$; et l'on peut négliger l'angle $\delta$, dépendant de $h$, qui entre dans les limites des intégrales représentées par $p$ et $p\varpi$. Si donc on excepte les cas particuliers où la température $\eta$ de l'air même, varie sensiblement à de petites distances du sol, comme dans les phénomènes du *mirage* et de la *rosée*, un thermomètre élevé d'un décimètre, par exemple, ou de plusieurs mètres au-dessus de la terre, marquera la même température; ce qui est conforme à l'expérience. Toutefois, on ne doit pas oublier que la formule (8) n'a plus lieu quand l'instrument est en contact avec la terre, ou seulement élevé à une hauteur qui n'est pas très grande par rapport au rayon $\epsilon$ de la boule; en sorte que très près du contact, il n'est pas impossible que la hauteur $h$ influe sensiblement sur la température U.

Lorsque la hauteur $h$ est très grande, elle n'influe pas encore beaucoup sur la valeur de U, parce que cette hauteur est toujours très petite relativement au rayon de la terre. A une hauteur de 5000 mètres, par exemple, la quantité $z$, qui est l'unité quand $h = 0$, ne se trouve diminuée que d'environ un quatre-vingtième; et de même, les autres intégrales contenues dans la formule (8) ne varient aussi que d'une petite partie. Mais la température $\eta$ décroît considérablement à ces grandes hauteurs, et, par conséquent aussi, la valeur de U. De plus, il n'est plus permis de négliger, comme nous l'avons fait, l'absorption de la chaleur par l'air entre la terre et le thermomètre. L'effet de cette absorption doit être de diminuer l'influence de la chaleur du globe sur la température U, à mesure que l'on s'élève au-dessus de sa surface, et, peut-être, de la faire disparaître entièrement à de très grandes élévations. Il résulte de là que deux thermomètres également élevés au-dessus du niveau des mers, en des lieux où la température $\eta$ serait supposée la même, mais l'un isolé, en ballon, par exemple, et l'autre près de la surface du sol; il s'ensuit, disons-nous, que ces deux thermomètres ne marqueront pas cependant la même température U, à raison de l'influence inégale du rayonnement de la terre sur ces deux instrumens. Les ob-

servations très nombreuses que l'on a faites à des hauteurs, au-dessus du niveau des mers, très grandes et très inégales, mais à de petites distances du sol, ne sont donc pas propres à faire connaître la loi du décroissement de U qui a réellement lieu dans l'atmosphère pour un thermomètre isolé. Jusqu'à présent la seule expérience concluante, d'où l'on puisse déduire la grandeur de ce décroissement, est celle que M. Gay-Lussac a faite à Paris en 1804. La hauteur à laquelle il s'est élevé en ballon a été de 6980 mètres. C'était un jour d'été : le thermomètre près de la surface de la terre marquait 30°,75; à cette hauteur de 6980 mètres, il s'est abaissé à — 9°,50, c'est-à-dire, de 40°,25; ce qui donne un décroissement moyen d'à peu près un degré pour 171 mètres. Nous ignorons si le décroissement de U sur chaque vertical est uniforme; nous ne savons pas non plus s'il change avec la latitude et dans les différentes saisons.

A raison de la quantité $\zeta$ contenue dans la formule (8), la valeur de U dépend de l'état de la surface du thermomètre; mais elle ne croît pas toujours avec le pouvoir absorbant de cette surface. Si nous faisons, pour abréger,

$$\alpha z u + 2p\varpi + 2p'\varpi' + (1-\alpha)(p_{,}\varpi_{,} + p_{,}'\varpi_{,}') = 4a,$$
$$\alpha z + 2p + 2p' + (1-\alpha)(p_{,} + p_{,}') = 4b,$$

la formule (8) pourra s'écrire ainsi

$$\mathrm{U} = \frac{\zeta a + \gamma\eta}{\zeta b + \gamma}.$$

En la différentiant par rapport à $\zeta$, et observant que le coefficient $\gamma$ est indépendant de l'état de la surface, de sorte qu'il ne varie pas avec $\zeta$, on aura

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\zeta} = \frac{\gamma(a - b\eta)}{(\zeta b + \gamma)^2};$$

ce qui montre qu'elle croîtra ou décroîtra avec $\zeta$, selon que la quantité $a - b\eta$ sera positive ou négative; et comme on a aussi

$$\mathrm{U} - \eta = \frac{\zeta(a - b\eta)}{\zeta b + \gamma},$$

cela revient à dire que U croîtra ou décroîtra avec le pouvoir absor-

bant du thermomètre, selon que cette température sera plus haute ou plus basse que $\varkappa$, qui est celle de l'air environnant. Dans le cas de $b\varkappa - a = 0$, ou de $\varkappa = \frac{a}{b}$, la valeur de U sera indépendante de $\varepsilon$ et égale à celle de $\varkappa$.

L'inégalité des températures marquées simultanément par des thermomètres dont les surfaces sont dans des états différens, fournit un moyen de déterminer la température $\varkappa$ de l'air environnant; mais il faut pour cela employer trois thermomètres, et non pas deux seulement, comme on a coutume de le dire. L'expression de U renfermant deux quantités $a$ et $b$, qui ne nous sont pas connues, il faut d'abord deux observations pour les éliminer, et ensuite une troisième pour obtenir la valeur de $\varkappa$. Soient donc $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, des quantités proportionnelles aux pouvoirs absorbans des trois thermomètres, et U, U′, U″, les températures marquées au même instant par ces trois instrumens. On aura, à la fois,

$$\begin{aligned} U\,(\varepsilon b + \gamma) &= \varepsilon a + \gamma\varkappa, \\ U'(\varepsilon' b + \gamma) &= \varepsilon' a + \gamma\varkappa, \\ U''(\varepsilon'' b + \gamma) &= \varepsilon'' a + \gamma\varkappa; \end{aligned}$$

et par l'élimination de $a$ et de $b$, on en déduit

$$\varkappa = \frac{\varepsilon\varepsilon''\,U'(U - U'') + \varepsilon'\varepsilon\,U''(U' - U) + \varepsilon''\varepsilon'\,U(U'' - U')}{\varepsilon\varepsilon''(U - U'') + \varepsilon'\varepsilon(U' - U) + \varepsilon''\varepsilon'(U'' - U')}.$$

Pour faire usage de cette formule, il faudra connaître avec précision les rapports numériques des trois constantes $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, et mesurer dans chaque cas, aussi exactement qu'il sera possible, les trois températures U, U′, U″. Si le pouvoir absorbant de l'un des trois thermomètres est nul ou très faible, et que ce soit celui dont U est la température, on aura simplement $\varkappa = U$, comme il résulte immédiatement de la formule (8). Il en sera de même, quand on aura rendu très grand le pouvoir refroidissant de l'air, en agitant fortement le thermomètre (nº 39); ce qui permettra de négliger, dans cette formule, $\varepsilon$ par rapport à $\gamma$. Dans un grand nombre de questions, comme le calcul des réfractions et celui des quantités de vapeur contenues dans

l'air, c'est la température même de l'air, c'est-à-dire la valeur de $u$ et non pas celle de U, qu'il est nécessaire de connaître.

Cette formule (8) suppose le thermomètre placé à l'ombre. Mais il est facile de l'étendre au cas où les rayons du soleil tombent sur l'instrument directement ou par réflexion. Le rayon de la boule étant toujours très petit, la quantité de chaleur solaire qu'elle reçoit pendant l'instant $dt$ pourra être représentée par un produit $4\pi r^2 \delta g dt$, dans lequel $\delta$ est la mesure du pouvoir absorbant du thermomètre, relativement à la chaleur solaire, et $g$ la mesure de l'intensité de cette chaleur directe et réfléchie, au lieu où l'instrument est placé. Il faudra donc ajouter ce produit à l'augmentation de chaleur du thermomètre, que l'on a déterminée dans le numéro précédent, et, par suite, il faudra ajouter $4\delta g$ au numérateur de la formule (8). Donc, si l'on appelle $f$ l'élévation de la température marquée par cet instrument, en passant de l'ombre au soleil, on aura toutes choses d'ailleurs égales,

$$f = \frac{\delta g}{\epsilon b + \gamma},$$

Pour un second thermomètre, observé dans le même lieu, mais dont la surface sera dans un état différent, si l'on représente par $f'$, $\delta'$, $\epsilon'$, ce que deviennent les trois quantités $f$, $\delta$, $\epsilon$, relatives au premier, on aura de même

$$f' = \frac{\delta' g}{\epsilon' b + \gamma}.$$

De ces deux équations, on déduit

$$f' - f = \frac{(\delta' - \delta)\gamma g + (\delta'\epsilon - \delta\epsilon')bg}{(\epsilon b + \gamma)(\epsilon' b + \gamma)}.$$

Or, si les pouvoirs absorbans d'une même surface sont égaux, pour la chaleur solaire et pour toute autre chaleur rayonnante, ou bien s'ils sont différens, mais qu'ils croissent dans un même rapport en passant d'une surface à une autre, on aura $\frac{\delta'}{\epsilon'} = \frac{\delta}{\epsilon}$, ou $\delta'\epsilon - \delta\epsilon' = 0$, et, par conséquent,

$$f' - f = \frac{(\delta' - \delta)\gamma g}{(\epsilon b + \gamma)(\epsilon' b + \gamma)};$$

ce qui montre que dans cette hypothèse, c'est le thermomètre qui a le plus grand pouvoir absorbant, qui s'élève aussi le plus dans le passage de l'ombre au soleil. Il en sera de même, à plus forte raison, si l'on a $\frac{\delta'}{\varepsilon'} > \frac{\delta}{\varepsilon}$; mais le contraire pourrait arriver, si l'on avait $\frac{\delta'}{\varepsilon'} < \frac{\delta}{\varepsilon}$. On peut remarquer que dans le vide où l'on a $\gamma = 0$, les températures marquées par tous les thermomètres, s'élèveraient également par l'effet de la chaleur solaire, quel que fût l'état de leurs surfaces, dans le cas où leurs pouvoirs absorbans varient suivant un même rapport pour les deux sortes de chaleur rayonnante.

(203). La détermination de la température propre de l'air en un point et à un instant quelconque est liée à celle des mouvemens que l'inégalité de cette même température, en passant d'un point à un autre, produit dans l'atmosphère, soit dans le sens vertical, soit parallèlement à la surface du globe. Cette double détermination est un problème de la plus grande difficulté, dont les géomètres ne se sont point encore occupés. Dans l'état d'équilibre, on déduit aisément les lois des densités et des pressions, le long de chaque colonne verticale, de l'hypothèse que l'on fait sur la loi des températures. On peut ensuite vérifier cette hypothèse par la comparaison des formules, soit aux hauteurs barométriques mesurées à différentes distances de la terre, soit aux réfractions astronomiques observées à quelques degrés au-dessus de l'horizon. Mais il y a deux conditions auxquelles les températures de l'air doivent toujours satisfaire, et qui sont relatives aux deux extrémités de chaque colonne atmosphérique.

A l'extrémité inférieure, l'air en contact avec la surface de la terre, doit prendre une température moyenne égale à celle de cette surface, c'est-à-dire, à la moyenne des températures marquées pendant un long intervalle de temps, par un thermomètre très peu enfoncé dans la terre. A mesure que l'on s'élève, la densité et la pression diminuent; mais pour que l'atmosphère se termine, il faut que sa force élastique décroisse dans un plus grand rapport que sa densité, afin que cette force soit tout-à-fait nulle à l'extrémité supérieure où la densité, quelque faible qu'on la suppose, doit encore exister. De là vient la nécessité d'un décroissement de la température qui s'ajoute à celui de la densité. Par suite de ce décroissement, la température, à l'extrémité

supérieure, doit être telle que l'air n'ait plus aucune tendance à se dilater, et soit réellement à l'état liquide. Or, une pareille température doit être extrêmement basse et beaucoup plus encore que celle qui serait nécessaire pour liquéfier l'air à la surface de la terre; car il y a lieu de croire que la température à laquelle un gaz devient liquide, est d'autant plus basse que sa densité est moins grande. Ainsi, pour fixer les idées, on peut se représenter une colonne atmosphérique qui s'appuie sur la mer, par exemple, comme un fluide élastique terminé par deux liquides, dont l'un a une densité et une température ordinaires, et l'autre une température et une densité excessivement faibles.

L'égalité des températures de la terre à sa surface et de la couche d'air inférieure, n'a lieu qu'entre leurs valeurs moyennes et non pas entre leurs valeurs variables. Pendant le jour, la terre s'échauffe plus rapidement que l'air, parce qu'elle absorbe la chaleur solaire en grande quantité et l'air très faiblement, de sorte que la température de ce fluide ne s'élève sensiblement que par son contact avec la terre déjà échauffée. Au contraire, pendant la nuit la faculté de rayonner étant très faible pour l'air par rapport à celle de la terre, l'échange de chaleur avec les couches supérieures de l'atmosphère, refroidit la terre plus rapidement que la couche d'air inférieure dont la température ne s'abaisse principalement que par le contact de la terre. C'est, comme on sait, sur cette inégalité de rayonnement qu'est fondée l'explication du phénomène de la rosée que M. Ch. Wels a donnée, et que nous placerons ici en peu de mots, comme un complément de ce qui vient d'être dit.

Le soleil étant au-dessous de l'horizon, et le ciel sans nuages, supposons que la terre et les corps posés sur sa surface aient d'abord la même température que l'air jusqu'à une hauteur de dix mètres, par exemple. Par le rayonnement, ces corps se refroidiront plus ou moins rapidement; et bientôt, ils auront des températures inférieures à celles de la couche d'air, et d'autant plus basses que leurs surfaces seront plus rayonnantes. Par le contact avec ces corps, et aussi par le rayonnement, la couche d'air inférieure se refroidira, de manière que sa température sera croissante de bas en haut, dans cette hauteur d'une dixaine de mètres; en même temps, sa densité sera décroissante dans le même sens, de telle sorte que sa force élastique ne varie pas sensiblement et qu'elle puisse demeurer en repos. Or, on sait que la quantité de va-

peur qui peut être contenue dans l'air ne dépend pas de sa densité, et diminue avec sa température; celle que renfermait d'abord cette couche d'air, si elle approchait beaucoup de son *maximum*, se précipitera donc à l'état liquide, et formera la rosée qui se déposera en plus grande abondance sur les corps les plus rayonnans. La portion de vapeur qui restera dans cette même couche augmentera de bas en haut, à raison de l'accroissement de température; par conséquent, si l'on élève un de ces corps refroidis, ou bien si l'on suspend dans la couche d'air dont il s'agit, d'autres corps qui se refroidissent par le rayonnement, il s'y déposera une nouvelle rosée, d'autant plus considérable que ces corps seront plus élevés.

Le phénomène de la rosée n'aura plus lieu, ou sera beaucoup diminué, lorsque l'atmosphère sera chargée de nuages qui interrompent l'échange de chaleur rayonnante avec les couches les plus élevées. Il ne se produira pas non plus, ou se produira faiblement sur les corps, comme les métaux polis, dont le rayonnement est très faible; mais si une plaque métallique est posée sur la terre refroidie par le rayonnement nocturne, cette plaque se refroidira par le contact avec la terre, et la rosée pourra se déposer sur sa face supérieure.

(204). La température U marquée par un thermomètre exposé à l'air libre près de la surface de la terre, est l'élément le plus important de la Météorologie. C'est à cette température que nous vivons, et que la végétation se développe en dehors de la terre; sa valeur moyenne, pour chaque mois de l'année, nous sert à comparer les saisons sous le rapport calorifique. La moyenne de l'année entière, que je représenterai par V, déterminera la différence des climats, par l'inégalité de ses valeurs dans les différentes régions du globe.

En un même lieu, cette température U varie à toutes les heures du jour et de la nuit. Une longue expérience a fait voir que c'est, en général, à l'instant du lever du soleil, qu'elle est la plus basse, et qu'elle atteint sa plus grande élévation vers trois heures après midi. Pour connaître la moyenne de la journée entière, il faudrait observer la valeur de U un grand nombre de fois, par exemple d'heure en heure, et diviser par 24 la somme des températures observées; mais on a aussi reconnu que la moyenne obtenue de cette manière diffère peu, en général, de celle que l'on trouve bien plus facile-

ment en prenant la demi-somme des valeurs *maxima* et *minima*. En formant ainsi les moyennes de tous les jours de chaque mois, et divisant leur somme par le nombre de ces jours, on a les températures moyennes des douze mois de l'année; puis en divisant leur somme par 12, on a la température moyenne V de l'année entière. Mais comme la température U est soumise à une foule de variations accidentelles, dues à l'état du ciel et à d'autres causes, il est nécessaire, pour avoir la véritable température de l'année ou d'un mois déterminé, de prendre encore la moyenne de leurs valeurs obtenues pendant plusieurs années consécutives. C'est ce qu'a fait M. Bouvard, en employant d'abord à la détermination de ces moyennes les températures observées à Paris, depuis 1806 jusqu'à 1826 inclusivement. La moyenne annuelle déduite de ces vingt-une années d'observations, a été de 10°,814. Depuis la publication de son Mémoire (*), M. Bouvard a étendu ses calculs aux huit années écoulées depuis 1826 jusqu'à 1834; il a trouvé alors 10°,822 pour la moyenne annuelle, conclue des observations des vingt-neuf dernières années. Le peu de différence qui existe entre ce résultat et le précédent, montre que cette moyenne est maintenant bien déterminée; en sorte qu'à Paris, la température *climatérique* V a pour valeur

$$V = 10°,822.$$

Voici les résultats de ses derniers calculs, que M. Bouvard a bien voulu me communiquer, et qui n'ont point encore été publiés.

---

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome VII.

*Tableau des températures moyennes pour les mois et les années, conclues des températures maxima et minima de chaque jour.*

| ANNÉES. | | JANVIER. | FÉVRIER. | MARS. | AVRIL. | MAI. | JUIN. | JUILLET. | AOUT. | SEPTEMBRE. | OCTOBRE. | NOVEMBRE. | DÉCEMBRE. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1806 | 12°,08 | 6°,10 | 5°,92 | 7°,02 | 7°,94 | 17°,08 | 18°,04 | 19°,50 | 18°,04 | 16°,31 | 10°,93 | 8°,88 | 8°,65 |
| 1807 | 10,76 | 2,34 | 5,93 | 3,24 | 9,08 | 16,09 | 16,43 | 21,13 | 21,44 | 13,04 | 12,69 | 5,84 | 1,46 |
| 1808 | 10,35 | 2,44 | 2,41 | 3,93 | 7,08 | 17,68 | 16,71 | 21,37 | 19,35 | 14,67 | 9,67 | 7,50 | 1,31 |
| 1809 | 10,64 | 5,60 | 7,83 | 7,19 | 6,47 | 15,17 | 15,35 | 17,35 | 18,07 | 14,64 | 9,89 | 4,85 | 4,95 |
| 1810 | 10,62 | —1,72 | 2,80 | 8,12 | 9,34 | 13,72 | 17,01 | 17,78 | 17,64 | 17,84 | 11,56 | 7,77 | 5,27 |
| 1811 | 11,97 | —0,38 | 7,08 | 9,05 | 11,85 | 17,16 | 17,39 | 19,25 | 17,69 | 16,84 | 14,44 | 8,49 | 4,55 |
| 1812 | 9,89 | 1,51 | 6,23 | 5,65 | 7,47 | 15,59 | 16,12 | 17,50 | 17,95 | 15,44 | 11,89 | 4,33 | —0,99 |
| 1813 | 10,24 | 0,43 | 5,85 | 6,38 | 10,76 | 15,09 | 15,51 | 17,30 | 16,74 | 13,92 | 11,61 | 5,98 | 3,06 |
| 1814 | 9,80 | —0,21 | —0,02 | 3,79 | 11,49 | 12,40 | 15,62 | 19,28 | 17,38 | 15,33 | 9,72 | 6,13 | 6,18 |
| 1815 | 10,49 | —0,57 | 7,18 | 9,53 | 10,32 | 14,72 | 15,97 | 17,54 | 17,85 | 15,51 | 12,21 | 3,39 | 1,98 |
| 1816 | 9,40 | 2,59 | 2,08 | 5,78 | 9,99 | 12,74 | 14,79 | 15,54 | 15,56 | 14,08 | 11,61 | 3,97 | 3,74 |
| 1817 | 10,41 | 6,01 | 6,96 | 6,42 | 7,34 | 12,36 | 17,84 | 17,03 | 16,44 | 16,89 | 7,30 | 9,02 | 2,25 |
| 1818 | 11,39 | 4,34 | 3,93 | 6,48 | 11,37 | 13,68 | 19,27 | 20,12 | 18,30 | 15,71 | 11,73 | 9,25 | 2,11 |
| 1819 | 11,12 | 4,95 | 5,38 | 6,87 | 11,51 | 14,52 | 16,02 | 19,07 | 19,50 | 16,38 | 11,10 | 4,74 | 3,28 |
| 1820 | 9,81 | —0,61 | 2,97 | 4,89 | 11,37 | 14,11 | 15,37 | 18,26 | 18,66 | 14,16 | 10,09 | 5,15 | 3,38 |
| 1821 | 11,06 | 3,18 | 0,97 | 7,34 | 11,54 | 12,05 | 14,52 | 16,96 | 20,02 | 16,71 | 11,08 | 10,14 | 7,52 |
| 1822 | 12,10 | 4,36 | 6,09 | 9,94 | 11,13 | 16,64 | 21,16 | 18,81 | 19,05 | 15,88 | 13,40 | 9,04 | —0,63 |
| 1823 | 10,40 | —0,33 | 5,29 | 6,49 | 9,10 | 15,12 | 14,97 | 17,16 | 19,10 | 15,65 | 10,53 | 5,72 | 5,62 |
| 1824 | 11,15 | 2,67 | 5,04 | 5,42 | 9,19 | 12,59 | 16,32 | 18,68 | 18,31 | 16,76 | 11,93 | 9,64 | 7,08 |
| 1825 | 11,67 | 3,45 | 4,27 | 5,50 | 11,80 | 14,22 | 17,02 | 20,25 | 19,40 | 17,86 | 12,19 | 7,27 | 6,37 |
| 1826 | 11,44 | —1,55 | 6,38 | 7,37 | 10,21 | 12,64 | 18,77 | 20,69 | 21,15 | 17,04 | 13,37 | 5,42 | 5,80 |
| 1827 | 10,89 | —0,13 | —0,98 | 8,10 | 11,29 | 14,71 | 16,97 | 19,76 | 17,98 | 16,23 | 13,15 | 5,81 | 6,87 |
| 1828 | 11,47 | 6,01 | 5,19 | 7,03 | 16,50 | 15,06 | 17,81 | 19,12 | 17,59 | 16,58 | 10,87 | 7,41 | 4,76 |
| 1829 | 9,35 | —2,04 | 4,98 | 5,73 | 9,77 | 14,89 | 17,14 | 18,57 | 16,90 | 13,74 | 9,99 | 4,72 | —3,47 |
| 1830 | 10,16 | —2,36 | 0,95 | 9,85 | 11,97 | 14,63 | 16,05 | 18,90 | 16,98 | 13,78 | 10,70 | 7,81 | 2,63 |
| 1831 | 11,70 | 2,07 | 6,10 | 8,98 | 11,50 | 14,24 | 16,93 | 19,78 | 18,67 | 15,21 | 14,79 | 6,64 | 5,53 |
| 1832 | 10,82 | 1,46 | 3,45 | 5,51 | 10,68 | 13,18 | 17,35 | 19,55 | 20,86 | 15,52 | 11,33 | 6,64 | 4,31 |
| 1833 | 10,94 | —0,25 | 7,11 | 4,40 | 9,40 | 17,66 | 18,40 | 18,40 | 16,46 | 13,74 | 11,96 | 6,01 | 7,97 |
| 1834 | 11,73 | 7,33 | 3,67 | 7,51 | 8,99 | 16,48 | 17,96 | 20,26 | 19,38 | 17,20 | 11,61 | 6,71 | 3,63 |
| | 10,822 | 1,920 | 4,483 | 6,673 | 10,013 | 14,697 | 16,845 | 18,790 | 18,361 | 15,609 | 11,474 | 6,697 | 3,972 |

Les nombres placés à la suite de chaque année sont les moyennes de l'année et de chaque mois de cette année; les nombres écrits au bas des colonnes sont les moyennes pendant les vingt-neuf années.

Le thermomètre de l'Observatoire est placé à la face nord du bâtiment, abrité des rayons du soleil et élevé, comme le baromètre, à cinq mètres et demi au-dessus du sol, ou à 66 mètres au-dessus du niveau des mers. On l'observe tous les jours plusieurs fois; les températures observées pendant chaque mois sont publiées dans les *Annales de Physique et de Chimie*.

En jetant les yeux sur ce tableau, on voit que les températures des années se sont écartées de leur valeur moyenne, d'un peu plus d'un degré, en plus et en moins, et que celles des mois homonymes se sont encore écartées davantage de leurs moyennes respectives. Les températures moyennes des mois croissent sans interruption depuis janvier jusqu'à juillet, et décroissent aussi continuellement depuis juillet jusqu'à janvier; la demi-somme de leurs valeurs *maxima* et *minima*, ou relatives à janvier et juillet, est 10°,355, et conséquemment moindres que la moyenne 10°,822 de l'année entière; la demi-somme des moyennes qui répondent aux mois d'avril et d'octobre a pour valeur 10°,745, qui diffère beaucoup moins de la moyenne annuelle.

(205). Quoique la demi-somme des températures *maxima* et *minima* de chaque jour diffère peu, en général, de la moyenne des vingt-quatre heures, cependant M. de Freycinet a reconnu qu'on approche encore bien davantage de cette moyenne en prenant celle des températures observées à deux heures et à huit heures du matin et du soir, et que cette combinaison est la plus avantageuse, quand on emploie seulement quatre observations de chaque journée. Il a conclu ce résultat d'un grand nombre d'observations faites pendant le voyage de l'*Uranie*, à l'ombre et à l'air libre, à terre, au mouillage et en pleine mer. Parmi ces observations, que l'auteur a bien voulu me communiquer, je citerai les suivantes, qui ont été faites à terre.

OBSERVATIONS FAITES D'HEURE EN HEURE.

*Comparaison de la température moyenne, conclue du* minimum *et du* maximum *seulement, avec les moyennes des observations de la journée.*

| LOCALITÉS. | POSITIONS GÉOGRAPHIQUES. | | NOMBRES de jours d'observations. | TEMPÉRATURES. | | | Températures moyennes des 24 observations. | DIFFÉRENCES. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Latitudes. | Longitudes à l'Est de Paris. | | *Minimum* moyen. | *Maximum* moyen. | Demi-somme. | | |
| Ile-de-France.... | 20°.10′ Sud. | 55°. 8′ | 18 jours. | +21°,47 | +24°,94 | +23°,20 | +22°,78 | +0°,42 |
| Coupang (île Timor) | 10. 9 Sud. | 121.15 | 5..... | +23,78 | +34,80 | +29,29 | +28,52 | +0,77 |
| Ile Rawak....... | 0. 2 Sud. | 128.35 | 4 .... | +23,20 | +29,40 | +26,30 | +26,18 | +0,12 |
| Agagna (île Guam). | 13.26 Nord. | 142.32 | 6..... | +24,82 | +29,92 | +27,37 | +27,08 | +0,29 |
| Port Jackson..... | 33.51 Sud. | 148.49 | 8..... | +17,17 | +22,84 | +20,00 | +19,74 | +0,26 |
| | | | 41 jours. | Différence moyenne.......... | | | | +0°,37 |

*Excès de la température conclue de deux paires d'heures homonymes, à six heures d'intervalle, matin et soir, sur la moyenne des vingt-quatre heures.*

| DATE des OBSERVATIONS. | DÉSIGNATION DES DIVERSES COMBINAISONS. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1h mat., 7h mat. 1h soir, 7h soir. | 2h mat., 2h soir. 8h mat., 8h soir | 3h mat., 3h soir. 9h mat., 9h soir. | 4h mat., 4h soir. 10h mat., 10h soir. | 5h mat., 5h soir. 11h mat., 11h soir. | 6h mat., midi. 6h soir, minuit. |
| 15 janv. 1828. | + 0°,46 | + 0°,05 | + 0°,05 | — 0°,10 | — 0°,20 | — 0°,23 |
| 17 juillet *id*... | — 0,13 | — 0,26 | — 0,20 | — 0,19 | + 0,27 | + 0,52 |
| 15 janv. 1829. | + 0,11 | + 0,23 | + 0,05 | — 0,11 | — 0,17 | — 0,11 |
| Moy. pour 3 jo. | + 0,15 | + 0,01 | — 0,03 | — 0,13 | — 0,03 | + 0,06 |

Ce tableau suffit pour mettre hors de doute le résultat que M. de Freycinet a conclu de ses propres observations; mais l'auteur a vérifié qu'il se déduit aussi des observations faites au fort de Leith, en Écosse, pendant tout le cours de deux années, et que M. Brewster a publiées (*).

(206). On connaît la valeur de V dans un grand nombre de lieux, mais sans doute moins exactement qu'à Paris. Elle décroît généralement à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur, et quand on s'élève au-dessus du niveau des mers. A ce niveau et à l'équateur, M. de Humboldt l'a trouvée égale à 27°,5; d'après les observations de M. Scoresbi, elle est de —8°,33 à la latitude boréale de 78°, la plus haute à laquelle la valeur de V ait été déterminée. Entre ces limites 27°,5 et —8°,33, cette température climatérique V varie en outre avec la longitude; en sorte que les lignes d'égale chaleur à la surface du globe ne sont pas parallèles à l'équateur (**). Sa valeur décroît aussi dans les deux hémisphères, et avec moins de rapidité dans le nôtre que de l'autre côté de l'équateur.

T. Mayer a essayé le premier d'exprimer la valeur de V par une formule empirique; en désignant par $\theta$ la latitude, et exprimant la température en degrés du thermomètre de Farenheit, cette formule est

$$V = 58° + 26° \cos 2\theta.$$

A l'équateur, on aurait $V = 84°$, ou à très peu près 29° centigrades; ce qui excède d'un degré et demi la température équatoriale qu'on vient de citer. Au pôle, on aurait $V = 32°$; ce qui répond au zéro de notre thermomètre. Partout ailleurs la température V serait au-dessus de ce zéro, ou de celle de la glace fondante; conséquence qui suffit pour rendre la formule de Mayer inadmissible.

M. Brewster a donné, pour exprimer la valeur de V, plusieurs formules qui se rapportent à différentes régions du globe (***), et dont

(*) *Transactions philosophiques d'Édimbourg*, tome X, 2ᵉ partie.

(**) On peut consulter sur ce point les ouvrages de M. de Humboldt, et particulièrement son *Mémoire sur les lignes isothermes*, inséré dans le tome III de la Société d'Arcueil.

(***) *Transactions philosophiques d'Édimbourg*, tome IX, 2ᵉ partie.

chacune contient seulement la latitude $\theta$. L'une de ces formules est

$$V = (81°,50) \cos\theta,$$

en employant toujours les degrés du thermomètre de Farenheit. A la latitude $\theta = 48°50'13''$ de l'Observatoire de Paris, elle donne $V = 12°,022$ en degrés centigrades; ce qui excède de plus d'un degré la véritable valeur 10°,822 de V. Néanmoins cette formule s'accorde généralement beaucoup mieux que la précédente avec l'observation, surtout dans les hautes latitudes: pour $\theta = 78°$, elle ne diffère pas sensiblement de l'observation; si elle s'étendait jusqu'au pôle, on aurait en ce point $V = 0$, et il serait singulier que Farenheit eût pris pour le zéro de l'échelle de son thermomètre, précisément la température la plus basse de notre hémisphère : en degrés de notre thermomètre, la température au pôle boréal serait — 17°,78.

(207). Il paraît qu'en chaque lieu, la valeur de V diffère peu de la température moyenne de la surface de la terre. Ainsi, à Genève on a, d'après une longue suite d'observations, $V = 9°,75$; et nous avons trouvé que la température moyenne de la surface du sol devait être un peu moindre que 10°,14 (n° 189). A Lille, cette température est de 10°, 70 (n° 190); la valeur de V en cette ville ne m'est pas connue; mais sa latitude étant 50°37', si l'on prend pour cette valeur, celle que donne la formule de M. Brewster, on a $V = 11°$. A Paris, la température des caves de l'Observatoire, à une profondeur de 28 mètres, est de 11°,834; l'accroissement de température paraît être de 0°,0281 par mètre (n° 187); si donc on retranche 28(0°,0281) de 11°,834, le reste ne devra excéder que d'une très petite quantité la température moyenne de la surface (n° 185); et l'on voit que ce reste 11°,047 diffère effectivement très peu de $V = 10°,822$.

Ce peu de différence qui existe entre les valeurs moyennes de la température marquée par un thermomètre suspendu dans l'air libre et celle de la surface du sol, est d'autant plus remarquable, que souvent la température variable de la terre, observée aussi près qu'il est possible de sa surface et qu'on peut prendre pour celle de cette surface même, excède de beaucoup la température marquée au même instant par un thermomètre très peu élevé au-dessus de cette surface, et à

plus forte raison la température que l'on observe à une hauteur de quelques mètres, dont V est la valeur moyenne.

Voici des observations qui m'ont été communiquées par M. Arago, qui mettent en évidence cet excès de l'une des températures variables sur l'autre.

Le 10 août 1826, à trois heures et demie de l'après-midi, ciel serein.

| | |
|---|---|
| Thermomètre légèrement couvert de sable de rivière....... | 46° |
| Thermomètre légèrement couvert de terre végétale........ | 54 |
| Thermomètre exposé au soleil, à $0^m,5$ de hauteur.......... | 37,5 |

Le 2 septembre 1827, à deux heures de l'après-midi, ciel serein.

| | |
|---|---|
| Thermomètre enterré de $0^m,002$.............. | 45°,3 |
| Thermomètre à l'ombre, à $0^m,04$ de hauteur.. | 30 |

(208). Ce qui précède renferme tout ce que nous pouvons dire de général sur la température $n$, qui est celle de l'air, sur la température U distincte de $n$ et que marque un thermomètre exposé à l'air, et sur la moyenne annuelle V des valeurs de U; nous allons actuellement considérer l'échange de chaleur rayonnante entre la terre et l'atmosphère, y compris l'enceinte stellaire fermée de toutes parts, où la terre est contenue et dont nous avons déjà examiné l'effet. Le résultat de cet échange de chaleur pourrait se déduire des formules générales du chapitre II; mais il sera bon de le déterminer spécialement pour le cas dont il s'agit.

Appelons $\omega$ l'élément de la surface de la terre qui répond au point O (fig. 14). Sur la droite OE menée par ce point et à la distance quelconque $r$ de ce même point, désignons par $\rho$ la densité de l'air, par $y$ sa température et par $q$ la mesure de son pouvoir absorbant, qui ont lieu au bout du temps $t$; la mesure de son pouvoir émissif sera $q\mathrm{F}y$, en indiquant par F la même fonction que dans le n° 13; par conséquent si l'on représente par $v$ le volume d'une partie de l'atmosphère d'une grandeur insensible, située sur cette droite OE et à cette distance $r$ du point O, sa masse sera $v\rho$, et la quantité de chaleur qu'elle émet en tous sens pendant l'instant $dt$ aura pour expression $v\rho q\mathrm{F}y\,dt$. Concevons un cône ayant son sommet en un point de $v$, et qui sort

circonscrit à l'élément $\omega$. Son ouverture sera $\frac{\omega \cos\theta}{4\pi r^2}$, en désignant par $\theta$ l'angle aigu EO$z$, compris entre la droite OE et la verticale extérieure O$z$; abstraction faite de l'absorption de la chaleur qui a lieu dans l'atmosphère, la portion de la chaleur $v\rho q \mathrm{F}ydt$ qui parviendrait à l'élément $\omega$ serait donc le produit $\frac{\omega \cos\theta}{4\pi r^2} . v\rho q\, \mathrm{F}ydt$. Imaginons un second cône extrêmement aigu comme le premier, qui ait son sommet au point O, pour axe la droite OE, et dont l'ouverture soit représentée par $\sigma$; en prenant pour $v$ une tranche extrêmement mince de ce second cône, perpendiculaire à son axe, et désignant par $\varepsilon$ son épaisseur, on aura $v = 4\pi r^2 \sigma\varepsilon$; au moyen de quoi la quantité précédente deviendra

$$\sigma\varepsilon\omega \cos\theta . \rho q \mathrm{F}ydt.$$

Je représente par le produit $\omega\sigma \cos\theta . \mathrm{R}dt$, la quantité de chaleur provenant de l'enceinte stellaire, de la partie du second cône située au-delà de la tranche $\rho v$, et de cette tranche même, qui traverserait pendant l'instant $dt$ sa face la plus voisine du point O, et qui atteindrait ensuite l'élément $\omega$, si l'on n'avait point égard à l'absorption atmosphérique entre cette même face et $\omega$; de manière que si l'on n'avait pas non plus égard à l'absorption qui a lieu dans l'autre partie du cône, le facteur inconnu R serait égal à la somme des valeurs de $\varepsilon\rho q \mathrm{F}y$, étendue à toute cette même partie du cône, et augmentée de la quantité de chaleur stellaire, rapportée aux unités de temps et de surface, qui parvient à l'extrémité de l'atmosphère suivant la direction EO. Pour déterminer la vraie valeur de R, je désignerai par R′ ce que devient R à la face de la tranche $\rho v$ la plus éloignée de O. L'excès de $\mathrm{R}'\omega\sigma \cos\theta\, dt$ sur $\mathrm{R}\omega\sigma \cos\theta\, dt$ se composera évidemment de la portion de chaleur absorbée par $\rho v$, dont on retranchera la chaleur provenant de cette tranche; mais d'après le n° 13, cette portion de chaleur absorbée sera égale au produit de $\rho\varepsilon q$ et de $\mathrm{R}'\omega\sigma \cos\theta\, dt$, on aura donc

$$\mathrm{R}'\omega\sigma \cos\theta\, dt - \mathrm{R}\omega\sigma \cos\theta\, dt = \mathrm{R}'\rho\varepsilon q\omega\sigma \cos\theta\, dt - \rho\varepsilon q\omega\sigma \cos\theta . \mathrm{F}ydt.$$

Or, en observant que R′ est ce que devient R quand on y met $r + \varepsilon$ au lieu de $r$, développant suivant la puissance de $\varepsilon$ et négligeant son carré, on a

$$\mathrm{R}' = \mathrm{R} + \frac{d\mathrm{R}}{dr}\varepsilon;$$

si donc on supprime les facteurs communs, l'équation précédente se réduira à

$$\frac{dR}{dr} = \rho q R - \rho q F y.$$

Son intégrale complète est

$$R = e^{\int \rho q dr}(D - \int e^{-\int \rho q dr} \rho q F y dr);$$

D étant la constante arbitraire, $e$ la base des logarithmes népériens, et les deux intégrales $\int \rho q dr$ commençant à une valeur de $r$ que l'on peut choisir à volonté. Je désignerai par $h$ la longueur de la colonne atmosphérique suivant la direction OE, et je fais commencer ces deux intégrales à $r = h$; je suppose en outre que la troisième intégrale contenue dans R soit aussi nulle pour $r = h$, ce qui est permis à cause de la constante arbitraire D. Cette constante sera alors la valeur de R relative à $r = h$; or, si l'on représente par $s$ la température de la partie du ciel qui répond à la direction OE, ou plutôt cette température modifiée par l'absorption de la chaleur qui peut avoir eu lieu dans l'éther, la quantité de chaleur stellaire qui parvient suivant cette direction à l'extrémité de l'atmosphère, et qui atteindrait l'élément $\omega$ pendant l'instant $dt$ sans l'absorption atmosphérique, aura pour expression le produit $\omega\sigma\cos\theta . Fsdt$; la fonction $Fs$ sera donc cette valeur de R qui doit être celle de D; et il en résultera

$$R = e^{\int \rho q dr}(Fs - \int e^{-\int \rho q dr} \rho q F y dr),$$

pour une valeur quelconque de $r$; ce qui s'accorde avec les formules du n° 35.

Maintenant, soit H la valeur de R qui répond à $r = 0$, on aura

$$H = e^{\int_h^0 \rho q dr}\left(Fs - \int_h^0 e^{-\int \rho q dr} \rho q F y dr\right),$$

et le produit $\omega\sigma\cos\theta . Hdt$ exprimera la somme des quantités de chaleur atmosphérique et stellaire qui tombent pendant l'instant $dt$ sur l'élément $\omega$, suivant la direction EO. On peut remplacer l'intégrale $\int \rho q dr$, qui commence à $r = h$, par la différence $\int \rho q dr - \int_0^h \rho q dr$, en supposant que $\int \rho q dr$ commence actuellement à $r = 0$; pourvu que

l'on change les signes des deux autres intégrales, on peut aussi intervertir l'ordre de leurs limites; et de cette manière, la valeur de H prendra la forme

$$H = Fs.e^{-\int_0^h \rho q dr} + \int_0^h e^{-\int \rho q dr} \rho q F y dr. \qquad (9)$$

Cela posé, je désigne, comme dans le n° 163, par $\alpha$ la fraction de la chaleur incidente, suivant la direction EO, qui traverse l'élément $\omega$, et par $Q\omega dt$ la quantité totale de chaleur incidente qui traverse cet élément suivant toutes les directions. Pour déterminer Q, je décris du point O comme centre, et d'un rayon égal à l'unité, une surface hémisphérique au-dessus du plan tangent en O; son élément différentiel aura pour expression $\sin\theta d\theta d\psi$, en appelant $\psi$ l'angle que fait le plan de OE et de Oz avec un plan fixe mené par Oz; si l'on considère comme infiniment petite l'ouverture conique $\sigma$, on aura donc

$$\sigma = \frac{\sin\theta d\theta d\psi}{4\pi};$$

et en substituant cette valeur de $\sigma$ dans l'expression $\alpha\omega\sigma\cos\theta.Hdt$ de la chaleur incidente et absorbée suivant la direction quelconque OE, intégrant ensuite par rapport à $\theta$ et $\psi$, et étendant l'intégrale à tous les élémens de la surface hémisphérique, c'est-à-dire depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et $\psi = 2\pi$, on aura la valeur de $Q\omega dt$; d'où il résultera

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} \alpha H \cos\theta \sin\theta d\theta d\psi.$$

Soit aussi, comme dans le numéro cité, $\xi$ la température égale en tous les points d'une enceinte fermée, et telle que cette enceinte enverrait dans le vide à l'élément $\omega$ une quantité de chaleur équivalente à celle qu'il reçoit effectivement; l'équation de ce numéro, qui devra servir à déterminer $\xi$, sera alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} \alpha H\cos\theta \sin\theta d\theta d\psi = F\xi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \alpha\cos\theta\sin\theta d\theta;$$

et si l'on y substitue la formule (9) au lieu de H, elle deviendra

$$F\xi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\alpha\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\int_0^h \rho q dr}\alpha F s\cos\theta\sin\theta d\theta d\psi \tag{10}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^h\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\int\rho q dr}\alpha\rho q F y\cos\theta\sin\theta dr d\theta d\psi.$$

(209). La fonction F renferme une quantité C indépendante de la température et que rien ne pourrait déterminer (n° 26); mais cette constante disparaît de l'équation (10). En effet, si l'on y met C à la place de chacune des trois quantités $F\xi$, $Fs$, $Fy$, on aura

$$C\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\alpha\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{C}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\int_0^h \rho q dr}\alpha\cos\theta\sin\theta d\theta d\psi$$
$$+ \frac{C}{2\pi}\int_0^h\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\int\rho q dr}\alpha\rho q\cos\theta\sin\theta dr d\theta d\psi;$$

or, en intégrant par partie et observant que $\int\rho q dr$ s'évanouit par hypothèse à la limite $r = 0$, on a

$$\int_0^h e^{-\int q\rho dr}\rho q dr = 1 - e^{-\int_0^h \rho q dr};$$

ce qui rend identique l'équation précédente. La partie de cette fonction F, qui varie avec la température, a aussi pour facteur une constante $g$, que l'on ne pourrait pas non plus déterminer, mais qui disparaît également de l'équation (10), comme étant un facteur commun à tous les termes, après la suppression de ceux qui dépendent de C. L'équation (10) ne contient donc que l'inconnue $\xi$, et les quantités $\rho$, $q$, $y$, $h$, $s$, $\alpha$, qui sont des fonctions déterminées des trois variables $r$, $\theta$, $\psi$, ou de deux, ou d'une seulement d'entre elles; mais ces fonctions, dont plusieurs, et particulièrement la température $y$ et la densité $\rho$, dépendent aussi de la variable $t$, ne nous sont aucunement connues; en sorte que l'équation (10), quoiqu'elle renferme la solution complète de la question relative à l'échange de chaleur entre la terre d'une part, et d'une autre part l'atmos-

phère et les étoiles, ne peut pas servir, dans l'état actuel de nos connaissances, à déterminer l'inconnue $\xi$ du problème.

Toutefois, cette équation donne lieu à une remarque qui nous sera utile dans la suite; elle nous fait voir que l'influence sur la valeur de $\xi$, des inégalités diurnes et annuelles de la température $y$ de l'air en chaque point de l'atmosphère, est beaucoup affaiblie par cette circonstance que la fonction $Fy$ est multipliée sous le signe $\int$ par $\cos\theta$; lequel facteur est très petit pour les colonnes atmosphériques qui s'écartent le moins de l'horizon, c'est-à-dire pour celles qui sont les plus longues, et dont la densité décroît avec le moins de rapidité. Cette influence sera beaucoup moindre, par exemple, que sur la température désignée par U dans le n° 201, et déterminée par la formule (8); car, dans les intégrales que cette formule renferme, les quantités qui dépendent de la chaleur atmosphérique ne sont pas multipliées par $\cos\theta$, comme dans l'équation (10); d'où l'on peut conclure que les inégalités de température, dues à celles de cette chaleur, seront bien plus sensibles dans U que dans la valeur de $\xi$. Si l'on suppose, en conséquence, les variations de $\xi$ très petites par rapport à celles de la température $\eta$ de la couche d'air en contact avec la terre, et surtout par rapport à celles de la chaleur solaire, on pourra, dans le calcul des inégalités diurnes et annuelles de la température extérieure $\zeta$, au moyen de la seconde formule (5) du numéro 163, considérer la température $\xi$ comme invariable; ce qui permettra de déterminer les inégalités diurnes et annuelles de $\zeta$, et par suite celles de la terre près de sa surface, indépendamment des inégalités semblables qui peuvent avoir lieu en tous les points de l'atmosphère. Les lois de celles-ci nous étant inconnues, on sera obligé de recourir à cette hypothèse de la température $\xi$ à très peu près constante; hypothèse que la comparaison des résultats du calcul à l'observation pourra seule justifier complétement.

(210). Maintenant nous allons considérer la partie de la température extérieure $\zeta$, dont la chaleur solaire est la source; et, à cette occasion, nous comparerons entre elles les quantités de cette chaleur qui tombent sur la surface de la terre, soit pendant les différentes parties d'une même année, soit pendant des années entières, séparées par un très long intervalle de temps.

Soient O un point de la surface de la terre, et O′ un point de celle du soleil (fig. 17), C et C′ les centres de ces deux corps, ON et O′N′ les normales extérieures à leurs surfaces, ou les prolongemens de leurs rayons CO et C′O′; appelons $\omega$ et $\omega'$ les élémens de ces surfaces qui comprennent les points O et O′; et désignons, au bout d'un temps quelconque $t$, par $r$ la distance OO′, et par $\theta$ et $\theta'$ les angles O′ON et OO′N′. Supposons le soleil au-dessus de l'horizon du point O, et le point O′ appartenant à sa partie visible; de sorte que ces deux angles $\theta$ et $\theta'$ soient aigus, et qu'il y ait échange de chaleur entre $\omega$ et $\omega'$. Par un raisonnement semblable à celui du n° 20, on verra que la quantité de chaleur émise pendant l'instant $dt$ par le soleil, à travers l'élément $\omega'$ de sa surface, et qui viendrait tomber sur l'élément $\omega$ de la surface de la terre, abstraction faite de l'absorption atmosphérique, aura pour expression

$$\frac{\omega\omega' \cos\theta \cos\theta'}{4\pi r^2} S' dt;$$

S′ étant une quantité de chaleur rapportée aux unités de surface et de temps, qui pourra varier avec la position du point O′, et pour un même point O′ avec l'angle $\theta'$. Pour conclure de cette expression la quantité totale de chaleur solaire qui tombe à chaque instant sur $\omega$, il faudra remplacer $\omega'$ par l'élément différentiel de la surface du soleil, puis intégrer et étendre l'intégrale à la portion de surface terminée par le cône tangent qui a son sommet au point O. A cause de la grande distance du soleil à la terre, ce cône sera sensiblement un cylindre, la portion de surface sera la moitié de celle du soleil, et dans l'intégration, on pourra négliger les variations de $r$ et $\theta$. Ensuite, pour avoir égard à l'absorption de la chaleur solaire dans l'atmosphère, il faudra multiplier le résultat de cette intégration par une fraction qui variera avec la longueur et l'état de la colonne atmosphérique suivant la direction de la ligne OO′. Enfin, pour en déduire la portion de chaleur qui pénétrera dans l'intérieur de la terre à travers $\omega$, on multipliera encore la chaleur incidente par une autre fraction qui pourra aussi dépendre de la direction de OO′, ou du moins de l'angle $\theta$, et que nous désignerons par $\epsilon$. De cette manière, en représentant par $\Pi\omega dt$ cette portion de chaleur solaire, on aura

$$\Pi = \frac{\epsilon \cos\theta}{r^2} S;$$

S étant le produit d'une surface et d'une quantité de chaleur. Si l'on compare ce produit S à la quantité de chaleur désignée par $\sigma$ dans la formule (4) du n° 163, on aura

$$\sigma = \frac{1}{r^2} S.$$

La fraction $\epsilon$ est la même que dans cette formule. Elle différera de la fraction qu'on a représentée par $\alpha$ dans le n° 208, si la terre absorbe en différentes proportions, sous un même angle d'incidence, la chaleur solaire et la chaleur atmosphérique.

La quantité S ne pourrait être déterminée directement que par des expériences très nombreuses et très délicates; on verra par la suite comment sa valeur moyenne, ou plutôt celle d'une température qui lui est proportionnelle, peut se déduire de l'observation des inégalités annuelles de température de la terre, à une petite profondeur. Cette quantité est indépendante de la distance du soleil à la terre; elle peut varier avec les taches du disque solaire; elle varie aussi dans de très grands rapports avec l'état plus ou moins serein de l'atmosphère, qui influe sur l'absorption des rayons du soleil. La chaleur solaire éprouve dans l'air parfaitement pur une absorption que l'on suppose beaucoup moindre que celle qui a lieu pour la chaleur rayonnante, émanée de la terre ou des corps non incandescens; toutefois elle n'est pas nulle; et conséquemment, elle doit augmenter ou diminuer avec la longueur du trajet dans l'air suivant la direction OO'. Il s'ensuit que quand le soleil est à l'horizon de O, la quantité S doit être moindre, toutes choses d'ailleurs égales, que quand il atteint le méridien; et il en résulte aussi que dans l'année, cette même quantité doit augmenter ou diminuer avec la déclinaison du soleil dans l'hémisphère auquel le point O appartient. Les lois de l'absorption de la chaleur solaire à travers l'atmosphère n'étant pas connues, ces variations diurnes et annuelles de la quantité S sont également inconnues, et l'on peut seulement supposer qu'elles sont peu considérables. Quant à la loi suivant laquelle la fraction $\epsilon$ peut dépendre de l'angle $\theta$, elle est également inconnue. Dans cet

état de choses, on sera donc obligé d'avoir seulement égard aux variations de $r$ et de $\theta$, en calculant au moyen de la seconde formule (5) du n° 163, la partie de la température extérieure $\zeta$ qui provient de la chaleur solaire. A cause de la grande distance du soleil à la terre, par rapport au rayon du globe, on pourra prendre pour $r$ le rayon vecteur du soleil dans son mouvement apparent autour du centre de la terre, et pour $\theta$ l'angle que fait ce rayon vecteur avec le rayon CO de la terre aboutissant au point O que l'on considère sur sa surface.

Ayant ainsi égard à l'échange de chaleur entre le disque du soleil et l'élément $\omega$, il faudrait, à la rigueur, retrancher de la première intégrale contenue dans le second membre de l'équation (10), sa partie relative à la portion de l'enceinte stellaire, cachée par ce disque; mais cette partie étant très petite par rapport à l'intégrale entière, on peut conserver cette intégrale comme elle est indiquée.

(211). Le produit $\omega \cos \theta$ exprime exactement la projection de l'élément $\omega$ sur le plan perpendiculaire à la droite OO′, ou, à très peu près, sur le plan mené par le point C et perpendiculaire à la droite CC′ qui va du centre de la terre à celui du soleil. D'après cela, si l'on appelle $s$ l'aire de la section faite par ce plan dans le sphéroïde terrestre, on aura $\frac{s}{r^2}\,\text{S}dt$ pour la quantité de chaleur solaire qui tombe, pendant l'instant $dt$, sur la terre entière, et qui se déduit de $\Pi\omega dt$ après avoir omis son facteur $\varepsilon$. On prendra ici pour S la moyenne des valeurs de cette quantité du numéro précédent, qui ont lieu, au même instant, pour tous les points O d'une moitié de la surface du globe, et qui varient d'un point à un autre, quand on a égard à l'absorption atmosphérique. Il est aisé de voir que cette moyenne est indépendante de $t$; par conséquent, si l'on appelle P la quantité de chaleur reçue par la terre pendant un temps donné, on aura

$$\text{P} = \text{S}\int \frac{s\,dt}{r^2},$$

en étendant l'intégrale à cet intervalle de temps. D'ailleurs, si l'on représente par $v$ la longitude vraie du soleil, par $a$ et $\alpha$ le demi-grand axe et l'excentricité de son orbite, et que l'on prenne pour unité la somme des masses du soleil et de la terre, ainsi que le pouvoir attractif de la matière, on a, comme on sait,

$$r^2 dv = \sqrt{a(1-\alpha^2)}\, dt.$$

Il en résultera donc

$$P = \frac{S}{\sqrt{a(1-\alpha^2)}} \int s d\mu.$$

Pour obtenir la valeur de cette intégrale, en tenant compte de la non sphéricité de la terre, je supposerai que l'intervalle auquel répond la quantité P soit un nombre exact de jours sidéraux; ce qui rendra la valeur de P indépendante de l'inégalité des méridiens et de la rotation de la terre. Je regarderai donc la terre comme un solide de révolution; et alors en désignant par $y$ le rayon du sphéroïde qui aboutit au parallèle dont la latitude sera représentée par $\mu$, on aura

$$y = l(1 + h Y_2 + h' Y_3 + h'' Y_4 + \text{etc.});$$

$l$ désignant le rayon d'une sphère équivalente en volume à la terre; $Y_2$, $Y_3$, $Y_4$, etc., représentant des fonctions connues de $\mu$, savoir :

$$Y_2 = \sin^2\mu - \tfrac{1}{3},$$
$$Y_3 = \sin^3\mu - \tfrac{3}{5}\sin\mu,$$
etc.

et $h$, $h'$, $h''$, étant des constantes données. Si la terre était un ellipsoïde, toutes ces constantes seraient nulles, excepté la première qui exprimerait son aplatissement; les observations du pendule montrent que les constantes $h'$, $h''$, etc., sont très petites par rapport à $h$; mais pour savoir si la dissimilitude des deux hémisphères, boréal et austral, influerait sur la valeur de P, je conserverai $h'$ avec $h$, et je négligerai toutes les autres constantes.

Cela étant, supposons que le rayon $y$ appartienne à la section $s$; soient $\beta$ l'inclinaison du plan de cette section sur celui de l'équateur, et $x$ l'angle que fait le rayon $y$ avec l'intersection de ces deux plans; nous aurons

$$\sin\mu = \sin\beta \sin x, \qquad ds = \tfrac{1}{2} y^2 dx;$$

et en négligeant les carrés et le produit de $h$ et $h'$, il en résultera

$$s = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi l^2 \left[1 + h\left(\sin^2\beta - \tfrac{2}{3}\right)\right];$$

en sorte que cette valeur de $s$ étant indépendante de $h'$, celle de P ne dépendra pas non plus de la différence d'aplatissement des deux hémisphères.

L'angle $\beta$ est évidemment le complément de la déclinaison du soleil correspondante à la longitude $v$; en appelant $\gamma$ l'obliquité de l'écliptique, on aura donc

$$\cos\beta = \sin\gamma \sin v,$$

et, par conséquent,

$$s = \pi l^2 [1 + h(\tfrac{2}{3} - \sin^2\gamma \sin^2 v)].$$

Donc, en substituant cette valeur de $s$ dans celle de P, et effectuant l'intégration, nous aurons finalement

$$P = \frac{\pi l^2 S}{\sqrt{a(1-\alpha^2)}}\left\{\left[1 + h\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\sin^2\gamma\right)\right]v + \frac{1}{4}h\sin^2\gamma \sin 2v\right\},$$

pour la quantité de chaleur envoyée à la terre par le soleil, pendant que son rayon vecteur décrit un angle quelconque $v$.

On voit par là qu'à raison de l'aplatissement de la terre, cette quantité de chaleur n'est pas exactement proportionnelle à l'angle $v$; mais comme $\sin 2v$ est nul pour toutes les valeurs de $v$ multiples de $\frac{1}{2}\pi$, il s'ensuit que la valeur de P est la même pour la durée totale de chacune des quatre saisons. On voit aussi que la quantité de chaleur solaire reçue par la terre pendant chaque année variera de siècle en siècle, avec l'excentricité $\alpha$ de l'orbite du soleil et l'obliquité $\gamma$ de l'écliptique; mais les variations de $\alpha$ et de $\gamma$ étant très limitées, celles de P seront toujours très petites; et il ne paraît pas qu'on puisse leur attribuer aucun effet sensible sur la température moyenne du globe.

Si l'on considérait la quantité de chaleur solaire absorbée par la terre, et non pas seulement celle qui tombe sur sa surface et qui est en partie réfléchie, il faudrait avoir égard à la variation du facteur $\epsilon$ de la quantité $\Pi$ du numéro précédent, soit avec l'angle d'incidence $\theta$, soit aussi avec la position du point O, à raison de l'état de la surface en chaque point; et comme le pouvoir absorbant est différent, surtout dans les parties couvertes d'eau et dans les parties de terre ferme, il en résulterait que la portion de chaleur solaire reçue et ab-

sorbée par la terre, ne serait plus la même dans les différentes saisons. Nous avons déjà remarqué (nº 200) que les hémisphères, boréal et austral, absorbent en proportion différente, la chaleur solaire qui tombe pendant l'année entière sur leurs surfaces.

Dans le calcul de la quantité P relative à la terre, ou à une autre planète, si l'on ne tient pas compte de l'absorption atmosphérique, la quantité S sera la même pour toutes les planètes. D'ailleurs, en négligeant l'aplatissement $h$, on aura

$$P = \frac{2\pi^2 l^2 S}{\sqrt{a(1-\alpha^2)}},$$

pour $v = 2\pi$; il s'ensuit donc que les quantités de chaleur solaire qui parviennent aux limites des atmosphères des différentes planètes, pendant les durées entières de leurs révolutions, ne dépendent pas de ces durées, et que pour deux planètes quelconques, elles sont entre elles en raison directe des carrés de leurs rayons $l$, et en raison inverse des racines carrées des paramètres $a(1-\alpha^2)$ de leurs orbites elliptiques; ce qui est un théorème dû à Lambert. Mais on n'en peut rien conclure relativement à leurs températures respectives, faute de connaître la partie de la chaleur solaire qui est absorbée par l'atmosphère de chaque planète, et ensuite la portion de la chaleur non absorbée, qui pénétrera dans l'intérieur de la planète même, d'après l'état de sa surface.

(212). Au bout du temps $t$, désignons par $\varphi$ la déclinaison du soleil, et par $\psi$ l'angle que fait le méridien où il se trouve, avec le méridien du point O; soit toujours $\mu$ la latitude de ce point; $\theta$ étant, ainsi qu'on l'a dit plus haut, la distance angulaire C'CN du soleil au zénith de ce même point O, on aura

$$\cos\theta = \sin\mu \sin\varphi + \cos\mu \cos\varphi \cos\psi,$$

où l'on regardera la latitude $\mu$ et la déclinaison $\varphi$ comme positives ou négatives, selon qu'elles seront boréales ou australes. En désignant, comme dans le numéro précédent, par $\gamma$ et $v$ l'obliquité de l'écliptique et la longitude vraie du soleil, on aura aussi

$$\sin\varphi = \sin\gamma \sin v,$$

et, par conséquent,

$$\cos\theta = \sin\mu \sin\gamma \sin\nu + \cos\mu \cos\psi \sqrt{1 - \sin^2\gamma \sin^2\nu},$$

où l'on devra considérer le radical comme une quantité positive.

Le rayon vecteur $r$ du soleil a pour valeur

$$r = \frac{a(1-\alpha^2)}{1+\alpha\cos(\nu-\varpi)};$$

$a$ et $\alpha$ étant toujours le demi-grand axe et l'excentricité de son orbite, et $\varpi$ désignant la longitude du périgée. Si donc on appelle T le dernier terme de la seconde formule (5) du n° 163, de sorte que l'on ait

$$T = \frac{\iota\sigma\cos\theta}{\lambda+\lambda_1},$$

et si l'on a égard à la valeur de $\sigma$ du n° 210, il en résultera

$$T = h[1+2\alpha\cos(\nu-\varpi)](\sin\mu\sin\gamma\sin\nu + \cos\mu\cos\gamma\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\nu}), \quad (11)$$

en négligeant le carré de $\alpha$ et faisant, pour abréger,

$$h = \frac{\iota S}{(\lambda+\lambda_1)a^2}.$$

Ainsi qu'on l'a expliqué plus haut, on regardera cette quantité $h$ comme indépendante de l'angle $\theta$; ce sera donc une température constante, proportionnelle à l'intensité de la chaleur solaire, telle qu'elle est à la distance moyenne $a$ de la terre au soleil, et après avoir traversé l'atmosphère pour arriver au point O.

De cette manière, la valeur de T se trouve exprimée en fonction de deux angles variables $\psi$ et $\nu$, dont l'un est relatif au mouvement apparent du soleil parallèlement à l'équateur, et l'autre à son mouvement apparent sur l'écliptique. L'angle $\psi$ ne s'étendra jamais à plus d'un jour entier; pendant cette durée, on peut le supposer proportionnel au temps; on aura, en conséquence,

$$\psi = n(t-\tau);$$

$\tau$ étant la valeur de $t$ qui répond au midi du point O, et $n$ désignant la valeur angulaire du mouvement diurne du soleil; de

sorte qu'on ait

$$n = 2\pi\,(365,25),$$

en prenant l'année julienne pour unité de temps. De plus, si l'on compte le temps $t$ à partir de l'équinoxe du printemps boréal, le plus rapproché de l'époque à laquelle ce temps correspond, on aura aussi

$$\nu = 2\pi t + 2\alpha \sin(2\pi t - \varpi),$$

en négligeant toujours le carré de $\alpha$.

(213). Cette valeur de T n'a lieu que quand le soleil est au-dessus de l'horizon du point O, c'est-à-dire, lorsque l'angle $\theta$ n'excède pas $\pm 90°$; quand le soleil sera au-dessous de l'horizon, on aura $T = 0$; si donc on désigne par $\pm\psi_{,}$ les valeurs de $\psi$ qui répondent à $\cos\theta = 0$, et qui sont données par l'équation

$$\sin\mu \sin\gamma \sin\nu + \cos\mu \cos\psi_{,} \sqrt{1 - \sin^2\gamma \sin^2\nu} = 0, \quad (12)$$

la quantité T sera une fonction discontinue de $\psi$, dont les valeurs seront données par la formule (11), depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \pm\psi_{,}$ et nulles depuis $\psi = \pm\psi_{,}$ jusqu'à $\psi = \pm\pi$. D'ailleurs, en considérant cette fonction de $\psi$ et de $\nu$ par rapport à la seule variable $\psi$, il est évident, par sa nature, qu'elle redevient la même, zéro ou non, toutes les fois que cet angle $\psi$ augmente de 360°; par conséquent, son expression en série de sinus et de cosinus des multiples de $\psi$ sera donnée par la formule (6), en y prenant $2\pi$ pour l'intervalle $\theta$ des valeurs égales de la fonction.

Cette formule devient alors

$$\varphi t = \frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} \varphi t'\,dt' + \frac{1}{\pi}\Sigma\left[\int_0^{2\pi} \cos i(t - t')\,\varphi t'\,dt'\right]; \quad (13)$$

$i$ étant un nombre entier et positif, et la somme $\Sigma$ s'étendant à toutes les valeurs de $i$, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \infty$. Si l'on y fait

$$t = \psi + \pi, \quad \varphi(\psi + \pi) = f\psi, \quad t' = \psi' + \pi,$$

elle prendra la forme

$$f\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\psi'\,d\psi' + \frac{1}{\pi}\Sigma\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos i(\psi - \psi')\,f\psi'\,d\psi'\right];$$

mais T étant zéro depuis $\psi = \pm\psi_{,}$ jusqu'à $\psi = \pm\pi$, si l'on prend T pour la fonction $f\psi$, les intégrales ne devront plus s'étendre que

depuis $\psi' = -\psi_{,}$ jusqu'à $\psi' = \psi_{,}$; en sorte que l'on aura

$$f\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\psi_{,}}^{\psi_{,}} f\psi' d\psi' + \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\psi_{,}}^{\psi_{,}} \cos i(\psi - \psi') f\psi' d\psi\right].$$

Or, si l'on met dans cette formule, à la place de $f\psi'$ la formule (11), dans laquelle on fera $\psi = \psi'$, on trouve que les intégrations relatives à $\psi'$ s'effectuent immédiatement, et il en résulte

$$f\psi = \frac{h}{\pi}[1 + 2\alpha\cos(\nu - \varpi)]\Big\{\psi_{,}\sin\mu\sin\gamma\sin\nu + \sin\psi_{,}\cos\mu\sqrt{1 - \sin^2\gamma\sin^2\nu}$$
$$+ 2\sin\mu\sin\gamma\sin\nu\,\Sigma\frac{1}{i}\sin i\psi_{,}\cos i\psi$$
$$+ \cos\mu\sqrt{1 - \sin^2\gamma\sin^2\nu}\,\Sigma\left[\frac{\sin(i+1)\psi_{,}}{i+1} + \frac{\sin(i-1)\psi_{,}}{i-1}\right]\cos i\psi\Big\}.$$

Cette expression de $f\psi$ sera donc celle de T, en série de cosinus des multiples de $\psi$, que l'on pourra écrire de cette autre manière :

$$T = h[1 + 2\alpha\cos(\nu - \varpi)]\,(V + V_{,}\cos\psi + V_{,,}\cos 2\psi + \text{etc.}), \quad (14)$$

en comprenant le diviseur $\pi$ dans la constante $h$, et faisant, pour abréger,

$$V = \psi_{,}\sin\mu\sin\gamma\sin\nu + \sin\psi_{,}\cos\mu\sqrt{1 - \sin^2\gamma\sin^2\nu},$$
$$V_{,} = 2\sin\psi_{,}\sin\mu\sin\gamma\sin\nu$$
$$+ (\psi_{,} + \sin\psi_{,}\cos\psi_{,})\cos\mu\sqrt{1 - \sin^2\gamma\sin^2\nu},$$
$$V_{,,} = 2\sin\psi_{,}\cos\psi_{,}\sin\mu\sin\gamma\sin\nu$$
$$+ \tfrac{2}{3}(2\cos^2\psi_{,} + 1)\sin\psi_{,}\cos\mu\sqrt{1 - \sin^2\gamma\sin^2\nu},$$

etc.

(214.) Ayant fait usage de la double valeur $\pm\psi_{,}$ pour parvenir à cette expression de T, on y devra actuellement considérer $\psi_{,}$ comme une quantité positive. Cet angle ne devra pas non plus excéder 180°. Pour $\nu = 0$, $= 180°$, $= 360°$, il sera égal à 90°, quelle que soit la latitude $\mu$. Depuis $\nu = 0$ jusqu'à $\nu = 180°$, il surpassera 90° ou sera moindre, selon que cette latitude sera boréale ou australe ; le contraire aura lieu depuis $\nu = 180°$ jusqu'à $\nu = 360°$.

En faisant successivement, dans l'équation (12), $\psi_{,} = 0$ et $\psi_{,} = 180°$, c'est-à-dire, $\cos\psi_{,} = \pm 1$, on en déduit

$$\sin\nu = \pm\frac{\cos\mu}{\sin\gamma},$$

pour les valeurs de $\sin v$ qui répondent à ces deux valeurs extrêmes de $\psi_{,}$. Il s'ensuit que si l'on a $\cos\mu > \sin\gamma$, ou $\mu < 90^\circ - \gamma$, abstraction faite du signe, ces valeurs de $\sin v$ surpasseront l'unité, et celles de $v$ seront imaginaires. Dans ce cas, l'angle $\psi_{,}$ n'atteindra donc pas les limites zéro et 180°. D'après l'équation (12), ses plus grandes valeurs répondront à $v = 90^\circ$ et $v = 3.90^\circ$, et elles seront déterminées par l'équation

$$\cos\psi_{,} = \mp \tang\gamma \tang\mu,$$

qui donnera effectivement, dans le cas dont il s'agit, deux valeurs de $\psi_{,}$, l'une plus grande et l'autre plus petite que 90°. Quand on aura $\mu = \pm(90^\circ - \gamma)$, l'angle $\psi_{,}$ atteindra les limites zéro et 180°; et ce sera pour $v = 90^\circ$ et $v = 3.90^\circ$. Enfin dans les hautes latitudes boréales ou australes, où l'on aura $\mu > \pm(90^\circ - \gamma)$, l'angle $\psi_{,}$ atteindra aussi ces mêmes limites, mais pour des valeurs de $v$ moindres que 90° et 3.90°; et de plus, il y aura alors un intervalle dans ces valeurs de la longitude du soleil, pour lequel cet astre sera constamment au-dessus ou au-dessous de l'horizon du point O.

A raison de cet intervalle, l'angle $\psi_{,}$ sera, dans ce dernier cas, une fonction discontinue de la variable $v$. Pour fixer les idées, supposons que la latitude $\mu$ soit boréale, de sorte qu'on ait $\mu > 90^\circ - \gamma$. Soit $v_{,}$ le plus petit angle positif, déterminé par cette équation

$$\cos v_{,} = \frac{\cos\mu}{\sin\gamma}:$$

depuis $v = 0$ jusqu'à $v = 90^\circ - v_{,}$, la valeur de $\psi_{,}$ en fonction de $v$ sera donnée par l'équation (12), et pour $v = 90^\circ - v_{,}$, elle atteindra 180°; depuis $v = 90^\circ - v_{,}$ jusqu'à $v = 90^\circ + v_{,}$, le soleil sera constamment au-dessus de l'horizon du point O, et l'on aura $\psi_{,} = 180^\circ$; depuis $v = 90^\circ + v_{,}$ jusqu'à $v = 3.90^\circ - v_{,}$, cet angle $\psi_{,}$ sera de nouveau déterminé par l'équation (12), et en particulier pour $v = 3.90^\circ - v_{,}$, sa valeur sera zéro; depuis $v = 3.90^\circ - v_{,}$ jusqu'à $v = 3.90^\circ + v_{,}$, le soleil sera toujours au-dessous de l'horizon du point O, et l'angle $\psi_{,}$ aura constamment zéro pour valeur; enfin, depuis $v = 3.90^\circ + v_{,}$ jusqu'à $v = 360^\circ$, l'angle $\psi_{,}$ sera déterminé par l'équation (12).

En substituant l'expression de $\psi_{,}$ en fonction de $v$ dans les valeurs de V, $V_{,}$, $V_{,,}$, etc., on voit que chacune de ces quantités sera en

même temps que $\psi_{,}$, une fonction continue ou discontinue de $v$; mais dans tous les cas, chacune de ces quantités reprendra la même valeur toutes les fois que l'angle $v$ augmentera de 360°; par conséquent, ces fonctions de $v$ pourront s'exprimer en séries de sinus et de cosinus de ses multiples, au moyen de la formule dont on vient de faire usage. Nous allons effectuer cette transformation sur la première de ces quantités; on opérerait de même sur toutes les autres $V_{,}$, $V_{,,}$, etc.; mais dans la suite nous aurons seulement besoin de l'expression de V en série.

(215.) Soit $\psi'_{,}$ ce que $\psi_{,}$ devient quand on y change $v$ en une autre variable $v'$; en appliquant la formule (13) à la fonction V, nous aurons, d'après la valeur précédente de cette quantité,

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{\sin\mu \sin\gamma}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi'_{,} \sin v' dv' \\ & + \frac{\cos\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin^2\gamma \sin^2 v'} \sin\psi'_{,} dv' \\ & + \frac{\sin\mu \sin\gamma}{\pi}\Sigma\left[\int_0^{2\pi}\psi'_{,} \cos i(v-v') \sin v' dv'\right] \\ & + \frac{\cos\mu}{\pi}\Sigma\left[\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin^2\gamma \sin^2 v'} \cos i(v-v') \sin\psi'_{,} dv'\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Supposons que la latitude $\mu$ du point O soit boréale; et considérons d'abord le cas où l'on a $\mu < 90° - \gamma$, de sorte que $\psi'_{,}$ soit une fonction continue de $v'$.

En intégrant par partie, et observant que les valeurs de $\psi'_{,}$ qui répondent aux deux limites $v' = 0$ et $v' = 2\pi$, sont égales, on aura

$$\int_0^{2\pi} \psi'_{,} \sin v' dv' = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi'_{,}}{dv'} \cos v' dv';$$

on aura de même

$$\int_0^{2\pi} \psi'_{,} \cos i(v-v') \sin v' dv' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos(iv-iv'-v')}{i+1} - \frac{\cos(iv-iv'+v')}{i-1}\right]\frac{d\psi'_{,}}{dv'} dv',$$

pour toutes les valeurs de $i$ différentes de l'unité; et pour $i = 1$, on trouve aussi

$$\int_0^{2\pi}\psi'_{,}\cos(v-v')\sin v'dv'=\tfrac{1}{2}\pi^2\sin v+\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{2}\cos(v-2v')-v'\sin v\right]\frac{d\psi'_{,}}{dv'}dv';$$

le terme compris hors du signe $\int$ provenant de ce que l'on a $\psi'_{,}=\frac{1}{2}\pi$ à la limite $v'=2\pi$. D'ailleurs, on tire de l'équation (12)

$$\sin\psi'_{,}\frac{d\psi'_{,}}{dv'}=\frac{\sin\mu\sin\gamma\cos v'}{\cos\mu\,(1-\sin^2\gamma\sin^2 v')^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sin\psi'_{,}=\frac{\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2 v'}}{\cos\mu\,(1-\sin^2\gamma\sin^2 v')^{\frac{1}{2}}},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\psi'_{,}}{dv'}=\frac{\sin\mu\sin\gamma\cos v'}{(1-\sin^2\gamma\sin^2 v')\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2 v'}};$$

au moyen de quoi, nous aurons

$$\int_0^{2\pi}\psi'_{,}\sin v'dv'=\sin\mu\sin\gamma\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 v'dv'}{\Delta},$$

$$\int_0^{2\pi}\psi'_{,}\cos(v-v')\sin v'dv'=\tfrac{1}{2}\pi^2\sin v+\tfrac{1}{2}\sin\mu\sin\gamma\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{2}\cos(v-2v')\right.$$
$$\left.-v'\sin v\right]\frac{\cos v'dv'}{\Delta}$$

$$\int_0^{2\pi}\psi'_{,}\cos i(v-v')\sin v'dv'=\tfrac{1}{2}\sin\mu\sin\gamma\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos(iv-iv'-v')}{i+1}\right.,$$
$$\left.-\frac{\cos(iv-iv'+v')}{i-1}\right]\frac{\cos v'dv'}{\Delta},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\Delta=(1-\sin^2\gamma\sin^2 v')\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2 v'}.$$

Je substitue ces valeurs et celle $\sin\psi'_{,}$ dans la formule (15). Les intégrales relatives à $v'$ des quantités qui ont pour facteur le sinus d'un multiple pair ou impair, ou le cosinus d'un multiple impair de cet angle, se détruisent comme étant composées, entre les limites $v'=0$ et $v'=2\pi$, d'élémens égaux deux à deux et de signes contraires. Relativement à l'intégrale qui renferme $v'$ sous le signe $\int$, en dehors des sinus et cosinus, on a

$$\int_0^{2\pi}\frac{v'\cos v'dv'}{\Delta}=\int_0^{\pi}\frac{v'\cos v'dv'}{\Delta}-\int_0^{\pi}\frac{(v'+\pi)\cos v'dv'}{\Delta}=-\pi\int_0^{\pi}\frac{\cos v'dv'}{\Delta},$$

à cause de $\cos(v'+\pi)=-\cos v'$; et cette dernière intégrale est nulle, comme étant aussi composée d'élémens qui se détruisent deux à

deux. Quant aux intégrales des quantités qui ont pour facteur le cosinus d'un multiple pair de $v'$, on pourra réduire leurs limites à $v'=0$ et $v'=\frac{1}{2}\pi$, en quadruplant leurs valeurs. Cela posé, on trouve

$$V=\tfrac{1}{2}\pi\sin\mu\sin\gamma\sin v+Q+Q_{,}\cos 2v+Q_{,,}\cos 4v+Q_{,,,}\cos 6v+\text{etc.}; \quad (16)$$

$Q$, $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$, etc., étant des quantités indépendantes de $v$. On a en particulier

$$Q=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2 v'}+\frac{\sin^2\mu\sin^2\gamma\cos^2 v'}{\Delta}\right)dv',$$

et pour un indice quelconque $i$, différent de zéro,

$$Q_{i}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2 v'}\cos 2iv'$$
$$-(\cos 2iv'\cos v'+2i\sin 2iv'\sin v')\frac{\sin^2\mu\sin^2\gamma\cos v'}{(4i^2-1)\Delta}\Big]dv'.$$

(216). Toutes ces intégrales $Q$, $Q_{,}$, $Q_{,,}$, etc., s'exprimeront en fonctions elliptiques; ce qui permettra ensuite d'en calculer facilement les valeurs numériques.

Pour la première, on a

$$Q=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2 v'}\,dv'+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\mu\,dv'}{\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2 v'}}\right.$$
$$\left.-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\mu\cos^2\gamma\,dv'}{(1-\sin^2\gamma\sin^2 v')\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2 v'}}\right);$$

ce qui montre que $Q$ dépendra d'une fonction elliptique complète, de chacune des trois espèces, ayant un même module $\frac{\sin\gamma}{\cos\mu}$; quantité moindre que l'unité par hypothèse. En faisant

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\mu}=c, \quad -\sin^2\gamma=n,$$

et employant les notations de Legendre, on aura

$$Q=\frac{2}{\pi}E^1(c)\cos\mu+\frac{2}{\pi}[F^1(c)-\Pi^1(c,n)\cos^2\gamma]\sin\mu\,\text{tang}\,\mu.$$

Mais on sait que les fonctions complètes de troisième espèce s'expriment au moyen de fonctions complètes et incomplètes de pre-

mière espèce et de même module; en faisant

$$n = -c^2 \sin^2\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - \mu$$

l'angle $\varphi$ sera l'amplitude des fonctions incomplètes, et l'on aura (*)

$$\Pi^1(c,n) = F^1(c) + \frac{\tang\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}[F^1(c)E(c,\varphi) - E^1(c)F(c,\varphi)]; \quad (17)$$

par conséquent, la valeur de Q deviendra finalement

$$Q = \frac{2}{\pi}\{E^1(c)\cos\mu + F^1(c)\sin^2\gamma\sin\mu\tang\mu$$
$$- [F^1(c)E(c,\varphi) - E^1(c)F(c,\varphi)]\cos\gamma\sin\mu\}.$$

Si l'on fait $i=1$ dans la valeur de $Q_i$, il vient

$$Q_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}\cos 2\nu' d\nu'$$
$$- \frac{4\sin^2\mu\sin^2\gamma}{3\pi}\int^{\frac{1}{2}\pi}(1+2\sin^2\nu')\frac{\cos^2\nu'}{\Delta}d\nu'.$$

En intégrant par partie, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}\cos 2\nu' d\nu' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\gamma\sin^2\nu'\cos^2\nu' d\nu'}{\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}}$$
$$= -\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}\cos^2\nu' d\nu'$$
$$+ \frac{(\sin^2\gamma - \cos^2\mu)\cos^2\mu}{\sin^2\gamma}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\nu'}{\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}}$$
$$+ \frac{\cos^2\mu}{\sin^2\gamma}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}d\nu';$$

et à cause de $\cos^2\nu' = \frac{1}{2}\cos 2\nu' + \frac{1}{2}$, on en conclut

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}\cos 2\nu' d\nu' = \frac{2(\sin^2\gamma - \cos^2\mu)\cos^2\mu}{3\sin^2\gamma}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\nu'}{\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}}$$
$$+ \frac{(2\cos^2\mu - \sin^2\gamma)}{3\sin^2\gamma}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}.$$

(*) *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 141.

D'ailleurs on a identiquement, d'après ce que $\Delta$ représente,

$$\frac{(1+2\sin^2 \nu')\cos^2 \nu'}{\Delta} = -\frac{(2+\sin^2\gamma)\cos^2\gamma}{\Delta\sin^4\gamma} - \frac{2\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2\nu'}}{\sin^4\gamma} + \frac{1+\cos^2\gamma+2\cos^2\mu}{\sin^4\gamma\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2\nu'}}.$$

Cela étant, on aura

$$Q_{,} = \frac{4}{3\pi\sin^2\gamma}\Big[(2+\sin^2\gamma)\cos^2\gamma\sin^2\mu\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\nu'}{(1-\sin^2\gamma\sin^2\gamma')\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2\nu'}}$$
$$+(2-\sin^2\gamma)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2\nu'}\,d\nu'$$
$$-(1+\cos^2\gamma-\sin^2\gamma\cos^2\mu)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\nu'}{\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2\nu'}}\Big];$$

ou, ce qui la même chose,

$$Q_{,} = \frac{4}{3\pi\sin^2\gamma}\Big[(2+\sin^2\gamma)\cos^2\gamma\sin\mu\,\text{tang}\,\mu\,\Pi^1(c,n)$$
$$+(2-\sin^2\gamma)\cos\mu E^1(c)-(1+\cos^2\gamma-\sin^2\gamma\cos^2\mu)\frac{F^1(c)}{\cos\mu}\Big],$$

et en éliminant $\Pi^1(c,n)$ au moyen de l'équation (17), il en résulte

$$Q_{,} = \frac{4}{3\pi\sin^2\gamma}\{[F^1(c)E(c,\varphi)-E^1(c)F(c,\varphi)](2+\sin^2\gamma)\cos\gamma\sin\mu$$
$$+(2-\sin^2\gamma)\cos\mu E^1(c)-(2\cos^2\gamma\cos^2\mu+\sin^4\gamma\sin\mu\,\text{tang}\,\mu)F^1(c)\}.$$

A l'égard des quantités $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$, etc., il nous suffira de connaître une limite de leurs valeurs. Or, en intégrant par partie, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2\nu'}\cos 2i\nu'\,d\nu' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\gamma\sin 2i\nu'\sin\nu'\cos\nu'\,d\nu'}{2i\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2\nu'}};$$

l'expression générale de $Q_{,}$ peut donc se changer en celle-ci :

$$Q_{,} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big[\frac{\sin^2\gamma\sin 2i\nu'\sin\nu'}{2i\sqrt{\cos^2\mu-\sin^2\gamma\sin^2\nu'}}$$
$$-\frac{(\cos 2i\nu'\cos\nu'+2i\sin 2i\nu'\sin\nu')\sin^2\mu\sin^2\gamma}{(4i^2-1)\Delta}\Big]\cos\nu'\,d\nu';$$

mais si l'on met dans cette formule l'unité au lieu de $\sin 2iv'$ et $\cos 2iv'$, et qu'on y change le signe du terme divisé par $\Delta$, il est évident qu'elle sera augmentée en grandeur absolue; on aura donc, abstraction faite du signe,

$$Q_i < \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2i}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\gamma\sin v'\cos v' dv'}{\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2 v'}} + \frac{2i\sin^2\mu}{4i^2-1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\gamma\sin v'\cos v' dv'}{\Delta} + \frac{\sin^2\mu}{4i^2-1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\gamma\cos^2 v' dv'}{\Delta}\right].$$

Les deux premières intégrales s'obtiennent par les règles ordinaires, et ont pour valeurs

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\gamma\sin v'\cos v' dv'}{\sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma\sin^2 v'}} = \cos\mu - \sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\gamma\sin v'\cos v' dv'}{\Delta} = \frac{1}{\sin\mu}\left[\frac{1}{2}\pi - \mu - \text{arc}\left(\cos = \frac{\sin\mu}{\cos\gamma}\right)\right].$$

En fonctions elliptiques la valeur de la troisième est

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\gamma\cos^2 v' dv'}{\Delta} = \frac{F^1(c)}{\cos\mu} - \Pi^1(c,n)\frac{\cos^2\gamma}{\cos\mu};$$

ou bien, en vertu de la formule (17),

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\gamma\cos^2 v' dv'}{\Delta} = \frac{\sin^2\gamma}{\cos\mu}F^1(c) - \frac{\cos\gamma}{\sin\mu}\left[F^1(c)E(c,\varphi) - E^1F(c,\varphi)\right].$$

Pour tous les indices $i$ différens de zéro, on aura donc

$$\frac{\pi}{4}Q_i < \frac{1}{2i}\left(\cos\mu - \sqrt{\cos^2\mu - \sin^2\gamma}\right) + \frac{2i\sin\mu}{4i^2-1}\left[\frac{1}{2}\pi - \mu - \text{arc}\left(\cos = \frac{\sin\mu}{\cos\gamma}\right)\right] + \frac{\sin\mu}{4i^2-1}\left\{\text{tang}\,\mu\sin^2\gamma F^1(c) - \cos\gamma\left[F^1(c)E(c,\varphi) - E^1(c)F(c,\varphi)\right]\right\}.$$

A l'équateur, où l'on a $\mu = 0$, on aura

$$Q = \frac{2}{\pi}E^1(c),$$

$$Q_1 = \frac{4}{3\pi\sin^2\gamma}\left[(1 + \cos^2\gamma)E^1(c) - 2\cos^2\gamma F^1(c)\right],$$

et généralement

$$Q_i < \frac{2(1-\cos\gamma)}{i\pi}.$$

Si l'on avait $\gamma = 0$, cette limite de $Q_i$ serait zéro; il faudrait donc que $Q_i$ le fût aussi; ce qui résulte, en effet, de la valeur de $Q_i$ du numéro précédent, quand on y fait $\mu = 0$ et $\gamma = 0$. Le module $c$ est $\sin\gamma$ dans le cas de $\mu = 0$; en développant les fonctions elliptiques contenues dans la valeur précédente de $Q_i$, suivant les puissances de $c^2$ ou de $\sin^2\gamma$, on a

$$E^1(c) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\sin^2\gamma + \text{etc.}, \quad F^1(c) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\sin^2\gamma + \text{etc.};$$

ce qui réduit aussi à zéro cette valeur de $Q_i$ dans le cas de $\gamma = 0$, et celle de $Q$ à l'unité. Mais on a réellement

$$c = \sin\gamma = \sin 23^\circ 28';$$

les tables de Legendre donnent, en logarithmes ordinaires,

$$\log E^1(c) = 0{,}1779800, \quad \log F^1(c) = 0{,}2146639,$$

et l'on en déduit

$$Q = 0{,}95910, \quad Q_1 = 0{,}04132, \quad Q_i < \frac{1}{i}(0{,}05265).$$

Si l'on prend pour $\mu$ la latitude de Paris, on aura

$$\mu = 48^\circ 50', \quad \gamma = 23^\circ 28', \quad \varphi = 41^\circ 10', \quad c = \frac{\sin\gamma}{\cos\mu} = \sin 37^\circ 14';$$

et, d'après les mêmes tables,

$$E^1(c) = 1{,}41513, \qquad F^1(c) = 1{,}75490,$$
$$E(c,\varphi) = 0{,}69511, \qquad F(c,\varphi) = 0{,}73514;$$

d'où l'on conclut

$$Q = 0{,}66662, \quad Q_1 = 0{,}00253.$$

On aura, en même temps,

$$Q_{\prime} < \frac{1}{i}(0,08538) + \frac{i(0,21145) + 0,14720}{4i^2 - 1};$$

d'où l'on déduit

$$Q_{\prime\prime} < 0,08070, \quad Q_{\prime\prime\prime} < 0,05080, \quad \text{etc.};$$

mais les valeurs de ces quantités sont encore beaucoup au-dessous de ces limites.

(217). L'expression de V changera de forme dans le cas des latitudes circompolaires, pour lesquelles on a $\mu > 90^\circ - \gamma$; la latitude $\mu$ étant toujours supposée boréale. D'après ce qu'on a dit dans le n° 214, chacune des intégrales que contient la formule (15) devra être divisée en cinq parties; $\nu_{\prime}$ désignant, comme dans ce numéro, l'angle aigu dont le cosinus est $\frac{\cos \mu}{\sin \gamma}$, ces cinq parties auront pour limites zéro et $\frac{1}{2}\pi - \nu_{\prime}$, $\frac{1}{2}\pi - \nu_{\prime}$ et $\frac{1}{2}\pi + \nu_{\prime}$, $\frac{1}{2}\pi + \nu_{\prime}$ et $\frac{3}{2}\pi - \nu_{\prime}$, $\frac{3}{2}\pi - \nu_{\prime}$ et $\frac{3}{2}\pi + \nu_{\prime}$, $\frac{3}{2}\pi + \nu_{\prime}$ et $2\pi$; dans la première, la troisième et la cinquième, l'angle $\psi_{\prime}$ sera déterminé par l'équation (12); dans la seconde, on aura $\psi_{\prime} = \pi$, et dans la quatrième, $\psi_{\prime} = 0$. Ces intégrales se transformeront, comme dans le cas précédent, en fonctions elliptiques; mais l'expression de V qui en résultera étant très compliquée et sans applications utiles, je me dispenserai d'effectuer ces transformations en général, et je me bornerai à considérer les deux cas extrêmes qui répondent à $\nu_{\prime} = 0$ et $\nu_{\prime} = \frac{1}{2}\pi$.

Le premier cas a lieu quand on a $\mu = 90^\circ - \gamma$, c'est-à-dire lorsque le point O appartient au cercle *arctique*, dont la distance au pôle nord est égale à l'obliquité de l'écliptique. La seconde et la quatrième partie de chaque intégrale s'évanouiront, puisque la différence $2\nu_{\prime}$ des limites de chacune d'elles sera zéro; les trois autres parties se réuniront en une seule intégrale qui s'étendra depuis $\nu' = 0$ jusqu'à $\nu' = 2\pi$; et dans toute cette étendue, la quantité $\psi_{\prime}$ sera déterminée par l'équation (12), en y faisant $\mu = 90^\circ - \gamma$; par conséquent, dans ce premier cas, la valeur de V s'exprimera encore par la formule (16) appliquée à cette valeur de $\mu$.

On aura, pour cette valeur particulière,

$$Q = \frac{2 \sin \gamma}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 + \frac{\cos^2 \gamma}{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 v'}\right) \cos v' dv',$$

$$Q_{,} = \frac{4 \sin \gamma}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[1 - 2 \sin^2 v' - \frac{(1 + 2\sin^2 v')\cos^2 \gamma}{3(1 - \sin^2 \gamma \sin^2 v')}\right] \cos v' dv';$$

ou bien, en effectuant les intégrations indiquées,

$$Q = \frac{2}{\pi}\left(\sin \gamma + \cos^2 \gamma \log \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma}\right),$$

$$Q_{,} = \frac{4}{3\pi \sin \gamma}\left[2 - \sin^2 \gamma - \frac{(2 + \sin^2 \gamma)\cos^2 \gamma}{\sin \gamma} \log \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma}\right].$$

C'est aussi ce que l'on trouve, au moyen des expressions générales de Q et de $Q_{,}$ en fonctions elliptiques, qu'on a obtenues dans le numéro précédent; car, dans le cas de $\mu = 90^\circ - \gamma$, on a

$$c = 1, \quad \varphi = \gamma, \quad E^1(c) = 1, \quad E(c, \varphi) = \sin \gamma, \quad F(c, \varphi) = \log \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma},$$

ce qui fait disparaître de ces expressions de Q et $Q_{,}$, la fonction $F^1(c)$ qui deviendrait infinie, et les réduit aux valeurs précédentes de ces deux quantités.

L'autre valeur extrême $\frac{1}{2}\pi$ de l'angle $v_{,}$ a lieu au pôle où l'on a $\mu = 90^\circ$; ce qui donne $\cos v_{,} = 0$ et $v_{,} = \frac{1}{2}\pi$. Ce sont les première, troisième et cinquième parties de chacune des intégrales contenues dans la formule (15) qui s'évanouissent, parce que les deux limites de chacune de ces parties sont égales. Dans la quatrième partie, on a $\psi'_{,} = 0$, ce qui la fait également disparaître; dans la seconde, on a $\psi'_{,} = \pi$; et les limites étant $90^\circ \pm \frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire, zéro et $\pi$, il en résulte

$$V = \frac{1}{2} \sin \gamma \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v' dv' + 2\Sigma \int_0^{\pi} \cos i(v - v') \sin v' dv'\right],$$

pour ce que devient la formule (15) dans le cas de $\mu = 90^\circ$. On peut remarquer que cette valeur de $\mu$ rend nulles toutes les quantités $V_{,}$, $V_{,,}$, etc., que renferme la formule (14), et n'y laisse subsister que V;

de sorte qu'en y substituant la valeur de V et effectuant les intégrations relatives à $v'$, on trouve pour l'expression complète de T, en série de quantités périodiques,

$$T = h \sin\gamma \left[1 + 2\alpha \cos(v - \varpi)\right] \left[\frac{1}{2}\pi \sin v + 1 - 2\Sigma \frac{\cos 2iv}{4i^2 - 1}\right]; \quad (18)$$

la somme $\Sigma$ s'étendant toujours à toutes les valeurs du nombre entier $i$, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$.

En faisant $\mu = 90°$ dans la formule (11), et y mettant, comme dans la formule (14), $\pi h$ au lieu de $h$, on a

$$T = \pi h \sin\gamma \sin v [1 + 2\alpha \cos(v - \varpi)],$$

depuis $v = 0$ jusqu'à $v = \pi$. Pour les valeurs de $v$ comprises depuis $v = \pi$ jusqu'à $v = 2\pi$, on doit avoir $T = 0$; pour que ces valeurs de T coïncident avec la formule (18), il faut donc qu'on ait

$$1 - 2\Sigma \frac{\cos 2iv}{4i^2 - 1} = \pm \frac{1}{2}\pi \sin v,$$

selon que l'on a $v < \pi$ ou $v > \pi$. C'est effectivement ce qui résulte d'une formule connue, qui s'est déjà présentée dans le n° 135.

Cet exemple particulier est très propre à montrer comment la quantité V qui est une fonction périodique de $v$, mais discontinue, peut être réduite, néanmoins, en série de sinus et de cosinus des multiples de la variable; réduction indispensable pour l'usage que nous allons faire des formules (3) et (4).

(218). Si l'on substitue maintenant la quantité T du n° 212, à la place de la partie de la seconde formule (5) du n° 163 qui provient de la chaleur solaire, et si l'on met ensuite au lieu de T sa valeur donnée par la formule (14), il en résultera

$$\zeta = \frac{\lambda\xi}{\lambda + \lambda_1} + \frac{\lambda_1\eta}{\lambda + \lambda_1} + h[1 + 2\alpha\cos(v - \varpi)](V + V_1 \cos\psi + V_2 \cos 2\psi + \text{etc.}), \quad (19)$$

pour l'expression complète de la température extérieure.

Dans le calcul des inégalités diurnes et annuelles de la terre, qui résulteront de celles de cette valeur de $\zeta$, on sera obligé, ainsi qu'on l'a

expliqué dans le n° 209, de négliger les inégalités semblables, dont peut être affectée la température $\xi$, et de la considérer comme une quantité constante. S'il s'agit des inégalités diurnes, celles de la température $\nu$ de la couche d'air en contact avec la surface de la terre seront distinctes, d'après ce qu'on a dit précédemment (n° 203), des inégalités diurnes de cette surface même, et tout-à-fait inconnues. On en pourrait faire abstraction, si l'on supposait le pouvoir refroidissant de l'air très petit par rapport au pouvoir rayonnant de la terre, de sorte que $\lambda_1$ fût une très petite fraction de $\lambda$, ce qui permettrait de négliger le terme dépendant de $\nu$ dans la formule (19). Mais si l'on admet que la moyenne des températures qui ont lieu pendant chaque journée entière, soit la même pour la surface de la terre et pour la couche d'air qui la touche, on pourra dans le calcul des inégalités annuelles, considérer $\nu$ comme la température de cette surface même; et alors, quel que fût le rapport de $\lambda_1$ à $\lambda$, il serait possible d'avoir égard à l'influence du pouvoir refroidissant de l'air, sur la température de la terre à la profondeur où les inégalités diurnes ont disparu. Toutefois, comme il n'y a aucune expérience directe qui nous fasse connaître la valeur de ce rapport, et qu'elle ne peut pas non plus se déduire avec assez d'exactitude, des températures observées à différentes profondeurs, on sera obligé de supposer ce rapport très petit et de négliger les termes qui en dépendent, dans le calcul des inégalités diurnes, aussi bien que dans celui des inégalités annuelles. Cette hypothèse paraîtra d'ailleurs très admissible, si l'on observe que le pouvoir rayonnant $\lambda$ doit approcher beaucoup du *maximum* à la surface de la terre, labourée ou couverte de végétaux et dénuée de poli, tandis que le pouvoir refroidissant $\lambda_1$ de l'air est, au contraire, peu considérable à raison du peu de densité de ce fluide.

Cela posé, je partagerai en trois parties la valeur de $\zeta$ donnée par la formule (19), dans laquelle on fera $\lambda_1 = 0$ : l'une sera la partie de cette formule, indépendante des inégalités diurnes et annuelles, ou la température moyenne extérieure; l'autre comprendra toutes les inégalités annuelles, et la troisième les inégalités diurnes.

Si l'on substitue pour V la formule (16), et pour $\nu$ sa valeur (n° 212); que l'on néglige le carré de $\alpha$, et que l'on désigne par $\zeta_1$ la première partie de $\zeta$, on trouve simplement

$$\zeta_{,} = \xi + hQ;$$

quantité indépendante de l'excentricité de l'orbite solaire et de la position du périgée, de sorte qu'elle ne peut varier, de siècle en siècle, qu'à raison de la température $\xi$, déterminée par l'équation (10), et de l'obliquité de l'écliptique contenue dans l'expression de Q.

Soit $\zeta'$ la seconde partie de $\zeta$; par la substitution des valeurs de $v$ et de V dans la formule (19), on obtient

$$\zeta' = h(\tfrac{1}{2}\pi \sin\mu \sin\gamma - 2\alpha Q)\sin 2\pi t + h(\pi\alpha \sin\mu \sin\gamma + Q_{,})\cos 4\pi t$$
$$+ hQ_{,,}\cos 8\pi t + hQ_{,,,}\cos 12\pi t + \text{etc.};$$

en conservant l'excentricité $\alpha$ dans les deux premiers termes seulement, et observant qu'à l'époque actuelle la longitude $\varpi$ du périgée diffère très peu de trois angles droits.

Désignons aussi par $\zeta''$ la troisième partie de $\zeta$; en négligeant tout-à-fait l'excentricité $\alpha$, et conservant $\psi$ à la place de sa valeur $2\pi(365,25)(t-\tau)$ (n° 212), on aura immédiatement

$$\zeta'' = hV_{,}\cos\psi + hV_{,,}\cos 2\psi + hV_{,,,}\cos 3\psi + \text{etc.}$$

La longitude $v$ du soleil variant très peu pendant un jour, on pourra considérer cet angle comme constant dans les coefficiens $V_{,}$, $V_{,,}$, $V_{,,,}$, etc., de cette formule.

(219). Pour faire coïncider la formule (3) avec cette valeur de $\zeta'$, il faudra prendre

$$m = 2\pi,\quad m' = 4\pi,\quad m'' = 8\pi,\quad m''' = 12\pi,\ \text{etc.},$$
$$\varepsilon = -90^\circ,\ \varepsilon' = 0,\quad \varepsilon'' = 0,\quad \varepsilon''' = 0,\ \text{etc.},$$
$$A'' = hQ_{,,},\ A''' = hQ_{,,,},\ \text{etc.},$$

et en particulier

$$A = h(\tfrac{1}{2}\pi \sin\mu \sin\gamma - 2\alpha Q),$$
$$A' = h(\pi\alpha \sin\mu \sin\gamma + Q_{,}).$$

Si l'on appelle $u'$ la partie correspondante de $u$, c'est-à-dire, la partie de la température de la terre à la profondeur $x$, qui renferme les inégalités annuelles, on aura, d'après la formule (4),

$$
\begin{aligned}
u' = {} & \frac{hb}{D}\left(\frac{1}{2}\pi \sin\mu \sin\gamma - 2\alpha Q\right) e^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{a}} \sin\left(2\pi t - \frac{x\sqrt{\pi}}{a} - \delta\right) \\
& + \frac{hb}{D_{,}}(\pi\alpha \sin\mu \sin\gamma + Q_{,})\, e^{-\frac{x\sqrt{2\pi}}{a}} \cos\left(4\pi t - \frac{x\sqrt{2\pi}}{a} - \delta_{,}\right) \\
& + \frac{hb}{D_{,,}} Q_{,,} e^{-\frac{2x\sqrt{\pi}}{a}} \cos\left(8\pi t - \frac{2x\sqrt{\pi}}{a} - \delta_{,,}\right) \qquad (20) \\
& + \frac{hb}{D_{,,,}} Q_{,,,} e^{-\frac{x\sqrt{6\pi}}{a}} \cos\left(12\pi t - \frac{x\sqrt{6\pi}}{a} - \delta_{,,,}\right) \\
& + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

où l'on fait, pour abréger,

$$b + \frac{\sqrt{\pi}}{a} = D\cos\delta, \quad \frac{\sqrt{\pi}}{a} = D\sin\delta,$$

et pour un indice quelconque $i$, différent de zéro,

$$b + \frac{\sqrt{2i\pi}}{a} = D_i \cos\delta_i, \quad \frac{\sqrt{2i\pi}}{a} = D_i \sin\delta_i;$$

d'où il résulte

$$D^2 = b^2 + \frac{2b\sqrt{2\pi}}{a} + \frac{2\pi}{a^2}, \quad D^2_i = b^2 + \frac{2b\sqrt{2i\pi}}{a} + \frac{4i\pi}{a^2}.$$

Je ferai remarquer que si l'on eût conservé dans la valeur de $\zeta'$ la partie de la température $\eta$ relative aux inégalités annuelles, et qu'on l'eût supposée, comme on l'a dit plus haut, égale à la valeur de $u'$, qui a lieu à la surface, ou qui répond à $x = 0$, on aurait été conduit à une expression de $u'$ en fonction de $x$, de la même forme que la précédente et qui s'en déduit en y remplaçant généralement $\delta_i$ et $D_i$, par des quantités $\delta_i + \delta_i'$ et $D_i + D'_i$, dans lesquelles $\delta_i'$ et $D_i'$ se déduisent aussi de $\delta_i$ et $D_i$ au moyen des équations

$$D_i' \cos\delta_i' = 1 - \frac{b\lambda_i \cos\delta_i}{(\lambda + \lambda_i)D_i}, \quad D_i' \sin\delta_i' = \frac{b\lambda_i \sin\delta_i}{(\lambda + \lambda_i)D_i}. \qquad (21)$$

Comme nous ferons seulement usage de la formule (19), je sup-

prime, pour abréger, le calcul de l'expression plus générale de $u'$, que je me borne à citer.

A la profondeur où les inégalités diurnes ont disparu, ce sera une quantité constante, abstraction faite des variations séculaires, qu'il faudra ajouter à la formule (20) pour obtenir la valeur complète de la température $u$ de la terre. Il s'ensuit donc que le *maximum* de cette température, pendant la durée de l'année entière, répondra à la plus grande valeur positive de $u'$, et le *minimum* à sa plus grande valeur négative. Par conséquent, les époques de ces températures extrêmes seront déterminées par l'équation $\frac{du'}{dt} = 0$. Mais indépendamment de la convergence de la série (20), qui provient, à cette profondeur, des exponentielles contenues dans ses termes successifs, tous ces termes, à partir du second, sont très petits par rapport au premier, à raison des valeurs numériques de $\alpha$, $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$, etc., et en excluant d'abord le cas où la latitude $\mu$ serait aussi très petite. D'après cela, si l'on suppose cette latitude positive, et qu'on désigne par $\theta$ la valeur de $t$ correspondante au *maximum* de température, et par $\theta_{,}$ celle qui répond au *minimum*, on satisfera à l'équation $\frac{du'}{dt} = 0$, en faisant

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{4} + z, \\ \theta_{,} &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{\delta}{2\pi} - \frac{1}{4} + z_{,}; \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$z$ et $z_{,}$ étant des quantités très petites, dont on conservera seulement les premières puissances dans le premier terme de cette équation et qu'on négligera entièrement dans tous les autres.

A ce degré d'approximation, ces inconnues disparaîtront aussi dans le premier terme de la série (20); et si l'on représente par H l'excès du *maximum* sur le *minimum* de température, la valeur de H ne dépendra que de ce premier terme; en sorte qu'à la distance $x$, on aura

$$H = \frac{2bh}{D}\left(\frac{1}{2}\pi \sin\mu \sin\gamma - 2\alpha Q\right) e^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{a}}. \qquad (23)$$

La valeur de $\delta$ étant indépendante de l'angle $\mu$, les valeurs de $\theta$ et $\theta_{,}$

varieront très peu avec la latitude, et seulement à raison des quantités $z$ et $z_{,}$; leur différence, ou l'intervalle de temps compris entre la plus grande et la plus petite température de chaque année, différera fort peu d'une demi-année; dans tous les lieux où les quantités $a$ et $b$, dépendantes de la nature du terrein, seront les mêmes, les époques de ce *maximum* ou de ce *minimum* seront aussi très peu différentes. Toutefois les temps $\theta$ et $\theta_{,}$ étant comptés dans les deux hémisphères à partir d'un même jour de l'année, s'ils répondent dans l'un au *maximum* et au *minimum*, ils répondront dans l'autre au *minimum* et au *maximum*, à raison du changement de signe de $\mu$, en passant d'un hémisphère à l'autre.

Dans le calcul des valeurs de $z$ et $z_{,}$, j'aurai seulement égard aux deux premiers termes de la série (20) et de l'équation $\frac{du'}{dt}=0$; on trouvera alors $z_{,}=-z$, et en outre

$$z=\frac{\mathrm{D}q}{\pi\mathrm{D}_{,}}e^{-\frac{x}{a}(\sqrt{2}-1)\sqrt{\pi}}\sin\left[\frac{x}{a}(\sqrt{2}-1)\sqrt{2\pi}+2\delta-\delta_{,}\right],\ (24)$$

en faisant, pour abréger,

$$(\tfrac{1}{2}\pi\sin\mu\sin\gamma-2\alpha\mathrm{Q})q=\pi\alpha\sin\mu\sin\gamma+\mathrm{Q}_{,};$$

de sorte que $q$ soit une petite fraction, puisque l'on a supposé que $\sin\mu$ ne l'était pas.

Après avoir substitué ces valeurs de $z$ et $z_{,}$ dans les équations (22), et supprimé dans leurs seconds membres les nombres entiers qu'ils pourront contenir, ils exprimeront en fractions de l'année, les temps $\theta$ et $\theta_{,}$ écoulés depuis l'équinoxe du printemps, jusqu'aux époques de la plus grande et de la moindre température. En multipliant ces valeurs de $\theta$ et $\theta_{,}$ par 365,25, on aura les mêmes intervalles de temps exprimés en jours. Si l'on substitue ces mêmes valeurs successivement à la place de $t$, dans la formule (20), et que l'on prenne la demi-somme des résultats, on aura l'excès de la demi-somme des températures extrêmes sur la température moyenne de l'année. En désignant cet excès par G, sa valeur sera, au degré d'approximation où nous nous sommes arrêtés,

$$\mathrm{G}=-\frac{hb}{\mathrm{D}_{,}}(\pi\alpha\sin\mu\sin\gamma+\mathrm{Q}_{,})e^{-\frac{x\sqrt{2\pi}}{a}}\cos\left[\frac{x}{a}(\sqrt{2}-1)\sqrt{2\pi}+2\delta-\delta_{,}\right].\ (25)$$

(220). Ces diverses formules renferment trois constantes $a$, $b$, $h$, dont on déterminera les valeurs de la manière suivante.

Soit H′ ce que devient H à une profondeur $x'$ différente de $x$. En vertu de l'équation (23), on aura

$$\mathrm{H}' = \frac{2bh}{\mathrm{D}}\left(\frac{1}{2}\pi \sin\mu \sin\gamma - 2\alpha \mathrm{Q}\right) e^{-\frac{x'\sqrt{\pi}}{a}},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{H}' = \mathrm{H} e^{-\frac{(x'-x)\sqrt{\pi}}{a}}; \quad (26)$$

équation qui fera connaître la valeur de $a$, d'après les valeurs de H′ et H données par l'observation.

J'ajoute membre à membre les deux équations (22); les quantités $z$ et $z_{,}$ se détruisent à cause de $z + z_{,} = 0$, et l'on en conclut, pour la valeur de $\delta$ en degrés,

$$\delta = \left[\frac{1}{2}(\theta + \theta_{,}) - \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\right] 360°.$$

Mais d'après les valeurs de $\mathrm{D}\sin\delta$ et $\mathrm{D}\cos\delta$, on a

$$\left(b + \frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)\operatorname{tang}\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{a};$$

il en résultera donc

$$b = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\left\{\cot\left[\frac{1}{2}(\theta + \theta_{,}) - \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\right]360° - 1\right\}, \quad (27)$$

pour la valeur de $b$ déduite de celle $a$, et des valeurs de $\theta$ et $\theta_{,}$ données par l'observation à une même profondeur connue $x$.

Les valeurs numériques de $a$ et de $b$ étant ainsi déterminées, on calculera celle de $h$ au moyen de l'équation (23) et de la valeur de H donnée par l'observation à la profondeur $x$ ou à toute autre distance de la surface. Mais cette température $h$ provenant de la chaleur qui a traversé l'atmosphère, elle pourra varier d'une année à une autre, selon que le ciel aura été plus ou moins chargé de

nuages; et pour avoir sa véritable valeur en un lieu déterminé, il faudra prendre la moyenne de plusieurs années consécutives, ou, ce qui est la même chose, il faudra employer dans l'équation (23) la moyenne des valeurs de H qui auront eu lieu pendant ces années. Cette valeur de $h$ devra augmenter quand la latitude $\mu$ diminuera, parce que le ciel est plus pur, en général, quand on s'approche de l'équateur, et aussi parce que les rayons du soleil traversent l'atmosphère dans une moindre épaisseur. Par la même raison, cette température $h$ augmentera, toutes choses d'ailleurs égales, avec la hauteur des lieux au-dessus du niveau des mers; elle ne dépendrait pas de la nature du terrein en chaque lieu, si le pouvoir rayonnant de la surface du sol et la faculté d'absorber la chaleur solaire, qui entrent dans l'expression de $h$ (nº 212), augmentaient ou diminuaient dans un même rapport.

(221). M. Arago a fait placer à l'Observatoire plusieurs thermomètres, enterrés dans le jardin, à des profondeurs différentes où les inégalités annuelles de température sont encore très sensibles. La tige de chaque instrument s'élève jusqu'à la surface du sol et un peu au-dessus; et c'est sur la division adaptée à la partie extérieure de cette tige, que l'on mesure les variations de température, ce qui dispense de retirer le thermomètre de la terre, à chaque observation que l'on veut faire. Mais il en résulte que la température ainsi mesurée sur cette échelle extérieure dépendra de la température de la boule, qui est celle de la terre à la profondeur où l'instrument est enfoncé, et des températures différentes des points de la tige, dans toute sa longueur égale à cette profondeur. La température de la boule est celle que nous avons désignée par $u$ à la profondeur $x$; pour la comparer à la température observée, il faudra donc faire subir à celle-ci une certaine correction dépendante du rapport des volumes de liquide que renferment la tige et la boule de chaque thermomètre. On s'occupe actuellement du calcul de cette correction. Afin de pouvoir faire usage des observations non corrigées que M. Arago m'a communiquées, je supposerai que leurs corrections soient peu considérables; quand elles auront été faites, il faudra en effectuer de semblables sur les valeurs suivantes des constantes $a$, $b$, $h$, ou les calculer de nouveau. Il n'est pas non plus

impossible que les zéros des échelles thermométriques aient un peu changé, soit quand les instrumens ont été enterrés, soit graduellement pendant la durée des observations. C'est pourquoi je n'emploierai dans les calculs suivans que des différences de température observées, et je ne ferai point usage des températures absolues.

A des profondeurs qui varient depuis deux jusqu'à huit mètres, le *maximum* et le *minimum* se sont succédés à un intervalle d'à peu près six mois, et leurs époques ont peu varié d'une année à une autre, pour chaque profondeur. Pendant quatre années d'observations, l'excès du *maximum* sur le *minimum* s'est un peu écarté de sa valeur moyenne; cet écart s'est élevé à un degré en plus et en moins, à la moindre profondeur, et seulement à un dixième de degré, à la plus grande; on doit l'attribuer, en grande partie, aux variations que la température $h$, provenant de la chaleur solaire, éprouve d'une année à une autre; et c'est pour cela qu'il diminue à mesure que la profondeur augmente.

D'après la moyenne de ces quatre années, l'excès du *maximum* sur le *minimum* annuels a été de 1°,414, à la profondeur de 8$^m$,121, et de 2°,482, à celle de 6$^m$,497. En prenant le mètre pour unité, on fera donc

$$x = 6,497, \quad x' = 8,121, \quad H = 2°,482, \quad H' = 1°,414,$$

dans l'équation (26), qui deviendra alors

$$1°,414 = 2°,482 . e^{-\frac{1,624 . \sqrt{\pi}}{a}},$$

d'où l'on tire

$$a = 5,11655.$$

Terme moyen, le *maximum* et le *minimum* ont eu lieu vers le 18 décembre et le 13 juin à la plus grande profondeur, et vers le 15 novembre et le 10 mai à la plus petite; ou autrement dit, les *maxima* sont arrivés à peu près 272 et 239 jours après le 21 mars que l'on peut prendre pour le jour de l'équinoxe, et les *minima*, à peu près 84 et 50 jours après la même époque. Les temps $\theta$ et $\theta_{\prime}$ étant comptés à partir de cette époque, et exprimés en fractions de l'année,

on aura donc

$$x = 6^m,497, \quad \theta = \frac{239}{365,25}, \quad \theta_{,} = \frac{50}{365,25};$$

et si l'on désigne par $\theta'$ et $\theta'_{,}$, ce que ces temps deviennent à la profondeur $x'$, on aura aussi

$$x' = 8^m,121, \quad \theta' = \frac{272}{365,25}, \quad \theta'_{,} = \frac{84}{365,25}.$$

En substituant successivement ces premières et ces dernières valeurs dans l'équation (27), et prenant toujours le mètre pour unité, on en déduit

$$b = 1,10022, \quad b = 1,01417.$$

Ces deux résultats s'accordent d'une manière satisfaisante; en en prenant la moyenne, on a

$$b = 1,05719,$$

pour la valeur numérique de $b$ qui a lieu à Paris, et qui est rapportée, comme celle de $a$, à l'année et au mètre pour unités de temps et de longueur.

Si nous faisons

$$\gamma = 23°28', \quad \alpha = 0,01681,$$
$$\mu = 48°50', \quad Q = 0,66662, \quad Q_{,} = 0,00253,$$

dans l'équation d'où dépend la valeur de $q$, on en déduira

$$q = 0,04089,$$

pour cette valeur à la latitude de Paris. D'après les valeurs de $a$ et $b$ on trouve aussi

$$\delta = 13°52', \quad D = 1,44573, \quad \delta_{,} = 17°34', \quad D_{,} = 1,62282.$$

Je substitue ces différentes valeurs dans la formule (24); je désigne par $z'$ ce que $z$ devient quand on change $x$ en $x'$; on en déduit ensuite

$$z = 0,00456, \quad \text{pour } x = 6^m,497,$$
$$z' = 0,00351, \quad \text{pour } x' = 8^m,121.$$



Ayant ainsi désigné par $\theta'$ et $\theta'_{,}$ ce que deviennent les temps $\theta$ et $\theta_{,}$ par ce changement de $x$ en $x'$, les équations (22) donneront les valeurs de ces quatre quantités exprimées en fractions de l'année, ou bien en jours après les avoir multipliées par 365,25. Cela étant, si l'on représente les nombres de jours écoulés depuis le 21 mars jusqu'aux époques du *maximum* et du *minimum*, par $j$ et $j_{,}$ à la profondeur $x$, et par $j'$ et $j'_{,}$ à la profondeur $x'$, on aura

$$j = 238, \quad j_{,} = 52, \quad j' = 270, \quad j'_{,} = 85.$$

Or, d'après les observations citées plus haut, ces nombres sont

$$j = 239, \quad j_{,} = 50, \quad j' = 272, \quad j'_{,} = 84;$$

ce qui s'accorde d'une manière remarquable avec les résultats du calcul, puisque les différences entre les nombres calculés et observés, n'excèdent pas un ou deux jours en plus ou en moins, malgré la difficulté d'assigner d'une manière précise par l'observation, le jour du *maximum* ou du *minimum*. S'il était possible de déterminer ce jour avec exactitude, la moyenne de ces différences, divisée par 365,25, serait la valeur de la quantité $\delta'$, déduite des équations (21), en y faisant $i=0$, ou, à très peu près, la valeur de $\frac{b\lambda_{,}\sin\delta}{(\lambda+\lambda_{,})b}$; mais les différences dont il s'agit étant de très petites parties du nombre 365,25, on en peut conclure que la quantité $\lambda_{,}$ doit être une très petite fraction de $\lambda$, comme nous l'avons supposé. En général, les comparaisons que j'ai pu faire des résultats du calcul à ceux de l'observation, montrent que l'échange de chaleur rayonnante entre l'atmosphère et la terre, et le pouvoir refroidissant de l'air en contact avec le sol, que nous avons négligés, ont effectivement très peu d'influence sur les inégalités annuelles de la température de la terre.

Je mets actuellement dans l'équation (23) les valeurs connues des constantes qu'elle renferme; puis j'y substitue successivement $6^{m},497$ et $2^{\circ},482$, $8^{m},121$ et $1^{\circ},414$, à la place de $x$ et H; il en résulte deux équations, d'où l'on tire

$$h = 35^{\circ},925, \quad h = 35^{\circ},923;$$

valeurs qui ne diffèrent pas sensiblement l'une de l'autre, et dont je prends la moyenne

$$h = 35^\circ,924,$$

pour la température provenant de la chaleur solaire, en partie absorbée par la terre à Paris, après avoir traversé l'atmosphère.

Je substitue dans la formule (25) cette dernière valeur de $h$, et les valeurs de toutes les autres constantes que cette formule renferme; en désignant par G′ ce que la quantité G devient par le changement de $x$ en $x'$, on en déduit

$$G = -0^\circ,00133, \quad \text{pour } x = 6^m,497,$$
$$G' = 0^\circ,00202, \quad \text{pour } x' = 8^m,121;$$

d'où il résulte qu'à chacune de ces deux profondeurs, la demi-somme des températures extrêmes de l'année ne diffère pas sensiblement de la température moyenne.

Il résulte aussi des observations de M. Arago, que l'excès du *maximum* sur le *minimum* annuel de température a été de 7°,800 à la profondeur de 3m,248, et qu'il s'est élevé à 13°,017 à celle de 1m,624; or, si l'on fait successivement, dans la formule (23),

$$x = 3,248, \quad x = 1,624,$$

on en déduit

$$H = 7^\circ,649, \quad H = 13^\circ,425;$$

ce qui diffère peu des valeurs observées. Cet accord de ces deux observations avec la formule est une confirmation des valeurs numériques de $a$, $b$, $h$, qu'elles n'ont pas servi à déterminer.

(222). On fera coïncider l'expression de $\zeta''$ avec la formule (3), en prenant d'abord les multiples 1, 2, 3, etc., de $\psi$, pour les angles $mt + \epsilon$, $m't + \epsilon'$, etc., c'est-à-dire, les multiples du nombre $2\pi(365,25)$, pour $m$, $m'$, etc., et ceux de $2\pi(365,25)\tau$, pour $-\epsilon$, $-\epsilon'$, etc. On fera, en outre

$$A = hV_{,}, \quad A' = hV_{,,}, \quad A'' = hV_{,,,}, \text{ etc.}$$

Si l'on désigne ensuite par $u''$ la partie de la température $u$ à la profondeur $x$, qui renferme les inégalités diurnes, et que l'on fasse, pour

abréger,

$$\frac{\sqrt{\pi(365,25)}}{a} = \omega,$$

on aura, en vertu de la formule (4),

$$\begin{aligned} u'' = \frac{hbV_1}{D'} e^{-x\omega} \cos(\psi - x\omega - \delta') \\ + \frac{hbV_2}{D''} e^{-x\omega\sqrt{2}} \cos(2\psi - x\omega\sqrt{2} - \delta'') \\ + \frac{hbV_3}{D'''} e^{-x\omega\sqrt{3}} \cos(3\psi - x\omega\sqrt{3} - \delta''') \\ + \text{etc.}; \end{aligned} \quad (28)$$

où l'on a fait

$$b + \omega\sqrt{i} = D^{(i)} \cos \delta^{(i)}, \quad \omega\sqrt{i} = D^{(i)} \sin \delta^{(i)},$$

et, par conséquent,

$$D^{(i)} = \sqrt{b^2 + 2b\omega\sqrt{i} + 2i\omega^2},$$

pour un indice quelconque $i$.

D'après la valeur de $a$ trouvée dans le numéro précédent, on a

$$\omega = 6,62051;$$

la valeur de l'exponentielle $e^{-\omega}$ est donc peu différente de 0,001; d'où il résulte qu'à un mètre de profondeur, la valeur de $u''$ est déjà très petite, et les inégalités diurnes peuvent être regardées comme insensibles, ou à très peu près.

A la surface où l'on a $x = 0$, la série (28) sera peu convergente; il en faudra prendre un grand nombre de termes pour calculer les valeurs numériques de $u''$; et la loi des variations diurnes sera très compliquée. Mais à une distance peu considérable de la surface, ce calcul et cette loi seront beaucoup plus simples; si l'on prend, par exemple, un demi-mètre au moins pour la profondeur $x$, on aura une expression de $u''$ suffisamment approchée en réduisant la série (28) à son premier terme; ce qui donne

$$u'' = \frac{hbV_1}{D'} e^{-(6,62051)x} \cos[\psi - (379^\circ 20')x - \delta'],$$

en observant qu'exprimée en degrés, la valeur de $\omega$ est

$$\omega = (6,62051)\,\frac{360^\circ}{2\pi} = 379^\circ 20'.$$

Il résulte de là qu'à cette profondeur d'un demi-mètre et au-delà, le *maximum* de température de chaque journée aura lieu quand l'angle $\psi - (379^\circ 20')\,x - \delta'$ sera égal à zéro ou à $180^\circ$, selon que la quantité $V_{,}$ sera positive ou négative. Le *maximum* et le *minimum* arriveront toujours à douze heures l'un de l'autre. Leurs époques seront les mêmes dans tous les lieux où les quantités $a$ et $b$, et par suite l'angle $\delta'$ ont les mêmes valeurs; elles ne dépendront ni du jour de l'année, ni de la latitude du lieu de l'observation; ou du moins, cette latitude et ce jour, en déterminant le signe de $V_{,}$, ne pourront que changer l'heure du *maximum* dans celle du *minimum*, et réciproquement. A cause de

$$\operatorname{tang} \delta' = \frac{\omega}{b + \omega},$$

on a, d'après la valeur de $\omega$ en nombre et celle de $b$ du numéro précédent,

$$\delta' = 40^\circ 46';$$

le *maximum* de température à la profondeur d'un demi-mètre, par exemple, arrivera donc lorsque l'angle horaire $\psi$ aura pour valeur $230^\circ 26'$, ou $50^\circ 26'$, selon que la quantité $V_{,}$ sera positive ou négative, c'est-à-dire à environ huit heures et demi après-midi, ou trois heures et demie auparavant.

Si l'on appelle E l'excès du *maximum* sur le *minimum*, on aura, à cette même profondeur,

$$E = \pm \frac{2hbV_{,}}{D'}\, e^{-3,31026};$$

en employant toujours les valeurs précédentes de $b$ et $\omega$, on aura d'ailleurs

$$D' = 10,13801;$$

et ensuite

$$E = \pm (0,00761)\,hV_{,}.$$

On mettra dans cette valeur de E, à la place de $V_{,}$, son expression, savoir (n° 213) :

$$V_{,} = 2 \sin \psi_{,} \sin \mu \sin \gamma \sin \nu + (\psi_{,} + \sin \psi_{,} \cos \psi_{,}) \cos \mu \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \nu},$$

dans laquelle $\psi_{,}$ est un angle positif et aigu, ou qui ne surpasse pas 90°, et qui est déterminé par l'équation (12). Il en résulte que cette différence E des températures extrêmes d'une même journée varie avec la latitude $\mu$ du lieu de l'observation et avec la longitude $\nu$ du soleil.

Aux équinoxes, on a

$$\sin \nu = 0, \quad \psi_{,} = \tfrac{1}{2}\pi, \quad V_{,} = \tfrac{1}{2}\pi \cos \mu,$$

et par conséquent,

$$E = \tfrac{1}{2}\pi(0,00761) h \cos \mu.$$

La valeur de E est donc la même à ces deux époques. A Paris, on a

$$\mu = 48°50', \quad h = 35°,924, \quad E = 0°,283.$$

A l'équateur cette valeur est moins petite, à cause de $\cos \mu = 1$, et parce que la valeur de $h$ doit surpasser celle qui a lieu partout ailleurs (n° 220).

La différence E n'est pas la même aux deux solstices, excepté à l'équateur. A ces époques, on a

$$\sin \nu = \pm 1, \quad \cos \psi_{,} = \mp \operatorname{tang} \mu \operatorname{tang} \gamma;$$

les signes supérieurs ayant lieu dans le cas du solstice d'été boréal, et les signes inférieurs quand il s'agit du solstice d'hiver. Si l'on fait

$$\gamma = 23°28', \quad \mu = 48°50', \quad h = 35°,924,$$

on en déduira

$$\psi_{,} = 119°46', \quad V_{,} = 1,5224, \quad E = 0°,416,$$

au solstice d'été et à Paris; et

$$\psi_{,} = 60°14', \quad V_{,} = -0{,}3745, \quad E = 0°{,}102,$$

au solstice d'hiver et dans le même lieu.

Quelle que soit la longitude $\nu$ du soleil, on a, à l'équateur,

$$\mu = 0, \quad \psi_{,} = \tfrac{1}{2}\pi, \quad V_{,} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{1 - \sin^2\gamma \sin^2\nu};$$

il en résulte donc,

$$E = \tfrac{1}{2}\pi(0{,}00761)\,h\sqrt{1 - \sin^2\gamma \sin^2\nu};$$

par conséquent, la plus grande valeur de E a lieu aux équinoxes et la plus petite aux solstices, où elle est diminuée dans le rapport de $\cos\gamma$ à l'unité.

(223). Dans son voyage aux Cordillières, M. Boussingault a observé (*) qu'à l'équateur et à diverses hauteurs au-dessus du niveau des mers, la température de la terre, à de très petites distances de la surface, telles qu'à un quart ou un tiers de mètre, est sensiblement la même, aux différentes heures du jour et aux différens jours de l'année. Il a reconnu, en outre, que cette température constante diffère très peu de la moyenne des températures marquées, pendant l'année, par un thermomètre exposé à l'ombre et à l'air libre, au-dessus de la surface du sol; et cette remarque lui a fourni un moyen très simple de déterminer la température climatérique des différens lieux qu'il a parcourus. Toutes ses observations de la chaleur de la terre, près de sa surface, ont été faites dans des lieux abrités du soleil; circonstance à laquelle il faut attribuer la disparition complète des petites inégalités de la température; car d'après la valeur précédente de E, qui répond à une profondeur d'un demi-mètre et à des lieux découverts, les inégalités diurnes ne doivent pas être tout-à-fait insensibles à des profondeurs encore moindres. Quant aux inégalités annuelles, leurs amplitudes sont beaucoup moindres à l'équateur qu'en des lieux dont la latitude n'est pas très petite.

En effet, pour $\mu = 0$ comme pour toute autre valeur de $\mu$, tous

(*) *Annales de Physique et de Chimie*, tome LIII.

les termes de la série (20), à partir du second, sont toujours très petits, à cause des coefficiens $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$, etc.; mais, de plus, pour $\mu = 0$, le premier terme de cette série est aussi très petit, et ce n'est qu'à raison de l'excentricité $\alpha$ de l'orbite du soleil que ce terme conserve une petite valeur, beaucoup inférieure à celle qui répond, par exemple, à la latitude de Paris.

Pour comparer à cette latitude et à l'équateur, les différences de la plus grande à la plus petite température de l'année, qui ont lieu à une même profondeur $x$ et dans un même terrein, et qui proviennent du terme principal de la série (20), je fais, dans l'équation (23),

$$\alpha = 0{,}01681, \quad b = 1{,}05719, \quad D = 1{,}44573, \quad \gamma = 23^\circ\,28',$$

et successivement

$$\mu = 48^\circ\,50' \quad \text{et} \quad Q = 0{,}66662,$$
$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad Q = 0{,}95910.$$

En désignant par $h_{,}$ et par $-H_{,}$ ce que deviennent, dans le second cas, $h$ et H qui répondront au premier, on trouve

$$H = (0{,}655591)he^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{a}}, \quad H_{,} = (0{,}04716)he^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{a}};$$

ce qui montre qu'abstraction faite de la différence qui peut exister entre les températures $h$ et $h_{,}$, la valeur de H serait à celle de $H_{,}$ à peu près dans le rapport de 14 à 1.

En prenant pour $h$ sa valeur précédemment trouvée $h = 35^\circ{,}924$, et faisant $x = 0$, on a $H = 23^\circ{,}563$ pour l'excès de la plus grande température de l'année sur la plus petite, à Paris et à la surface même de la terre. On peut remarquer que cet excès surpasse de près de moitié la différence $18^\circ{,}79 - 1^\circ{,}92$, des températures des mois de juillet et janvier, marquées par le thermomètre suspendu dans l'air (n° 204); ce qui n'empêche pas que la moyenne des températures qu'il indique pendant l'année entière, ne diffère très peu de celle de la surface.

Si l'on prend aussi $h_{,} = 35^\circ{,}924$, et que l'on fasse de même $x = 0$, on aura $H_{,} = 1^\circ{,}694$; mais il faut observer que cette quantité, déjà peu considérable, peut être rendue encore beaucoup moindre, par

la diminution de la température $h_{,}$, dans les lieux abrités du soleil pendant toute l'année.

(224). J'appelle maintenant $u_{,}$ la température moyenne de la terre à la distance $x$ de sa surface, c'est-à-dire la partie de la valeur de $u$ indépendante de inégalités diurnes et annuelles, et qui ne peut éprouver, sur une verticale et à une profondeur déterminées, que des variations extrêmement lentes. Cela suppose, toutefois, quand on détermine $u_{,}$ par l'observation, que l'on prend pour sa valeur la moyenne des températures de plusieurs années consécutives, afin de la rendre aussi indépendante des variations irrégulières de la chaleur solaire, qui ont lieu d'une année à une autre (nº 187).

La valeur complète de $u_{,}$ se compose de la température moyenne extérieure $\zeta_{,}$; d'une partie proportionnelle à $x$, provenant des inégalités séculaires de $\zeta_{,}$ (nº 184), et que je désignerai par $g_{,}x$; d'une autre partie également proportionnelle à $x$, que l'on a désignée par $gx$ dans la formule (1), et qui proviendra, soit des variations de la température de l'espace, soit de la chaleur initiale de la terre, si l'on suppose cette chaleur d'origine encore sensible à l'époque actuelle près de la surface du globe; du premier terme de cette même formule qui doit toujours être équivalent à $\frac{1}{b}g$; enfin de la fonction de $x$ que l'on a représentée par $w$ dans le nº 194. La quantité $\zeta_{,}$ se composant aussi de deux parties, $\xi$ et $hQ$ (nº 218), on aura donc

$$u_{,} = \xi + hQ + g_{,}x + gx + \frac{1}{b}g + w.$$

Le coefficient Q du second terme variera uniquement, à raison de l'obliquité de l'écliptique $\gamma$, qui entre dans son expression. Pour en calculer la valeur, on pourra, pendant plusieurs siècles, avant ou après l'époque actuelle, supposer l'augmentation ou la diminution de $\gamma$ proportionnelle au temps, ou prendre pour l'angle $\gamma$ sa valeur actuelle, augmentée ou diminuée du produit $(0'',4569)t$, dans lequel le temps $t$ est toujours exprimé en années. Mais cette valeur approchée de $\gamma$ ne suffirait pas pour déduire de Q la valeur de $g_{,}$. En effet, le terme $g_{,}x$ de $u_{,}$ ne dépend pas seulement des variations de l'obliquité de l'écliptique qui ont eu lieu depuis quelques siècles; elle dépend de la grandeur et de la loi de ses variations pendant toute la durée de leur période; pour déterminer la valeur

de $g_{\prime}$, il faudrait donc employer dans celle de Q, l'expression de $\gamma$ en sinus et cosinus d'angles qui varient très lentement; expression qui n'est pas connue dans l'état actuel de la science, et dont l'obliquité qui a lieu maintenant, augmentée et diminuée de $(0'',4569)t$, n'est qu'une valeur approchée. Nous ne pouvons donc pas calculer la quantité $g_{\prime}$; dans la formule précédente, cette quantité s'ajoutera à $g$ et formera une petite partie du coefficient de $x$, que l'on détermine en chaque lieu par l'observation.

La quantité $\mathcal{E}$ que contient la valeur de $w$ donnée par la formule (5) étant égale à $\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}$ (n° 185), elle se réduira à l'unité, en négligeant, comme plus haut, $\lambda_1$ par rapport à $\lambda$. Je mets, en outre, dans cette formule (5), pour le nombre $m$ et pour le coefficient A, ceux qui répondent à la principale inégalité de la température extérieure, et qui sont (n° 219)

$$m = 2\pi, \quad A = h(\tfrac{1}{2}\pi \sin\mu \sin\gamma - 2\alpha Q);$$

puis je substitue l'expression de $w$ qui en résulte dans la valeur de $u_{\prime}$: en supprimant de cette valeur la quantité $g_{\prime}$, désignant par D la même quantité que dans la formule (20), et faisant, pour abréger,

$$n = \frac{(0,001925)b^2h}{D^2}\left(\frac{1}{2}\pi\sin\mu\sin\gamma - 2\alpha Q\right)^2,$$

nous aurons

$$u_{\prime} = \xi + hQ + \frac{1}{b}g(1+bx) - nhe^{-\frac{2x\sqrt{\pi}}{a}}. \qquad (29)$$

Dans cette valeur de $u_{\prime}$, la quantité $h$ est une température qui pourrait être exprimée en degrés d'un thermomètre quelconque, pourvu que ce fût le même que pour les températures $h$, $g$, $\xi$; mais dans la valeur de $n$, la quantité $h$ exprime un nombre abstrait, égal au nombre des degrés du thermomètre centigrade, compris dans la température $h$. Il suit des valeurs trouvées pour $a$, $b$, $h$, qu'à une profondeur de 7 à 8 mètres, le dernier terme de la formule précédente ne s'élève plus à 0°,01; de sorte qu'à cette distance de la surface, et au-delà, la température de la terre est sensiblement la même que si la conductibilité de la matière en était indépendante.

La température $\xi$, provenant de la chaleur atmosphérique et de la chaleur stellaire, devrait être déterminée au moyen de l'équation (10); mais les données physiques nous manquant pour cette détermination, j'éliminerai $\xi$ de la dernière formule, au moyen d'une valeur de la température observée à la profondeur d'une vingtaine de mètres, ou au-delà. Soit donc R la température de la terre, à une distance $r$ de sa surface, pour laquelle les inégalités diurnes et annuelles, et par conséquent aussi le dernier terme de l'expression de $u_{,}$, sont insensibles; nous aurons

$$R = \xi + hQ + \frac{1}{b} g(1 + br), \qquad (30)$$

puisqu'à une telle distance la température observée ne diffère pas de la température moyenne $u_{,}$. Par l'élimination de $\xi$ entre cette équation et la précédente, il en résultera

$$u_{,} = R - g(r - x) - nhe^{-\frac{2x\sqrt{\pi}}{a}}, \quad (31)$$

pour l'expression de la température moyenne à une profondeur quelconque $x$.

En faisant $x = 0$ dans cette dernière formule, on aura

$$u_{,} = R - gr - nh,$$

pour la température moyenne de la surface de la terre, en un lieu dont la latitude $\mu$ n'excède pas $90° - \gamma$; laquelle température paraît être, d'après la remarque du n° 207, très peu différente de la température climatérique dans le même lieu.

A Paris, on a

$$g = 0°,0281, \qquad h = 35°,924;$$

en faisant aussi

$$\gamma = 23°28', \quad \mu = 48°50', \quad a = 0,01681, \quad Q = 0,66662,$$

et prenant pour $r$ et R la profondeur et la température des caves de l'Observatoire, savoir :

$$r = 28^{m}, \quad R = 11°,834,$$

on trouve

$$nh = 0^\circ{,}2672;$$

puis il en résulte

$$u_{,} = 10^\circ{,}780;$$

ce qui ne diffère effectivement que de 0°,042 de la moyenne des températures marquées par le thermomètre de l'Observatoire exposé à l'air libre et à l'ombre pendant près de vingt années (n° 187).

(225). Si l'on réunit actuellement les valeurs de $u_{,}$, $u'$, $u''$, on aura l'expression complète de la température $u$ de la terre, sur une verticale déterminée, à une profondeur donnée $x$, et au bout d'un temps $t$ aussi donné. A une profondeur d'environ un mètre ou au-delà, les inégalités diurnes auront disparu, et la valeur de $u$ sera réduite à

$$u = u_{,} + u';$$

à une distance de la surface encore plus grande, et d'environ une vingtaine de mètres ou au-delà, le terme $u'$ disparaîtra également; en sorte que la température moyenne $u_{,}$, ne différera plus sensiblement de $u$. Toutefois, on ne doit pas oublier que dans la formule (29), qui exprime la valeur de $u_{,}$, la profondeur $x$ est toujours une très petite partie du rayon de la terre, moindre qu'un centième de ce rayon par exemple: à de plus grandes distances de sa surface, au-delà, par conséquent, des profondeurs accessibles, le troisième terme de cette formule ne croîtrait plus proportionnellement à $x$; le second terme $h$Q variant d'un point à un autre de la surface, soit à raison de $h$, soit à cause de Q, il devrait être remplacé par un terme dépendant de $x$ et de la loi de cette variation (n° 175); et il en serait de même à l'égard du premier terme $\xi$, s'il varie également d'un point de la surface à un autre.

Je prends la formule (31) pour la valeur de $u_{,}$, et la formule (20), réduite à ses deux premiers termes, pour celle de $u'$; je fais, pour abréger,

$$\mathrm{R} - gr = \mathrm{N},$$

$$\frac{b}{\mathrm{D}}\left(\frac{1}{2}\pi \sin\mu \sin\gamma - 2\alpha \mathrm{Q}\right) = \mathrm{P},$$

$$\frac{b}{\mathrm{D}_{,}}\left(\pi\alpha \sin\mu \sin\gamma + \mathrm{Q}_{,}\right) = \mathrm{P}_{,};$$

il en résultera

$$\begin{aligned} u = \mathrm{N} + gx - nhe^{-\frac{2x\sqrt{\pi}}{a}} \\ + \mathrm{P}he^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{a}}\sin\left(2\pi t - \frac{x\sqrt{\pi}}{a} - \delta\right) \\ + \mathrm{P}_{,}he^{-\frac{x\sqrt{2\pi}}{a}}\cos\left(4\pi t - \frac{x\sqrt{2\pi}}{a} - \delta_{,}\right), \end{aligned} \qquad (32)$$

pour la température de la terre au bout d'un temps $t$ exprimé en fraction de l'année et compté du jour de l'équinoxe du printemps, et à une profondeur $x$ exprimée en mètres et plus grande que l'unité ; relativement à une distance de la surface moindre qu'un mètre, cette formule exprimera seulement la température moyenne de la journée qui répond au temps $t$.

(226). Si l'on veut connaître la température distincte de $u$, correspondante aussi à la profondeur $x$ et au temps $t$, et marquée, comme on l'a dit plus haut (n° 221), sur la partie extérieure de la tige d'un thermomètre dont la boule est enfoncée à cette profondeur, on la déterminera de la manière suivante.

A la température zéro, soient B le volume du liquide contenu dans la boule, et B$\varepsilon$ celui de la portion du même liquide renfermée dans chaque portion d'un mètre de longueur, de la tige supposée cylindrique. Soit aussi $\lambda$, la petite dilatation du liquide pour chaque degré de température. Le premier volume B deviendra $(1 + \lambda u)$ B à la température $u$, et aura ainsi augmenté de la quantité $\mathrm{B}\lambda u$. A l'époque où la température de la boule sera devenue $u$, c'est-à-dire au bout du temps $t$, appelons Z la température de la tige à une profondeur $z$ ; le volume de la portion du liquide, située à cette profondeur, dont la longueur infiniment petite est $dz$, deviendra aussi $(1 + \lambda \mathrm{Z})\mathrm{B}\varepsilon dz$ à cette même époque, et aura donc augmenté de $\mathrm{B}\varepsilon\lambda\mathrm{Z}dz$ ; par conséquent, le volume de tout le liquide qui était contenu dans la tige à la température zéro, se trouvera augmenté d'une quantité égale à $\mathrm{B}\varepsilon\lambda \int_0^x \mathrm{Z}dz$, en même temps que celui de la boule aura éprouvé l'augmentation $\mathrm{B}\lambda u$ ; et si l'on fait abstraction de la dilatation de l'enveloppe ou de la partie solide du thermomètre, la somme de ces deux quanti-

tés exprimera le volume du liquide qui passera dans la partie extérieure de la tige, pendant que les températures de tous les points de l'instrument s'éleveront de zéro à celles qu'ils ont au bout du temps $t$. Cette somme divisée par $B(1+6x)$ qui est le volume total du liquide à la température zéro, et aussi par la dilatation $\lambda$, sera donc, au même instant, la mesure de la température marquée sur l'échelle extérieure; de sorte qu'en désignant par $v$ cette température variable, on aura

$$v = \frac{u + 6\int_0^x Z dz}{1 + 6x}.$$

Si l'on suppose maintenant que $v$ soit la température moyenne de la journée, il faudra prendre pour $u$ la formule (32), et pour Z ce que cette formule devient quand on y met $z$ au lieu de $x$. En y changeant les sinus et cosinus en exponentielles imaginaires, on a

$$\begin{aligned} Z = N + gz - nhe^{-\frac{2z\sqrt{\pi}}{a}} &+ \frac{1}{2\sqrt{-1}} Ph\left[e^{-\frac{z\sqrt{\pi}}{a}(1+\sqrt{-1})+(2\pi t-\delta)\sqrt{-1}} - e^{-\frac{z\sqrt{\pi}}{a}(1-\sqrt{-1})-(2\pi t-\delta)\sqrt{-1}}\right] \\ &+ \tfrac{1}{2} P_{,} h\left[e^{-\frac{z\sqrt{2\pi}}{a}(1+\sqrt{-1})+(4\pi t-\delta_{,})\sqrt{-1}} + e^{-\frac{z\sqrt{2\pi}}{a}(1-\sqrt{-1})-(4\pi t-\delta_{,})\sqrt{-1}}\right]; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^x Z dz = Nx + \tfrac{1}{2} gx^2 - \frac{nha}{2\sqrt{\pi}}\left(1 - e^{-\frac{2x\sqrt{\pi}}{a}}\right) + \frac{ha}{2\sqrt{\pi}} X;$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} X = {} & \frac{1}{2\sqrt{-1}} P\left[(1-\sqrt{-1})e^{(2\pi t-\delta)\sqrt{-1}} - (1+\sqrt{-1})e^{-(2\pi t-\delta)\sqrt{-1}}\right] \\ & - \frac{1}{2\sqrt{-1}} P\left[(1-\sqrt{-1})e^{\left(2\pi t-\frac{x\sqrt{\pi}}{a}-\delta\right)\sqrt{-1}} - (1+\sqrt{-1})e^{-\left(2\pi t-\frac{x\sqrt{\pi}}{a}-\delta\right)\sqrt{-1}}\right] e^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{a}} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}} P_{,}\left[(1-\sqrt{-1})e^{(4\pi t-\delta_{,})\sqrt{-1}} + (1+\sqrt{-1})e^{-(4\pi t-\delta_{,})\sqrt{-1}}\right] \\ & - \frac{1}{2\sqrt{2}} P_{,}\left[(1-\sqrt{-1})e^{\left(4\pi t-\frac{x\sqrt{2\pi}}{a}-\delta_{,}\right)\sqrt{-1}} + (1+\sqrt{-1})e^{-\left(4\pi t-\frac{x\sqrt{2\pi}}{a}-\delta\right)\sqrt{-1}}\right] e^{-\frac{x\sqrt{2\pi}}{a}}, \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$X = P\,[\sin(2\pi t - \delta) - \cos(2\pi t - \delta)]$$
$$- P\left[\sin\left(2\pi t - \frac{x\sqrt{\pi}}{a} - \delta\right) - \cos\left(2\pi t - \frac{x\sqrt{\pi}}{a} - \delta\right)\right] e^{-\frac{x\sqrt{\pi}}{a}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} P_{,}[\sin(4\pi t - \delta_{,}) + \cos(4\pi t - \delta_{,})]$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}} P_{,}\left[\sin\left(4\pi t - \frac{x\sqrt{2\pi}}{a} - \delta_{,}\right) + \cos\left(4\pi t - \frac{x\sqrt{2\pi}}{a} - \delta_{,}\right)\right] e^{-\frac{x\sqrt{2\pi}}{a}}.$$

Cela étant, nous aurons finalement

$$v(1+6x) = u + N6x + \tfrac{1}{2} g6x^2 - \frac{nha6}{2\sqrt{\pi}}\left(1 - e^{-\frac{2x\sqrt{\pi}}{a}}\right) + \frac{h6a}{2\sqrt{\pi}}\,X,$$

pour l'équation qui fera connaître la valeur de $v$ d'après celle de $u$ que donne la formule (32).

A la profondeur $x$, où les exponentielles contenues dans le second membre de cette équation ont des valeurs très petites que l'on peut négliger, on aura simplement

$$v = N + gx - \frac{g6x^2}{2(1+6x)} - \frac{nha6}{2(1+6x)\sqrt{\pi}}$$
$$+ \frac{Ph6a}{2(1+6x)\sqrt{\pi}}[\sin(2\pi t - \delta) - \cos(2\pi t - \delta)]$$
$$+ \frac{P_{,}h6a}{2(1+6x)\sqrt{2\pi}}[\sin(4\pi t - \delta_{,}) + \cos(4\pi t - \delta_{,})];$$

en sorte que pour cette distance à la surface, la température $v$ mesurée sur l'échelle extérieure du thermomètre, éprouvera encore des inégalités annuelles, quoique la température $u$ n'en éprouve plus aucune. A une profondeur encore plus considérable, où le produit $6x$ sera devenu un très grand nombre, cette dernière valeur de $v$ pourra être réduite à

$$v = N + \tfrac{1}{2} gx;$$

ce qui montre que l'accroissement uniforme de température, qui a

lieu à de grandes distances de la surface, ne paraîtrait être que moitié de ce qu'il est réellement, si on le déterminait d'après les indications qui auraient lieu sur les échelles de plusieurs thermomètres enfoncés à différentes profondeurs.

(227). Il ne me reste plus qu'à exposer quelques notions sur les températures moyennes des différentes parties du globe, sur celles des diverses régions du ciel, et sur la température de l'espace, dans le lieu où la terre se trouve actuellement, par suite du mouvement de notre système planétaire.

D'après l'équation (29), la température moyenne en chaque point de la surface de la terre, c'est-à-dire, la valeur de $u_{\prime}$ qui répond à $x = 0$, est

$$u_{\prime} = \xi + hQ + \frac{1}{b} g - nh. \quad (33)$$

Le coefficient $n$ du dernier terme est une fonction différente de la latitude $\mu$, selon que $\mu$ surpasse le complément de $\gamma$, ou est moindre. Ce terme provient de ce que la conductibilité de la matière du terrain près de la surface, varie suivant une loi qui est liée à celle du rayonnement extérieur (n° 55). A Paris, on a

$$nh = 0^{\circ},2672,$$

de sorte que la température moyenne est moins élevée d'à peu près un quart de degré, qu'elle ne serait, toute chose d'ailleurs égale, dans l'hypothèse d'une conductibilité constante. A l'équateur, cette différence est beaucoup moindre, et presque insensible; en faisant $\mu = 0$ dans l'expression de $n$ du n° 224, il en résulte

$$nh = \frac{(0,0077)\, b^2 h^2 a^2 Q^2}{D^2},$$

quantité qui ne s'éleverait pas à un centième de degré, lors même que la température $h$ serait double de ce qu'elle est à Paris.

Le terme $\frac{1}{b} g$ peut varier d'un point à un autre; sa valeur numérique doit être déterminée en particulier pour chaque localité; à Paris, elle est de $0^{\circ},0266$ (n° 192); et il n'y a pas lieu de pen-

ser qu'elle soit beaucoup plus grande en d'autres points du globe. Ce terme provient de l'accroissement de température dans le sens de la profondeur, résultant, soit de la température initiale de la terre, s'il en reste encore quelque trace près de sa surface, soit des inégalités séculaires de la température extérieure produite par la variation de l'écliptique, soit enfin des variations de la température de l'espace, sur la route de notre système planétaire.

Les deux facteurs $h$ et Q du second terme de la formule (33) varient d'un point à un autre de la surface; en sorte que les températures moyennes de ses différentes parties sont inégalement augmentées par la chaleur solaire. A Paris, on a

$$Q = 0{,}66662, \quad h = 35^\circ{,}924, \quad hQ = 23^\circ{,}948,$$

c'est-à-dire que la chaleur solaire y augmente la température moyenne de près de 24°, ou d'une quantité un peu plus grande que l'excès de la plus haute sur la plus basse température de l'année (n° 223). La valeur de Q à l'équateur est

$$Q = 0{,}95910;$$

et puisque, pour un même terrein, la température $h$ doit être plus grande qu'à notre latitude, il s'ensuit qu'à l'équateur la chaleur solaire élève la température moyenne de plus de 35°. Le terme de la formule (18), indépendant de la longitude du soleil, étant égal à $h \sin \gamma$, il s'ensuit qu'au pôle le terme de la température moyenne provenant de la chaleur solaire a $h \sin \gamma$ pour valeur; pour un même terrein, et à raison seulement de ce que les rayons solaires, pour arriver au pôle, éprouvent une plus grande absorption dans l'atmosphère, la température $h$ doit y être moindre que partout ailleurs; à cause de $\sin \gamma = 0{,}398$, l'augmentation de la température moyenne qu'ils y produisent doit donc être moindre qu'environ 14°.

A des latitudes égales, de part et d'autre de l'équateur, la quantité Q a la même valeur; la valeur de $h$ serait aussi la même pour des terreins de même nature; mais elle peut être différente, à raison du facteur $\frac{1}{\lambda + \lambda_1}$, ou simplement $\frac{1}{\lambda}$, qui entre dans son expression et qui représente, pour une surface donnée, le rapport de la faculté d'ab-

sorber la chaleur solaire à la faculté d'émettre la chaleur rayonnante en général. Or, l'expérience montre que si deux corps ont des pouvoirs rayonnans inégaux, c'est celui pour lequel il est le plus grand, qui s'échauffe le plus, lorsqu'on les expose tous les deux aux rayons du soleil; d'où l'on peut conclure que c'est aussi pour ce corps que le rapport $\frac{\mathfrak{s}}{\lambda}$ a la plus grande valeur, du moins quand on fait abstraction, comme dans l'expression de $h$, du pouvoir refroidissant de l'air en contact avec la surface (n° 202).

Cela étant, la quantité $\lambda$ qui mesure le pouvoir rayonnant, est généralement moindre de l'autre côté de l'équateur que de notre côté, parce que l'étendue des mers est plus grande dans l'hémisphère austral, et que le pouvoir rayonnant de la mer est moindre que celui de la terre ferme. C'est donc aussi dans l'hémisphère austral que le rapport $\frac{\mathfrak{s}}{\lambda}$ et par suite la température $h$ ont les plus petites valeurs moyennes; par conséquent, sur des parallèles également éloignés de l'équateur dans les deux hémisphères, le terme $h$Q de la formule (33) a la plus petite valeur moyenne dans l'hémisphère austral; ce qui est une cause de décroissement plus rapide de chaleur en allant de l'équateur au pôle dans cet hémisphère, conformément aux observations, et de sa température moyenne moindre que celle de l'hémisphère boréal. Une inégalité dans les quantités de chaleur rayonnante que les étoiles envoient dans un même temps aux deux hémisphères peut aussi contribuer, ainsi que nous l'avons dit précédemment (n° 200), à la différence de leurs températures moyennes; mais nous ignorons si cette inégalité de chaleur stellaire est sensible, et à laquelle des deux parties du globe, elle est favorable ou contraire.

Quant au premier terme $\xi$ de la formule (33), qui provient de la chaleur stellaire et de la chaleur atmosphérique, sa valeur devrait être déterminée au moyen de l'équation (30); mais nous avons déjà remarqué que l'on manque des données sur la constitution de l'atmosphère et sur les températures des diverses régions du ciel, nécessaires à cette détermination. Au lieu d'employer la valeur de $\xi$ pour calculer la température moyenne $u_{\prime}$, il faudra donc, au contraire, déduire cette valeur de celle de $u_{\prime}$, qui est donnée par l'observation, ou bien, de la température invariable qui a lieu à une distance connue de la surface,

diminuée de l'accroissement correspondant à cette profondeur. Si l'on substitue, par exemple, dans l'équation (30), les valeurs que l'on a trouvées pour Paris, et que l'on prenne, comme plus haut, pour R et $r$ la température et la profondeur des caves de l'Observatoire, c'est-à-dire, si l'on fait, dans cette équation,

$$hQ = 23°,948, \quad \tfrac{1}{6}g = 0°,0266, \quad gr = 0°,7868, \quad R = 11°,834,$$

on en déduira

$$\xi = -12°,927;$$

de sorte qu'à Paris la température $\xi$ est, à très peu près, de 13° au-dessous de zéro. Elle résulte de l'échange de chaleur, soit entre la terre et la portion de l'atmosphère située au-dessus de l'horizon de cette ville, soit entre la terre et toutes les étoiles qui passent en un jour sidéral au-dessus de cet horizon. La partie provenant de l'atmosphère ne nous est pas connue; nous pouvons seulement présumer qu'elle est négative, comme la valeur entière de $\xi$; car, dans la plus grande portion de l'atmosphère, la température de l'air est négative; et quoique cette portion soit celle où la densité est la plus faible, on peut croire cependant, que cette portion la plus froide et la moins dense, est prépondérante, à cause de sa plus grande étendue, dans l'échange de chaleur avec la terre. Cela étant, l'autre partie de $\xi$, qui provient de la chaleur stellaire, après qu'elle a traversé successivement l'éther et l'atmosphère, doit être une température plus élevée que — 13°; et elle serait même positive, si la partie de $\xi$ provenant de l'atmosphère était plus basse que — 13°; ce qui n'est pas probable.

La quantité $\alpha$ relative à la nature du terrein entrant semblablement dans les deux membres de l'équation (10), il s'ensuit que si elle varie dans un rapport quelconque, en passant d'un point à un autre de la surface, la valeur de $\xi$ ne changera pas. Cette température sera généralement la même pour tous les points d'un même parallèle; mais elle pourra varier avec la latitude, soit à cause de la constitution différente de l'atmosphère au-dessus de l'horizon, soit à raison de l'inégalité de température des diverses régions du ciel. Pour en déterminer la valeur à l'équateur, je suppose qu'en ce lieu, comme en d'autres points du globe (n° 207), la température moyenne de la surface

diffère peu de la température climatérique; et celle-ci étant de 27°,5 à l'équateur, je prends 27°,5 pour la valeur de $u_{\prime}$, ou plus simplement, pour l'excès de sa valeur sur celle des deux derniers termes de la formule (33); en y mettant aussi pour Q sa valeur relative à l'équateur, on en déduit

$$\xi = 27°,5 - (0,95910)h;$$

en sorte que cette température $\xi$ sera plus ou moins élevée que celle qui répond à notre latitude, selon qu'à l'équateur la température $h$ sera plus haute ou plus basse qu'environ 42°. Au pôle, si l'on suppose toujours que la température moyenne de la surface s'écarte peu de la température climatérique, que l'on prenne pour celle-ci environ — 18° que donne la formule de M. Brewster, et, comme plus haut, $h \sin \gamma$ pour le terme $hQ$ de la formule (33), on aura, abstraction faite de ses deux derniers termes,

$$\xi = -18° - h \sin \gamma;$$

température évidemment plus basse que celle qui a lieu sur le parallèle de Paris.

(228). La température de l'espace, que nous avons encore à considérer, résulte de la chaleur rayonnante, émanée des étoiles et modifiée par l'absorption qu'elle éprouve en traversant l'éther. Quelle que soit la variation d'intensité de la chaleur stellaire, en passant d'une direction à une autre autour d'un point donné, la température de l'espace en ce point est donc celle que marquerait un thermomètre d'un très petit volume, qui y serait placé et qu'on supposerait abrité du soleil. Si une sphère solide et en repos, d'un très grand diamètre, comme celui de la terre, par exemple, a son centre C au point donné, et si l'on suppose d'abord l'intensité de la chaleur stellaire qui tombe sur chaque élément de la surface, égale dans toute son étendue, cette sphère, que j'appellerai A, prendra, après un temps convenable, une température égale dans toute sa masse, qui sera encore la température de l'espace au point C. Au contraire, si l'intensité de la chaleur incidente varie d'un point à un autre de la surface de A, la sphère se trouvera dans le même cas que si elle était soumise à une température extérieure constante par rapport au

temps, mais variable à sa superficie. Les températures finales des points de cette surface seront donc égales aux températures extérieures qui leur correspondent, et la température centrale sera la moyenne de toutes ces températures finales (n° 177), ou, autrement dit, elle sera la même que si la quantité donnée de chaleur rayonnante, venue des étoiles, était distribuée uniformément sur toute la surface de A; par conséquent, ce sera toujours la température de son centre C qui marquera la température de l'espace. On pourra prendre la terre, pour cette sphère A, pourvu que, dans l'évaluation des températures moyennes de sa surface, on n'ait point égard à l'action calorifique du soleil, ni à l'influence de l'atmosphère.

Cela posé, pour calculer la température de l'espace d'après les observations faites à la surface de la terre ou à de petites profondeurs, il faudrait donc déterminer d'abord la valeur de la température $\xi$, pour chaque point de cette surface, ou du moins pour chaque parallèle, comme nous venons de le faire pour le parallèle de Paris; on retrancherait ensuite, de cette valeur, la partie de $\xi$ qui provient de la chaleur atmosphérique, et qui ne nous est pas connue; puis de la température restante, et qui se rapporterait à la surface de la terre, il resterait à conclure ce qu'elle serait à la limite de l'atmosphère; ce qui exigerait que l'on connût la loi de l'absorption de la chaleur dans cette masse fluide. Ces opérations successives étant effectuées, si elles étaient praticables, je désigne par $\chi$ la température qui en résulterait, et qui varierait d'un point à un autre de la surface; je représente par $d\sigma$ l'élément différentiel de cette surface, et par $l$ son rayon moyen; enfin, j'appelle E la température de l'espace au lieu que la terre occupe actuellement. Nous aurons

$$E = \frac{1}{4\pi l^2} \int \chi d\sigma;$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière du globe.

On voit par là que nous manquons des données nécessaires pour évaluer la température de l'espace avec quelque précision. Cependant, pour nous en former une idée, et savoir si elle est beaucoup au-dessous de zéro, ou si, au contraire, elle ne serait pas au-dessus, je ferai abstraction de l'absorption que la chaleur stellaire éprouve dans

l'atmosphère, je supposerai qu'elle tombe en égale quantité sur tous les élémens de la surface du globe, et je négligerai la partie de la température $\xi$ qui provient de la chaleur atmosphérique, c'est-à-dire que je supposerai cette partie nulle ou très petite, par une sorte de compensation entre la portion de l'atmosphère la plus dense, où la température est positive, et la portion la moins dense et la plus étendue, où la température est négative. De cette manière, $\chi$ sera une température constante, et l'on pourra prendre, pour sa valeur, celle de $\xi$ que nous avons calculée pour Paris d'après des données exactes; on aura alors $\chi = -13°$, et par conséquent aussi $E = -13°$. L'influence de la chaleur atmosphérique, que nous négligeons, augmenterait sans doute la valeur de $\chi$, et rapprocherait de zéro celle de E; toutefois, il ne me semble pas que cette augmentation puisse être telle que la température de l'espace soit positive.

Au reste, quelle que soit la valeur de E, on ne doit pas oublier que cette température varie sur la route que suit notre système planétaire dans l'espace, et que si elle diffère peu de zéro au lieu où il se trouve actuellement, il y a eu et il y aura d'autres époques pour lesquelles elle peut être d'un grand nombre de degrés, en plus ou en moins. C'est à ces grandes variations de la température E que j'ai attribué l'accroissement de chaleur de la terre observé sur chaque verticale, dans le sens de la profondeur (nº 196). Quoique ces variations soient extrêmement lentes, elles ne le sont sans doute point assez pour que leur influence s'étende à de très grandes distances de la surface et jusqu'au centre du globe; elles ne produisent que des inégalités insensibles à ces grandes profondeurs, dont les périodes comprennent de très grands nombres de siècles, ainsi qu'on l'a vu dans l'exemple du nº 197.

Pour déterminer l'influence de la température de l'espace sur celle du centre de la terre, il faudrait connaître les valeurs successives de E sur une immense longueur de la route de notre système planétaire avant l'époque actuelle, c'est-à-dire, pendant un temps encore beaucoup plus long que les intervalles des *maxima* et *minima* alternatifs de cette température, et qui en comprît un très grand nombre : la moyenne de ces valeurs de E serait la température actuelle du centre de la terre, en supposant qu'elle eût perdu toute sa chaleur d'origine, et abstraction faite de la partie de cette température qui peut être due

à l'action calorifique du soleil. Quant à cette dernière partie, si l'on suppose que la chaleur solaire ait toujours été la même, ou, du moins, qu'elle n'ait pas varié, pendant le temps immense qui est nécessaire pour que cette chaleur ait pénétré dans toute la masse de la terre et jusqu'à son centre, on la déterminera en remplaçant dans l'intégrale précédente la quantité $\chi$ par la partie $h$Q de la température moyenne extérieure. Pour effectuer l'intégration, il faudrait connaître la valeur de $h$ pour tous les points de la surface du globe, et employer deux expressions différentes de Q en fonctions de la latitude $\mu$, l'une depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = 90° - \gamma$, l'autre depuis $\mu = 90° - \gamma$ jusqu'à $\mu = 90°$ (nº 217). Dans le cas ou l'obliquité $\gamma$ de l'écliptique est nulle, on a simplement $Q = \cos\mu$ pour toutes les valeurs de $\mu$; et si l'on suppose, en outre, la température $h$ constante et égale à 35°,924, comme à Paris, il en résulte $\frac{1}{2}$(35°,924), ou à peu près 18°, pour la quantité dont la chaleur solaire augmente la température centrale de la terre.

## NOTE Ire, *relative à l'équation du mouvement de la chaleur dans l'intérieur des corps.*

Soit $m$ une partie matérielle, de grandeur insensible, appartenant à un corps, homogène ou hétérogène, solide ou liquide, en repos ou en mouvement. Au bout du temps quelconque $t$, représentons par $x, y, z$, les trois coordonnées rectangulaires d'un point M de $m$, par $u$ la température qui répond à ce point, par $k$ la conductibilité de la matière de A en ce même point M, par $v$ et $\rho$ le volume et la densité de $m$, de sorte qu'on ait $m = \rho v$. Si l'on désigne par $hvdt$ l'augmentation de chaleur de $m$ pendant l'instant $dt$, qui résulte des échanges entre $m$ et les parties environnantes de A, on aura, d'après ce que j'ai trouvé dans le n° 49,

$$h = \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz},$$

en supposant insensible l'étendue du rayonnement intérieur, mais néanmoins extrêment grande, eu égard aux dimensions de $m$, et le point M situé à une distance sensible de la surface de A.

Cette augmentation instantanée de chaleur $hvdt$, provenant de l'action mutuelle de $m$ et des parties circonvoisines de A, ne dépend que de leur disposition respective à la fin du temps $t$, et nullement des positions qu'elles pourront occuper l'instant d'après, par suite des mouvemens produits dans A, soit par l'inégalité de température de ses différens points, soit par toute autre cause. Son expression est donc essentiellement la même pour un corps en repos et pour un corps en mouvement, pour un liquide et pour un solide. C'est ainsi, par exemple, que dans le problème du *flux* et du *reflux*, on calcule à un instant quelconque, l'attraction de la mer sur chacun de ses points, comme si la masse entière était solide à cet instant, et indépendamment des mouvemens que cette attraction et d'autres causes pourront produire.

Pour former l'équation du mouvement général de chaleur, il ne s'agit donc que d'égaler cette expression de $hvdt$ à l'augmentation de chaleur de $m$, qui répond effectivement, d'après sa chaleur spécifique, à l'accroissement $du$ de sa température pendant l'instant $dt$. Mais pour la même matière, la chaleur spécifique a des valeurs différentes, selon qu'en augmentant la température d'un degré, par exemple, on laisse cette matière se dilater librement en tous sens, ou qu'on empêche, en tout ou en partie, son extension d'avoir lieu. Dans les gaz, la dilatation et la

pression étant égales en tous sens autour de chaque point, il s'ensuit qu'il n'y a que deux chaleurs spécifiques à déterminer, l'une *à volume constant*, l'autre *à pression constante;* leurs valeurs étant connues par l'expérience, on en déduit aisément l'augmentation de chaleur qui a lieu lorsque le volume et la pression varient en même temps. On peut admettre qu'il en est de même, et pour la même raison, dans les liquides, mais non pas dans les corps solides. Supposons, pour fixer les idées, que A soit un cylindre homogène qui ait partout la même température, et dont le poids sera pris pour unité. Supposons aussi qu'on y introduise une quantité de chaleur, qui s'y distribue uniformément, et qui augmente d'un degré la température de tous ses points. Si ce corps est placé dans l'air, dont la pression est constante et la même sur toute sa surface, il se dilatera également dans toutes ses dimensions; et en désignant par $\gamma$ la quantité de chaleur introduite, $\gamma$ sera la chaleur spécifique à pression constante. Si au contraire, ce même corps est contenu de toutes parts dans une enveloppe inflexible, il conservera sa forme et son volume; et $\gamma'$ étant alors la quantité de chaleur introduite, elle exprimera la chaleur spécifique de A à volume constant. Le rapport de $\gamma$ à $\gamma'$ surpassera toujours l'unité. Mais quand le cylindre A sera renfermé dans un autre cylindre inflexible et de même diamètre, il s'allongera sans s'étendre transversalement; il exercera une forte pression contre l'enveloppe latérale; ses molécules situées sur une parallèle à son axe seront plus écartées les unes des autres, que celles qui appartiennent à une section perpendiculaire à cette droite; pour les maintenir à une distance inégale, la quantité de chaleur introduite devra être différente de $\gamma$ et de $\gamma'$; on ne voit pas non plus comment on pourrait la déduire de ces deux quantités; et il faudra encore recourir à l'expérience pour la déterminer. Si A était un liquide contenu dans un vase cylindrique, il s'allongerait encore par l'effet de l'addition de chaleur; l'intervalle moyen des molécules deviendrait plus grand; mais il serait égal en tous sens autour de chaque point, et la pression, aussi égale en tous sens, serait la même qu'avant l'addition de chaleur; par conséquent, la quantité de chaleur introduite serait alors la chaleur spécifique à pression constante. A cet égard, la différence entre les solides et les liquides provient de ce que, dans les liquides parfaits, comme dans les gaz, la forme de leurs molécules aux distances où elles sont les unes des autres, n'influe pas sur leur action mutuelle, en sorte qu'il n'existe aucune force qui puisse les maintenir dans un état où elles seraient plus resserrées dans un sens que dans un autre autour d'un même point; tandis que dans les solides et dans les liquides visqueux, la force qui produit cet effet est celle qui provient de l'influence de la forme sur l'action réciproque des molécules.

Pendant qu'un corps solide s'échauffe ou se refroidit, chacune de ses parties, telles que $m$, éprouve généralement des pressions inégales en des sens différens, et ses dimensions varient inégalement durant l'instant $dt$; il se peut que $m$ se dilate dans un sens, et se contracte, en même temps, suivant une autre direction; nous ne pourrions donc pas former l'expression générale de l'accroissement de chaleur

de $m$ correspondant à l'augmentation $du$ de sa température, et qui devra être égalée à $hvdt$; toutefois, il ne sera pas inutile de donner ici cette expression pour le cas particulier où la partie $m$ se dilate également en tous sens, et où, en même temps, la pression qu'elle éprouve varie aussi également suivant toutes les directions. Ce cas aura lieu rarement dans les solides; mais ce sera toujours celui des fluides sans viscosité sensible.

Soit $p$ la pression égale en tous sens que $m$ éprouve au bout du temps $t$, lorsque son volume et sa température sont $v$ et $u$. Il s'agira de déterminer la quantité de chaleur qu'on doit introduire dans $m$, pour que cette pression, ce volume et cette densité deviennent simultanément $p + dp$, $v + dv$, $u + du$, au bout du temps $t + dt$. Supposons d'abord que la pression $p$ ne change pas; et soit alors $\theta dt$ l'augmentation de température qui répondra à l'accroissement $dv$ du volume; l'accroissement de chaleur nécessaire pour produire cet effet, sera $m\gamma\theta dt$, en désignant par $\gamma$ la chaleur spécifique de la matière de $m$, à pression constante et rapportée à l'unité de poids. Supposons aussi qu'un volume quelconque de cette matière augmente sous une pression constante dans le rapport de $1 + \lambda$ à l'unité, pour chaque degré d'accroissement de sa température; de sorte que $\lambda$ soit une petite fraction donnée par l'expérience, et qu'on peut regarder comme indépendante de la grandeur de $p$, à moins que cette pression ne soit excessive. On aura alors

$$dv = v\lambda\theta dt.$$

Le volume de $m$ étant aussi devenu $v + dv$, et la température s'étant changée en $u + \theta dt$ sous la pression $p$, supposons actuellement que la pression devienne $p + dp$ sans que le volume change; la température deviendra $u + du$, puisque c'est celle qui a lieu à l'époque où la pression et le volume sont $p + dp$ et $v + dv$, c'est-à-dire, au bout du temps $t + dt$; et la quantité de chaleur qu'il aura fallu introduire dans $m$ pour faire passer la température de $u + \theta dt$ à $u + du$, ou pour l'augmenter de $du - \theta dt$, sans faire varier son volume, sera $m\gamma'(du - \theta dt)$, en représentant par $\gamma'$ la chaleur spécifique de la matière de $m$, à volume constant et rapportée à l'unité de poids. Par conséquent, si l'on ajoute cette quantité de chaleur à la précédente, on aura

$$m\gamma\theta dt + m\gamma'(du - \theta dt)$$

pour la totalité de la chaleur qu'il faut introduire dans $m$ pendant l'instant $dt$, à l'effet d'augmenter à la fois son volume de $dv$ et sa température de $du$.

Maintenant, je désigne par $c$ et $c'$ les chaleurs spécifiques de la matière de $m$, à pression constante et à volume constant, rapportées l'une et l'autre à l'unité de volume, de sorte qu'on ait (n° 4)

$$c = \gamma\rho, \quad c' = \gamma'\rho.$$

Si l'on met aussi pour $m$ et $v\vartheta dt$ leurs valeurs $\rho v$ et $\frac{1}{\lambda}\, dv$, la quantité de chaleur qui doit être égalée à $hvdt$ deviendra

$$\frac{1}{\lambda}(c - c')\, dv + c' v du;$$

d'où il résultera

$$\frac{1}{\lambda v}(c - c')\frac{dv}{dt} + c'\frac{du}{dt} = h, \quad (a)$$

pour l'équation du mouvement de la chaleur, lorsque l'on tient compte de la différence des deux chaleurs spécifiques; laquelle équation, d'après ce qu'on vient d'expliquer, conviendra toujours aux liquides, et dans des cas très rares, aux corps solides.

Si les points de A sont en mouvement, et qu'on désigne, au bout du temps $t$, par U, V, W, les trois composantes de la vitesse du point M suivant les prolongemens de ses coordonnées $x, y, z$, on aura (*)

$$\frac{dv}{dt} = v\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz}\right).$$

En même temps, il faudra remplacer $\frac{du}{dt}$ par l'expression (n° 44)

$$\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}U + \frac{du}{dy}V + \frac{du}{dz}W,$$

dans laquelle $\frac{du}{dt}$ est le coefficient différentiel de $u$, par rapport au temps $t$ qui entre explicitement dans cette fonction de $t, x, y, z$. Il faudra aussi remarquer que la quantité $k$, comprise dans la valeur de $h$, varie en raison inverse de la densité $\rho$ (n° 55), ou en raison directe du volume $v$. Quand on n'a point égard à cette variation, l'équation $(a)$ est celle que M. Duhamel a considérée dans un mémoire présenté récemment à l'Académie.

Lorsque le mouvement de A sera uniquement dû aux dilatations ou contractions de ses parties, provenant de leurs variations de température, il sera très lent, en général, et l'on pourra négliger les vitesses U, V, W; ce qui réduira l'équation du mouvement de la chaleur à celle du n° 49, en observant que le coefficient de $\frac{du}{dt}$, dans son premier membre, devra être la chaleur spécifique à volume constant et rapportée à l'unité de volume, de la matière de A au point M.

Au reste, dans les corps solides, le rapport des deux chaleurs spécifiques $\gamma$ et $\gamma'$,

(*) *Traité de Mécanique*, tome II, p. 673.

abstraction faite de l'inégalité d'extension en différens sens, paraît être peu différent de l'unité. D'après des expériences de M. Weber, il serait 1,0883 dans le cuivre, 1,0721 dans le fer, et 1,0609 dans l'argent. M. Dulong a déduit des expériences de Berthollet sur la compression du cuivre, qu'il serait plus élevé dans ce métal, où il aurait 1,13 pour valeur; de sorte que la différence $\gamma - \gamma'$ surpasserait de moitié celle que M. Weber a trouvée. MM. Sturm et Colladon n'ayant observé aucun dégagement de chaleur dans la compression de l'eau, il en résulterait que pour ce liquide les deux quantités $\gamma$ et $\gamma'$ sont sensiblement égales.

## NOTE II$^e$, *sur le rayonnement moléculaire.*

Les corps sont formés de molécules, d'une grandeur insensible, et séparées les unes des autres par des *pores* ou espaces vides de matière pondérable. Les dimensions des pores sont aussi insensibles; mais on les suppose incomparablement plus grandes que celles des molécules; et elles augmentent ou diminuent, quand les corps sont dilatés ou comprimés.

Chaque molécule se compose d'une portion de matière pondérable, et de diverses substances impondérables auxquelles on attribue les phénomènes de l'électricité, du magnétisme, de la chaleur. Dès que le calorique est considéré comme une substance matérielle, que l'on appelle impondérable parce que son poids ne saurait être rendu sensible à cause de son extrême ténuité, il s'ensuit que cette matière ne peut jamais être ni créée, ni détruite; ce qui n'empêche pas que la quantité de chaleur contenue dans les corps ne soit supposée inépuisable, pourvu que la chaleur spécifique satisfasse à une condition qui a été énoncée dans le n° 5. Le pouvoir répulsif dont est douée chaque particule de calorique ne peut pas non plus être annulé ou suspendu; il est invariable pour deux particules transportées successivement dans différens corps, engagées dans leurs molécules, ou en mouvement dans leurs pores, et séparées l'une de l'autre par une distance qui demeure constante.

La partie pondérable de chaque molécule retient sa quantité de chaleur par une force d'attraction réciproque qui peut s'étendre en dehors de la molécule, et s'exercer entre les matières pondérables et le calorique des molécules voisines; leurs parties pondérables s'attirent mutuellement, et leurs quantités de chaleur se repoussent; ces forces d'attraction et de répulsion, décroissent avec une extrême rapidité, quand la distance augmente, et deviennent tout-à-fait insensibles, dès que la distance a une grandeur sensible; toutefois leur action sensible s'étend à des distances qui sont extrêmement grandes, par rapport à celles qui séparent les molécules, de sorte que la sphère d'activité attractive ou répulsive de chaque molécule comprend, dans tous les corps, un nombre immense d'autres molécules. Dans les corps solides et dans les liquides, l'excès de la répulsion mutuelle de deux molécules sur leur attraction, varie dans de très grands rapports pour de très petites variations de leur distance; ce qui tient, comme je l'ai expliqué dans d'autres occasions, à ce que la différence de ces

deux forces est toujours extrêmement petite eu égard à la grandeur de chacune d'elles; et d'où il résulte que, dans ces corps, la pression intérieure varie aussi dans de très grands rapports pour de très petites variations de leur densité.

Cela posé, quand les parties d'un corps ne font aucune vibration sensible, ses molécules ne sont pas néanmoins dans un repos absolu : on doit supposer qu'elles font continuellement des vibrations très rapides, irrégulières et d'une étendue insensible, dans les espaces vides qui les séparent; la résultante des répulsions et attractions exercées à chaque instant sur chaque molécule, par toutes celles qui l'environnent, n'est donc pas rigoureusement nulle, lors même que l'on n'a point égard à la pesanteur. L'équilibre de ces forces est un état dans lequel leur résultante varie incessamment, en grandeur et en direction autour d'une valeur moyenne, égale et contraire au poids de la molécule sur laquelle elles agissent. On conçoit aussi qu'il y a des momens où l'action de cette résultante variable sur une partie du calorique de la molécule, est supérieure à l'action propre de la matière pondérable, et en détache, en conséquence, des particules de chaleur. Le nombre immense des molécules agissantes, et la grande rapidité de leurs vibrations intestines, rendent cet effet régulier et uniforme dans des intervalles de temps aussi petits qu'on voudra, pourvu qu'ils aient une grandeur sensible. Les particules de chaleur ainsi détachées des molécules sont lancées dans les pores avec une très grande vitesse; elles s'y meuvent jusqu'à ce qu'elles soient absorbées par d'autres molécules qu'elles viennent à rencontrer.

Tel est le principe du *rayonnement moléculaire* de la chaleur dans tous les corps, sur lequel est fondé la théorie mathématique de la chaleur. On ne pourrait pas, en effet, attribuer ce phénomène à l'action isolée de chaque molécule sur elle-même; car cette action tend, au contraire, à retenir la chaleur propre de la molécule. C'est parce qu'il est produit par les actions simultanées d'un nombre immense de molécules voisines, que la densité de la chaleur rayonnante qui se meut dans les pores d'un corps homogène, plus ou moins comprimé, augmente ou diminue avec le nombre de molécules contenues sous un volume donné, mais, comme la pression intérieure, dans un rapport qui peut être beaucoup plus grand que pour la densité de ce corps, par la nature des forces auxquelles nous attribuons le rayonnement.

La température en un point quelconque M d'un corps A solide ou liquide, est l'effet immédiat de la chaleur rayonnante près de ce point, et, pour ainsi dire, la mesure de sa densité, comme il résulte de la définition de la température qui a été donnée dans le premier chapitre de cet ouvrage. Supposons, en effet, le point M situé à une distance de la surface de A, plus grande que l'étendue insensible ou du moins très petite du rayonnement intérieur dans la matière de A. Appelons B une sphère qui ait cette étendue pour rayon et son centre au point M. Concevons, en ce même point, un thermomètre d'une grandeur insensible par rapport à B, de sorte qu'il n'influe pas sensiblement sur la chaleur et le rayonnement de cette partie de A. Il y aura, néanmoins, échange de chaleur entre ce thermomètre et toutes les molécules de A contenues dans B; le volume de l'instrument augmentera ou diminuera; et quand il sera devenu fixe, la température que marquera ce thermomètre idéal, sera celle du

corps A au point M. Si A était un gaz, le rayonnement s'étendrait à de grandes distances autour de M, et la température marquée par le thermomètre placé en ce point, différerait de celle de la couche d'air environnante, à moins que ce fluide n'eût, dans toute sa masse, un égal degré de chaleur.

Si A est un corps homogène, dont la température soit partout la même, et qu'on y introduise une quantité D de chaleur, elle s'y distribuera uniformément entre toutes les parties de ce corps telles que B; la quantité moyenne de chaleur des molécules de B, augmentera d'une quantité $\delta$ proportionnelle à D. Si l'on empêche A de se dilater, la force répulsive et le rayonnement moléculaire qui en est la suite, augmenteront aussi; ce qui fera croître la température de A. Désignons par $\epsilon$ cet accroissement; s'il est peu considérable, d'un degré, par exemple, on pourra le supposer proportionnel à $\delta$ ou à D; et en prenant le poids de A pour unité, le rapport $\frac{D}{\epsilon}$ sera la chaleur spécifique de A à volume constant. L'intensité du rayonnement ne dépendant pas seulement de celle de la force répulsive du calorique des molécules voisines, mais dépendant aussi de la force avec laquelle chaque molécule retient sa chaleur propre, qui est sans doute différente dans les différentes matières, il s'ensuit que ce rapport $\frac{D}{\epsilon}$ doit varier d'un corps à un autre. Pour un même corps, il peut aussi varier avec la quantité de chaleur qu'il renferme, et dépendre conséquemment de sa température; car l'augmentation du rayonnement provient de l'action de la chaleur additive sur la chaleur totale des molécules; et, d'ailleurs, il est possible que la force avec laquelle la matière pondérable de chaque molécule retient la chaleur dépende de la quantité qu'elle en contient. Dans les corps solides, la chaleur spécifique ne varie notablement que pour de très grandes différences de température. On la suppose constante dans les gaz, quoique l'expérience n'ait encore rien fait connaître à cet égard.

On conçoit que l'accroissement de température de A doit être moindre, lorsqu'on laisse le corps se dilater, en même temps qu'on y introduit la quantité donnée D de chaleur; car alors le pouvoir répulsif des molécules augmente à raison de la chaleur additive $\delta$, et diminue à cause de l'augmentation de leurs distances mutuelles. Dans certains cas, il y a compensation exacte entre ces deux effets contraires, de sorte que l'on n'observe aucune variation de température, malgré l'addition de chaleur qui peut être fort considérable. C'est ce qui a lieu dans le passage d'un liquide à l'état de vapeur. Les molécules, dans l'état de vapeur naissante, sont à des distances beaucoup plus grandes que dans l'état d'ébullition; elles renferment en même temps une plus grande quantité de chaleur; de telle sorte que la force qui produit le rayonnement moléculaire est la même dans les deux états, et par conséquent aussi, la température. Dans d'autres cas, il arrive même qu'il y a à la fois addition de chaleur et diminution de distance entre les molécules, sans changement dans la température. Ainsi, quand la glace, à la température zéro, passe à l'état liquide sans élévation de température, il y a absorption d'une quantité de chaleur, déterminée

et toujours la même, et l'observation montre cependant que la densité de l'eau surpasse celle de la glace. Cela provient de ce que la forme et la disposition respectives des molécules de l'eau ne sont pas les mêmes à l'état solide et à l'état liquide; on conçoit que l'une et l'autre peuvent influer sur l'action mutuelle des quantités de chaleur des molécules; on conçoit aussi que la puissance avec laquelle chaque molécule retient sa propre chaleur, peut dépendre de sa forme; et de là, il résulte que la force répulsive qui produit le rayonnement moléculaire peut se trouver égale dans la glace et dans l'eau à l'état liquide, quoique dans le premier état, les molécules aient de moindres quantités de chaleur, et soient séparées par de plus grandes distances.

## NOTE IIIe, *relative au nº 552.*

Une expérience récente de M. Melloni a démontré ce qui avait été présenté dans ce numéro, comme une simple conjecture. Ayant fait refroidir un même liquide dans un vase métallique, d'une petite épaisseur, et dont la surface intérieure a été d'abord parfaitement polie, puis rayée plus ou moins, M. Melloni a reconnu que la vitesse du refroidissement, à partir d'une même température, demeurait invariable, tandis qu'elle changeait, au contraire, dans de très grands rapports, lorsqu'on faisait subir les mêmes variations à la surface extérieure. Ce résultat permet d'assimiler la communication de la chaleur entre un corps solide et un liquide, à celle qui a lieu entre un corps solide et la couche d'air ou de gaz en contact avec sa surface, et qui ne dépend pas non plus de l'état de cette surface, d'après les expériences de MM. Dulong et Petit. On peut même supposer que ces deux communications de chaleur à petites distances, sont un même phénomène, produit, dans le second cas, par l'augmentation de densité de l'air adhérent à la surface du solide, et qui est, pour ainsi dire, liquéfié par l'attraction de ce corps.

---

*On avait annoncé, à la page 445, que l'on trouverait, à la fin de l'ouvrage, le rapport de M. Biot sur les travaux de M. Melloni; mais l'étendue que M. Biot a donnée à ce rapport, et qui était commandée par l'importance et la variété des matières, ne permet plus de l'insérer ici sous la forme d'une simple note; et d'ailleurs l'Académie vient d'arrêter qu'il serait imprimé dans le tome XIV de ses Mémoires, actuellement sous presse.*

FIN.

*Fig. 1.*

*Fig. 5.*

*Fig. 9.*

*Fig.*

*Fig. 10.*

*Fig. 11.*

*Fig. 13 bis.*

*Fig. 14.*

*Fig. 17.*

